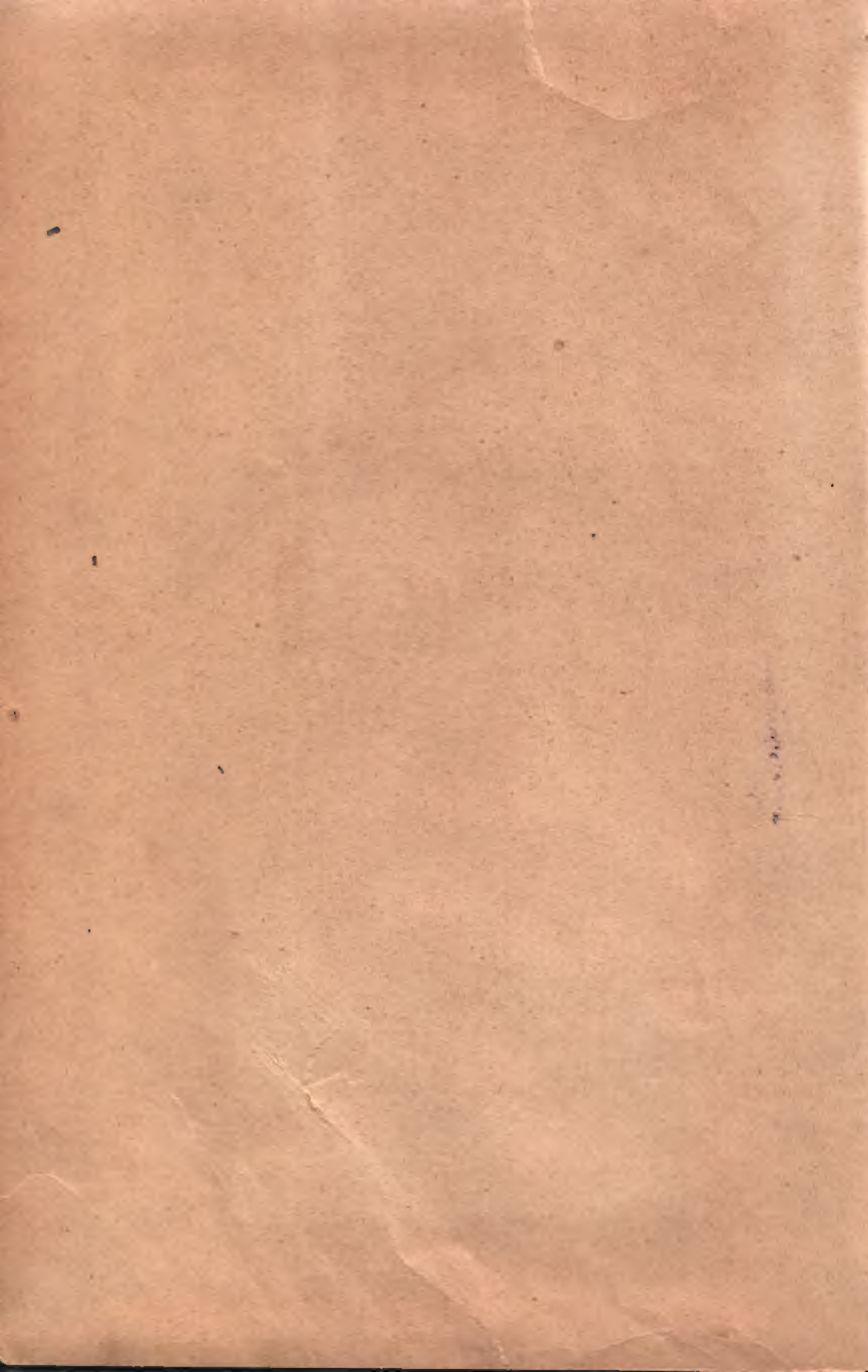


517

Φ-29



Alumina



П

У

577
8-29.

НАЧАЛЬНОЕ РУКОВОДСТВО

къ

САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ

ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ.

СОСТАВИЛЪ

Н. Б. Делоне,

Ординарный профессоръ Варшавскаго Политехническаго Института
Императора Николая II.

223559
Библиотечный
№ 223559
Университетский

✓

съ 321 фигурой въ текстѣ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Изданіе К. Л. Риккера.

Невскій пр., № 14.

1900.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 28 Апрѣля 1900 года.

Типографія Ю. Н. Эрлиха. Садовая, 9.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПРЕДИСЛОВІЕ	стр. 1
ВВЕДЕНІЕ	5

Часть I.

Основанія Аналитической Геометріи.

ГЛАВА I.

Аналитическая Геометрія на плоскости.

§§	стр.	§§	стр.
Приемы Аналитической Геометріи.			
1. Характеръ аналитической геометріи	8	20. Расстояніе между двумя точками	19
2. Опредѣленіе положенія точки	—	21. Координаты точки, раздѣляющей расстояние между двумя данными точками на двѣ части, отнесенная одна къ другой какъ m къ n	20
3. Прямоугольныя произвольныя координаты	10	22. Координаты середины расстоянія между двумя данными точками	—
4. Отрицательныя координаты	—	23. Уголъ, составляемый двумя прямыми	21
5. Обозначенія точекъ	—	24. Условіе параллельности двухъ прямыхъ	22
6. Опредѣленіе линий уравненіями	—	25. Условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ	23
7. Уравненіе окружности, описанной изъ начала координатъ радиусомъ R	12	26. Разстояніе точки отъ прямой $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$	—
8. Линіи законообразныя и незаконнообразныя	—	27. Расстояніе точки отъ прямой $Ax + By + C = 0$	25
9. Общій приемъ нахожденія уравненій законообразныхъ линій	—	Эллипсъ.	
10. Начертить линію по данному ея уравненію	13	28. Опредѣленіе эллипса	26
Прямая линія.			
11. Уравненіе прямой, проходящей чрезъ начало	14	29. Уравненіе эллипса относительно главныхъ осей его	—
12. Уравненіе прямой опредѣленной угломъ наклопенія и отрывкомъ, образуемымъ ею на оси ординатъ	15	30. Исслѣдованіе вида эллипса по его уравненію	28
13. Частныя виды уравненія (I)	—	31. Диаметры эллипса в его центрѣ	29
14. Уравненіе прямой, опредѣленной отрывками, образуемыми ею на осяхъ	16	32. Сравненіе эллипса съ окружностью	30
15. Порядокъ уравненія	—	33. Главныя оси эллипса	31
16. Всякое уравненіе 1-го порядка выражаетъ прямую	17	34. Соотношеніе между a , b и c	—
17. Уравненію прямой, проходящей чрезъ данную точку	—	35. Эксцентриситетъ эллипса	32
18. Уравненію прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки	18	36. Геометрическое мѣсто серединъ параллельныхъ хордъ эллипса	—
19. Уравненію прямой, проходящей на разстояніи p отъ начала	19	37. Сопряженные диаметры	34
		38. Нахожденіе центра начерченнаго эллипса	—
		39. Опредѣленіе главныхъ осей начерченнаго эллипса	—
		40. Опредѣленіе фокусовъ начерченнаго эллипса	35
		41. Черченіе эллипса помощью нити	—

§§	стр.	§§	стр.
Гипербола.			
42. Основное свойство гиперболы	36	53. Преобразование полярных координат в Декартовы	41
43. Уравнение гиперболы относительно главных осей	—	54. Расстояние точек эллипса и гиперболы от фокусов этих кривых	42
44. Исследование вида гиперболы по ее уравнению	—	55. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы относительно фокуса	43
45. Асимптоты гиперболы	37	Преобразование координат.	
46. Главные оси гиперболы	38	56. Необходимость преобразования одних Декартовых координат в другие Декартовы	44
47. Построение асимптот по уравнению гиперболы	—	57. Перенос начала	45
Парабола.		58. Поворот осей	46
48. Основное свойство параболы	—	59. Общее преобразование координат	—
49. Уравнение параболы относительно вершины	39	60. Уравнение равнобедренной гиперболы, ортосимметричной к асимптотам	47
50. Исследование вида параболы по ее уравнению	—	61. Косоугольные координаты	48
Полярные координаты.		62. Кривые второго порядка	—
51. Полярные координаты	40	63. Уравнения эллипса, параболы и гиперболы относительно вершин	49
52. Преобразование Декартовых координат в полярные	—	64. Приращение	50
		65. Первое понятие о функции	—
		66. Кривые различных порядков	51

ГЛАВА II.

Аналитическая Геометрия в пространстве.

67. Определение положения точки прямоугольными координатами	52	84. Преобразование сферических координат в Декартовы и обратно	62
68. Поверхность выражается уравнением вида: $f(x, y, z) = 0$	—	85. Свойство углов, составляемых радиусом-вектором с осями координат	—
69. Уравнение сферической поверхности, описанной радиусом R из начала	53	86. Определение угла, составляемого двумя прямыми по данным косинусам наклонения этих прямых	63
70. Всякое уравнение $f(x, y, z) = 0$ между координатами x, y, z представлять собой поверхность	—	87. Уравнение плоскости, проходящей на расстоянии p от начала	64
71. Представление линии совокупностью двух уравнений с тремя переменными	55	Плоскость и прямая.	
72. Представление линии пересечением двух цилиндров	56	88. Всякое уравнение 1-го порядка выражает в пространственных координатах плоскость	65
73. Понятие о проекциях	—	89. Угол, составляемый двумя плоскостями	—
74. Длина проекции на плоскость наклоненного отрезка	57	90. Условие перпендикулярности двух плоскостей	66
75. Длина проекции наклоненного отрезка на прямую	—	91. Условие параллельности двух плоскостей	—
76. Проекция последней стороны многоугольника	58	92. Уравнение плоскости, отсекающей на осях отрезки a, b, c	—
77. Преобразование координат в пространстве	59	93. Длина перпендикуляра, опущенного из точки (x', y', z') на плоскость $ax \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$	67
78. Переносение начала	—	94. Длина перпендикуляра, опущенного из точки (x', y', z') на плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$	—
79. Поворот осей	60	95. Выражение прямой двумя уравнениями	68
80. Общее преобразование	—		
81. Расстояние между двумя точками	—		
82. Расстояние точки от начала	61		
83. Сферические координаты	—		

§§	стр.	§§	стр.
96.	Уравнение прямых, проходящих чрез данную точку (x', y', z')	102.	Модель гиперболоида вращения обь одной полости
97.	Уравнения прямой, проходящей чрез точки (x', y', z') и (x'', y'', z'')	103.	Гиперболоидь обь одной полости
98.	Уравнение прямой, проходящей чрез точку (x', y', z') и составляющей съ осями углы: α, β, γ	104.	Гиперболоидь вращения о двухъ полостяхъ
99.	Уголъ, составленный двумя прямыми	105.	Трехосный гиперболоидь о двухъ полостяхъ
Поверхности второго порядка.		106.	Эллипсоиды вращения
100.	Гиперболоидь вращения обь одной полости	107.	Трехосный эллипсоидъ
101.	Прямолинейныя образующия гиперболоида вращения	108.	Параболоидь вращения
		109.	Эллиптический параболоидъ
		110.	Гиперболический параболоидъ
		111.	Поверхность прямого круглаго конуса
		112.	Конусы 2-го порядка
		113.	Поверхности 2-го порядка
		114.	Коническия сечения

Часть II.

Основанія анализа безконечно-малыхъ.

ГЛАВА I.

Дифференціальное исчисленіе.

115.	Вегугленіе	83	138.	Производная отъ $\arccos x$	100
116.	Производная	85	139.	Производная отъ $\arctg x$	—
117.	Геометрическое значеніе производной	86	140.	Дифференцирование сложныхъ функций	101
118.	Примѣръ вычисления производной	87	141.	Дифференцирование радикаловъ	102
119.	Увеличивается или уменьшается функция значенія отъ данного значенія переменной	88	142.	Понятіе о рядахъ	103
120.	Въ какихъ случаяхъ $f'(x) = 0$	89	143.	Примѣны сходности рядовъ	104
121.	Производная постоянной величины	90	144.	Примѣръ	105
122.	Различные порядки безконечно-большихъ величинъ	—	145.	Число e	—
123.	Различные порядки безконечно малыхъ величинъ	—	146.	Теорема	106
124.	Основные теоремы о безконечно малыхъ	91	147.	Числовая величина e	—
125.	Дифференціалъ	93	148.	Производная отъ логарифма	107
126.	Простыя функции	94	149.	Производная отъ a^x	108
127.	Производная отъ $(a+x)$	95	150.	Употребленіе логарифмирования при дифференцировании нѣкоторыхъ функций	109
128.	Производная отъ $(u+v+ic+\dots)$	—	151.	Частныя производныя функции многихъ переменныхъ	—
129.	Производная отъ ax	96	152.	Полный дифференціалъ	110
130.	Производная отъ uv	—	153.	Производная сложныхъ функций	111
131.	Производная степени	97	154.	Производныя величинъ функций	—
132.	$\frac{\sin x}{x}$	—	155.	Производныя высшихъ порядковъ	113
133.	Производная отъ $\sin x$	98	156.	Зависаніе одного независимаго переменнаго другима	114
134.	Производная отъ $\cos x$	—	Аналитическія приложенія дифференціального исчисленія.		
135.	Производная отъ $\frac{u}{v}$	99	1) <i>Ряды.</i>		
136.	Производная отъ $tg x$	—	157.	Рядъ Тейлора для нѣкой рациональной алгебраической функции	116
137.	Производная отъ $\arcsin x$	—	158.	Рядъ Тейлора для какой-либо $f(x)$	118

§§	стр.
159. Рядъ Макъ-Лорена	121
160. Разложение функций e^x	—
161. Разложение $\sin x$	—
162. Разложение $\cos x$	122
163. Аргументы тригонометрических функций в анализъ	—
164. Разложение $\lg(1+x)$	—
165. Ряды Тейлора и Макъ-Лорена для функций многих переменныхъ	123
166. Формула Эйлера для однородных функций	124

2) Истинное значение величинъ, выраженныхъ въ неопределенной формѣ.

167. Величины $\frac{0}{0}$	125
168. Величины $\frac{\infty}{\infty}$	127
169. Величины: ∞^0 ; 1^∞ ; 0^0 ; $0 \cdot \infty$	128

3) Наибольшя и наименьшя значения функций.

170. О максимумахъ и минимумахъ функций одного переменнаго	—
171. Способы нахождения максимумовъ и минимумовъ	129
172. Максимумы и минимумы функций многихъ переменныхъ	131

Геометрическия приложенія дифференціального исчисления.

173. Теорія касательной къ кривой $f(x,y)=0$	132
174. Уравненіе нормали	133
175. Длина подкасательной	—
176. Длина поднормали	134
177. Длина нормали	—
178. Общность дифференціальныхъ формулъ	—
179. О вогнутости и выпуклости кривыхъ	135
180. Точки перегиба	136
181. Направленіе элемента кривой	—
182. Элементъ кривой	—
183. Параметры кривой	137
184. Отгибающія	138
185. Кривизна кривыхъ	142
186. Величина радиуса кривизны	144
187. Развертки и развертывающія	145
188. По данному уравненію развертывающей найти уравненіе развертки	146
189. Порядок соприкосновенія двухъ кривыхъ	148
190. Дифференціалъ дуги въ полярныхъ координатахъ	149
191. Уголъ, составленный радиусомъ-векторомъ съ касательною	150
192. Выраженіе радиуса кривизны въ полярныхъ координатахъ	—
193. Особые точки кривыхъ	151
194. Точка возврата	152

§§	стр.
195. Точка остановки	153
196. Угловые точки	—
197. Братныя точки	154
198. Отбывающая точка	155
199. Вліяніе параметра	156

Исслѣдованіе свойствъ нѣкоторыхъ кривыхъ.

200. Вступленіе	157
201. Касательная эллипса	—
202. Сопряженные диаметры эллипса	158
203. 1-ая теорема Аполлонія	159
204. Разстояніе центра эллипса отъ касательной	160
205. Уголъ φ , составленный двумя сопряженными диаметрами эллипса	—
206. 2-ая теорема Аполлонія	161
207. Разстояніе касательной эллипса отъ фокусовъ	—
208. Равенство угловъ, составляемыхъ касательною эллипса съ радиусами-векторами точки касанія	162
209. Радиусъ кривизны эллипса	163
210. Координаты центра кривизны эллипса	—
211. Развертка эллипса	164
212. Касательная гиперболы	165
213. Асимптоты гиперболы	—
214. Радиусъ кривизны и развертка гиперболы	166
215. Касательная параболы	—
216. Равенство угловъ, составляемыхъ нормалью параболы съ радиусомъ-векторомъ и съ прямыми, параллельными ея оси	167
217. Архимедова спираль	169
218. Логарифмическая спираль	170
219. Радиусъ кривизны логарифмической спирали	171
220. Развертка логарифмической спирали	172
221. Гиперболическая спираль	173
222. Циклоида и ея построеніе по точкамъ	174
223. Уравненіе циклоиды	175
224. Касательная и нормаль циклоиды	176
225. Радиусъ кривизны циклоиды	177
226. Центръ кривизны циклоиды	—
227. Развертка циклоиды	—
228. Построеніе циклоиды дугами окружностей	178
229. Растянутая и святаа циклоиды	179
230. Приближенное построеніе длины полуокружности	180
231. Рулетты	—
232. Эпциклоиды и гипоциклоиды	181

Функции многихъ переменныхъ.

233. Кривыя двойной кривизны	181
234. Касательная къ кривой	182

§§	стр.	§§	стр.
25	41 м отъ точки въ плоскости	241	Углы и нормали
26	Исправленіе ошибокъ	242	Площадь поверхности
27	Площадь поверхности в гнѣзѣ	243	Ряды функций
28	Площадь поверхности въ цилиндрической	244	Виды функций
29	Площадь поверхности въ конической	245	Различные виды функций въ геометрии
30	Косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью съ осью цилиндра	246	Косыя функции въ геометрии

ГЛАВА II.

Интегральное исчисленіе.

267	Площадь поверхности	189	268	Интегралы вида $\int x^n P dx$	222
268	Интегралы дробей	190	269	$\int \sin^m x \cos^n x dx$	223
269	Интегралы дробей	—	270	Интегралы дробей въ тригонометрии въ аркадическихъ интегралахъ	224
270	Площади, выходящихъ изъ центра круга, сумма которыхъ равна площади круга	191			
271	Определеніе площади	192			
272	Историческія замечанія	193			
273	Интегралы дробей	194			
274	Интегралы дробей	196			
275	Определеніе формулы интегрированія	—			
276	Интегрированіе по частямъ	199			
277	Интегрированіе подстановкою	200			
278	Определеніе площади	202			

Интегрированіе дробей

279	Интегрированіе рациональныхъ дробей въ дробяхъ съ квадратными вычленами въ числителе и въ знаменателе	202			
280	Интегрированіе рациональной дроби, если знаменатель ея состоитъ изъ простыхъ множителей	206			
281	Интегрированіе дробей въ дробяхъ съ квадратными вычленами въ знаменателе	210			
282	Интегрированіе дробей въ дробяхъ съ квадратными вычленами въ знаменателе	211			

Интегрированіе функций, содержащихъ радикалы.

283	Интегрированіе функций, содержащихъ радикалы	216			
284	Интегрированіе функций, содержащихъ радикалы	217			
285	Дифференциалъ, заключающій въ себѣ квадратный корень $\sqrt{a+bx+c}$	—			

Интегрированіе бинома.

286	Случай интегрируемости бинома и его преобразованіе подстановкою $a+bx^n=c$	220			
-----	--	-----	--	--	--

Интегрированіе трансцендентныхъ функций.

287	Простейшій случай	221			
-----	-----------------------------	-----	--	--	--

Вычисленіе площадей

271	Площади поверхностей	226			
272	Площадь эллипса	—			
273	Площадь гиперболы	228			
274	Площади кривыхъ	—			
275	Дифференциалъ площади въ координатахъ	230			
276	Дифференциалъ площади въ криволинейныхъ координатахъ	—			
277	Площади поверхностей	231			
278	Случай интегрируемости поверхностей	—			

Выпрямленіе дугъ кривыхъ.

279	Общая формула выпрямленія дугъ кривыхъ въ координатахъ	232			
280	Выпрямленіе дугъ кривыхъ	—			
281	Выпрямленіе дугъ кривыхъ	233			
282	Выпрямленіе дугъ кривыхъ	234			
283	Общая формула выпрямленія дугъ кривыхъ въ координатахъ	236			
284	Выпрямленіе дугъ аркадической спирали	237			

Приблизительное опредѣленіе площадей и точное вычисленіе среднего значенія функций

285	Элементарный способъ	237			
286	Способъ применения среднихъ значений	238			
287	Определеніе среднихъ значений функций	—			
288	Приманіе Спайсона	239			

Вычисленіе объемовъ помощью простыхъ интеграловъ.

289	Объемы тѣлъ вращенія	241			
290	Объемы тѣлъ, образованныхъ вращеніемъ параллельными плоскостями и вставы	242			

§§	стр.	§§	стр.		
Вычисление объемов тѣлъ помощью двойныхъ интеграловъ.		Вычисление величины поверхностей.			
291	Формулы	244	294	Величина поверхности вращения	249
292	Формулы § 291 г) съ другой точкой зрения	246	295	Прямая изогнута на плоскости	250
293	Многоскатные интегралы	247	296	Вычисление площадей поверхностей	251

ГЛАВА III

Интегрирование дифференціальныхъ уравненій.

297.	Опреѣленіе	253	316	Образованіе и направленія	277
298.	Однородные дифференціальныя	254	317	Цилиндрическая поверхность	278
299.	Однородныя уравненія	255	318.	Дифференціальное уравненіе планиметрическихъ поверхностей	279
300.	Уравненіе $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + f\left(\frac{y}{x}\right)$	258	319	Конические поверхности	280
301.	Уравненіе вида $\frac{dy}{dx} + Py = Q$	—	320.	Дифференціальное уравненіе коническихъ поверхностей	281
302.	Условіе интегрируемости полнаго дифференціала	260	321.	Коническая поверхность	—
303.	Интегрируемые множители	261	322.	Плоскости вращения	—
304.	Интегрируемые множители даннаго уравненія существуютъ безконечное множество	263	323.	Развертываніе конической поверхности	282
305.	Геометрическое значеніе дифференціального уравненія и его интеграла	265	324.	Линейныя поверхности	283
306.	Особые интегралы	267	325.	Дифференціальное уравненіе развертывающейся поверхности	—
307.	Линейное уравненіе n -го порядка	268	326.	Огибающія поверхности	284
308.	Линейныя уравненія 2 -го члена	—	327.	Трубчатая поверхность	286
309.	Линейное уравненіе 2 -го члена и съ постоянными коэффициентами	269	328.	Второй способъ образованія развертывающихся поверхностей	—
310.	Замѣчаніе	270	Кривыя поверхностей и линій, лежащихъ на поверхности.		
Дифференціальныя уравненія съ частными производными.			329.	Замѣчаніе	287
311.	Образованіе уравненія съ частными производными	271	330.	Цилиндрическая	—
312.	Дифференціальныя уравненія съ частными производными	272	331.	Кривыя нормальныхъ сѣченій	288
313.	Линейное дифференціальное уравненіе 1-го порядка съ частными производными	273	332.	Заточенность, развитыя кривыя нормальныхъ сѣченій	289
314.	Интегрированіе уравненія $Pp + Qq = R$	275	333.	Опредѣленіе подошвы главныхъ сѣченій	290
Образованіе поверхностей.			334.	Опредѣленіе R и R'	—
315.	Замѣчаніе	277	335.	Линіи кривизны	291
			336.	Кривыя поверхности	292
			337.	Величина кривизны поверхности	293
			338.	Раздѣленіе точекъ поверхности на 4 вида	294
			339.	Аналитическія признаки точекъ различныхъ видовъ	296
			340.	Геометрическая линія	298

Часть III

Основанія рациональной механики.

Вступленіе.

§§	стр.	§§	стр.	
1.	Очеркъ высшей науки	299	341. Положеніе механики между математикою и опытными науками	300
2.	Науки сходныхъ съ механикою въ началѣ	300	342. Основные законы Ньютона	301

ГЛАВА I.

Механика точки.

340.	Уравненіе движенія точки	301	366. Равнообразное движеніе точки по окружности	320
347.	Равнообразное прямолинейное движеніе точки	302	367. Общее свойство центральныхъ движеній	322
348.	Прямолинейное движеніе съ переменною скоростью	303	368. Законъ площадей	323
349.	Уравненіе криволинейнаго движенія	304	369. Скорость центрального движенія въ полярныхъ координатахъ	324
350.	Уравненія попятія r и φ	305	370. Сила, производящая центральное движеніе	325
351.	Сила	—	371. Законъ площадей характеризуетъ движеніе	326
352.	Масса	306	372. Вызванъ ликогда равномерное вращеніе въ движеніи планетъ	328
353.	Центръ тяжести точки	—	<i>Классификація задачъ</i>	
354.	Работа	308	373. Элементарная работа силы	329
355.	Живая сила	309	374. Теорема о количествѣ движенія	—
356.	Интегралъ живыхъ силъ	—	Движеніе несвободной точки	
357.	Количество движения	310	375. Несвободная сила	330
358.	Центръ тяжести брошенной шары	—	376. Движеніе точки на поверхности	—
359.	Позиционы Фульды	312	377. Движеніе точки на дугѣ	331
360.	Законъ сохранения живой силы	—	378. Начало Галамъера	334
361.	Законъ сохранения энергии	313	379. Движеніе движущейся точки на поверхности, по которой она движется	335
362.	Свободная точка	314		
Криволинейное движеніе точки.				
363.	Скорость и криволинейное движеніе	314		
364.	Ускореніе при криволинейномъ движеніи	316		
365.	Движеніе тяжелой точки, брошенной наклонно къ горизонту	317		

ГЛАВА II.

Механика системы.

Движеніе системы точекъ.				
380.	Система	335	388. Центръ инерціи	343
381.	Связи	336	389. Начало движенія центра инерціи	343
382.	Уравненія Лагранжа	—	390. Начало сохранения живой силы	346
383.	Возможныя перемѣщенія	337	391. Работа системы	347
384.	Общее уравненіе механики	338	392. Интегралъ живыхъ силъ	348
385.	Аналитическая механика	—	393. Разница попятія «работа» и «мощность»	349
386.	Потенциальная функция	339	394. Законъ сохранения энергии	—
387.	Общее уравненіе механики въ случаѣ существованія U	342	395. Законъ сохранения площадей	350
			396. Независимая плоскость	351
			397. Начало возможныхъ перемѣщеній	352

§§	стр.	§§	стр.
398. Лагранжевы множители	355	404. Вращение твердого тѣла около оси	366
399. Математическій маятникъ	357	405. Сложный маятникъ	367
400. Вращение твердаго тѣла около неподвижной оси	360	406. Циклы качания	369
401. Моментъ инерціи	361	407. Циклоидальный маятникъ	370
402. Моментъ инерціи параллелоипеда	363	408. Брахистохрона	—
403. Сравнение моментовъ инерціи относительно параллельныхъ осей	365	409. Равновѣсѣ жидк. числ. случаевъ дв. жидк.	371
		410. О двѣхъ равн. влн. жидк.	

ГЛАВА III.

Теорія притяженія.

411. Ньютоновое приращеніе	372	419. Осевая система координатъ	382
412. Притяженія притяженій за оси координатъ	—	420. Свѣтъ въ дѣйств. средѣ	—
413. Притяженіе сферическаго шара въ ка- вальной точкѣ	374	421. Сферическая линза	383
414. Притяженіе шара въ внутренней точкѣ	376	422. Изображенія урнъ	—
415. Притяженіе точки, лежащей внутри сфе- рическаго слоя, втѣхъ плоскостяхъ	377	423. Случай одной притягивающей точки	—
416. Потенціалъ	378	424. Сферическая трубка	384
417. Уравненія Лагранжа	379	425. Плоская линза	—
418. Уравненія Пуассона	380	426. Теорема Гаусса	386
		427. Свойства сферической трубки	386
		428. Теорема о центробежной силѣ	387
		429. Теорема Гривия	389

ГЛАВА IV.

Гидростатика.

430. Опредѣленіе	391	433. Поверхности уровни	393
431. Уравненія равновѣсія жидк.	—	434. Шаръ съ полн. ил. сфер. (сферическ. гидростат. плоск.)	394
432. Уравненія равновѣсія жидк.	393		

ГЛАВА V.

Гидродинамика.

435. Уравненія гидродинамики	395	437. Уравновѣшенія вихрей	397
436. Уравненія нежимаемыхъ жидк.	396	438. Теорема Бернулли	398

Часть IV.

Бѣглый обзоръ общаго строя математическихъ наукъ.

ГЛАВА I.

Обзоръ.

439. Вступленіе	399	444. Элементарныя функции	404
440. Теорія чиселъ	400	445. Сферическія функции	405
441. Высшая Алгебра	402	446. Вариационное исчисленіе	406
442. Теорія конечныхъ разностей	403	447. Группы преобразованій	—
443. Общая теорія функций	404		
		<i>В. Геометрія.</i>	
		448. Элементарная геометрія въ тригонометріи	407

§§	стр.	§§	стр.		
449	Сферическая тригонометрия	407	450. Теория аэродинамики	414	
450	Аналитическая геометрия	408	457	Аналитическая механика	415
451	Геометрия подобия	—	458	Теоретическая механика	—
452	Неевклидова геометрия	410	459	Практическая механика	416
453	Нечисловые подстановки	411	460	Математическая физика	417
454	Начальная геометрия	412	461.	Астрономия	—
455.	Дифференциальная геометрия	414			

ГЛАВА II.

Литература по чистой математикѣ.

462	Теория чисел	417	472	Аналитическая геометрия	420
463	Высшая алгебра	—	473	Геометрия подобия	421
464	Теория конечных разностей	418	474	Высшая геометрия	—
465.	Анализ	—	475.	Неевклидовы геометрии	—
466.	Основы теории функций	419	476	Многочлены	422
467	Аналитическая функция	—	477	Нечисловые подстановки	—
468	Сферическая функция	420	478	Кватернионы	—
469	Вариационное исчисление	—	479	Начертательная геометрия	—
470	Теория групп преобразований	—	480	Дифференциальная геометрия	—
471	Сферическая тригонометрия	—	481	Теория аэродинамики	—

Литература по прикладной математикѣ.

482	Аналитическая и теоретическая механика	423	486.	Гидравлика	425
483	Теория упругости	424	487.	Теория механизмов	—
484.	Графическая статика	—	488	Термодинамика	—
485.	Сопротивление материалов	—	489.	Общая механика по прикладной механикѣ	—

Литература по математической физикѣ.

490.	Термодинамика	425	490.	Оптика	425
—	Электричество	—	—	Общая механика	—

Литература по астрономіи.

491	Сферическая астрономия и поправки	427	491	Определение орбиты	427
—	Геодезия	—	—	Небесная механика	—
—	Определение географических широт	—			

Задачи.

Аналитическая Геометрія на плоскости	426
Аналитическая Геометрія въ пространствахъ	433
Дифференциальное исчисление	434
Интегральное исчисление	440
Интерпретация уравнения	442
Механика	442

Рѣшенія задачъ

ср.

444

Добавленія.

I. О минимомъ пересѣченномъ	475
II. О вихревомъ движеніи	479
III. Системы принятыхъ теперь въ науки единицъ	480
Алфавитный указатель	481

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Математическій методъ, какъ самое вѣрное орудіе человѣческой мысли, усвоивается, мало-по-малу, науками — стоящими когда-то въ сторонѣ отъ математики. Въ теченіе XIX вѣ столѣтія завершилась окончательное подчиненіе Астроломіи и Физики математическому анализу. Въ теченіе именно этого замѣчательнаго столѣтія Гамильтонъ, при помощи математической теоріи свѣта, предугадывалъ явленіе конической рефракціи, существованіе которой являло въяселіи опытно подтвержденное; Деверье, имѣя тереть глазами голыя листы, написанныя формулами, открылъ планету «Нептунъ» и даже не могъ лично приступить къ работѣ своего открытія излюбоженіемъ, потому что въ это время Парижское небо было покрыто облаками, такъ что уже другіе астрономы, которыхъ Деверье оповѣстилъ о своемъ открытіи, увидѣли Нептуна въ свои телескопы. Наконецъ Максвелль, создавъ электромагнитную теорію свѣта, математически укрѣпъ тождество свѣловыхъ и электрическихъ колебаній, блестяще подтвержденное опытами Герца. Въ рукахъ такихъ ученыхъ, какъ Гамильтонъ, Клаузиусъ, Максвелль, Гельмгольцъ, Кирхгофъ и Томсонъ, математика такъ ярко освѣщала путь физикѣ, что и въ другихъ наукахъ появилось стремленіе идти впередъ при ея вѣрномъ свѣтѣ. Но всеръ лишь естественныхъ наукъ и даже въ наукахъ социальныхъ, это стремленіе отъразилось настолько сильными и подчиненіе математическому анализу настолько быстрыми, что уже и теперь незнакомы съ внешнею математикою химикъ не въ состояніи читать въкоторыхъ выдающихся сочиненій по химіи потому только что они изобилуютъ математическими формулами, и уже въ дальнѣе то время, когда въ такомъ же положеніи оказываются анатомисты, медики и даже социологи.

Приведу одинъ примѣръ: еще недавно биология была совсѣмъ независима отъ математики. Между тѣмъ, въ послѣдніе два года, работы нашихъ извѣстныхъ русскихъ ученыхъ (ботаниковъ К. А. Тимирязева и Е. Ф. Вогчага и математика П. Е. Жуковского) показывали, что понятіе

собирает в разложениях происходит по закону, выражаемому тем же самым дифференциальным уравнением, которым выражается распространение тепла в твердом теле.

Может быть, учащаяся на естественном отделении физика математического факультета, на медицинском факультете и во многих агрономических университетах, как только начинает предвзвешивать самостоятельными занятиями, все чаще и чаще встречается с необходимостью усвоения главнейших методов высшей математики. Из моей педагогической практики в Ново-Алчевском Институте Сельского Хозяйства и Лесоводства могу привести даже такой пример, где видна то статистическая посылка, приводящая к тому, что студент должен был обратиться к самостоятельному ознакомлению с теорией вероятностей и анализом, а затем уже сама алгебра математика. Мне пришлось не раз давать советы таким молодым людям относительно избрания кратчайших путей для ознакомления с математическими методами и приходить к убеждению, что эти кратчайшие пути еще весьма слабо намечены. Встречаются затруднения даже при теоретическом характере на первых же страницах аналитической геометрии вследствие встречаемости с непонятными для него терминами или, наоборот, начинают вклиниться разъяснений в курсах анализа, во эти курсы представлять как бы знакомство с аналитической геометрией. Самые курсы выписаны для одушевленных математиков и публикуются и потому представляются затруднения для «читателя со стороны», который однако притянуть своего же внимания к необходимости изучения математики. Мне случилось видеть, что человек, не привыкший к математическим отвлечениям и не имевший еще опыта представления о кривых, 2-го порядка, узнавая в своем исследовании о кривых, которое в лучших курсах представляется детальному их изучению. Полные курсы не могут пойти на уступки в порядке размещения материала стремись для сохранения стройности идти от общего к частному дабы это и естественно духу аналитической геометрии, а «посторонний» читатель именно в этом ходе изложения и встречается затруднения. Цель настоящего руководства и заключается именно в том, чтобы послужить помощью и первым путеводителем во высшей математике для таких «посторонних» людей. Желание же автора заключается в том, чтобы «посторонний» читатель сдвинулся мало-помалу для математики «своим», полюбил бы эту науку и занялся бы ею серьезно. Для перехода от на тонких руководства к более серьезному изучению изучи и и составил, в части IV-ой, особый обзор математических наук и литературу.

Здесь я считаю несправедливым своим долгом заменить «что и есть беглый обзор», составивший I-ую главу IV-й части настоящего руководства, и приведенная литература не претендует на полноту и точность. Составить стройный обзор всей области математических знаний, и дать литературу хотя бы только важнейших сочинений по математике — это дело таких фундаментальных коллективных трудов, составленных несколькими специалистами, как математическая энциклопедия Бурхардта и Мейера. И следую только правилу, «лучшее не только быть врагом и обидчиком» и помещаю IV-ую часть во введение, что она, при всей ее неопытности, поможет читателю найти, по которым он может идти дальше. Проще только видеть в IV-ой части настоящего руководства простое создание путей для дальнейшего математического самообразования, и не склеивать из нее вкратце картины или даже абриса всей нашей Науки, а только — ее судить о величии и важности ее отрывков по величине соответствующего текста части IV-ой. Нахожу необходимым выразиться еще прямо: на отрывах больше мне близких и останавливаясь подробнее.

Это замечание напоминает мне об обязанности просить снисхождения от тех, кто любит математику, привыкших стремиться к возможно большей точности и строгости доказательства. В бесладах с начинающими очень трудно держать знамя строгости доказательства над той же высотой, как в более глубоких трактатах. Мени, в этом отношении ободрились слова Ф. Кюппа, который находил даже нецелесообразным давать начинающим главы, выдержанные в строгий стиль, руководства Альфреда Нивера и Жюльена. В самой истории нашей Науки новые описания появились не по всоружии точности и строгости подобно Дюни и де Гольму Юнгера, и только постепенно выдержались более глубокой разработкой. Начиная только знаются в многостраничных совершенно строгих определений и доказательствах.

С другой стороны нельзя также предписывать «восторженному» идти мелкими шагами да это у него не хватит ни времени, ни охоты. Поэтому я решил вести своего читателя быстро и на довольно значительные высоты. Эта быстрая походка, требуемая самой целью настоящего руководства, заставила меня, например, в механике не стесняться подразделять ее на статику, кинематику и динамику. Я бы предпочел, чтобы мой читатель увидел в статике и механике то единое целое, которое так ясно усматривается в истории развития науки со времени Ньютона и чтобы механика представлялась ему высказывающей пять законов Ньютона. Поэтому я решил вести читателя быстро на высоты общих теорем и уравнений механики — оставив статику совсем в стороне (кроме теории приращений).

со статиком читатель и самъ справится, если она представится ему не сочиненныхъ по его специальности. Моя цель была — отучить его отъ боязни интеграловъ и дифференциальныхъ уравненій. Это же послужило причиною боябе продолжительной остановки на теории притяженія по ея аналогіямъ со многими отдѣлами физики и такъ на пути, изобилующемъ многообразными интегралами.

Предупреждаю, однако, читателя, что въ настоящемъ руководствѣ изъ механики выбраны только общія ся теоремы и что въ подробныхъ руководствахъ онъ найдетъ цѣлыя области, оставленныя мною въ сторону, и множество конкретныхъ примѣровъ. Гидростатика и гидродинамика мною едва задѣты.

И буду счастливъ, если замѣчания моихъ почтенныхъ коллегъ дадутъ мнѣ возможность улучшить современное по руководство.



ВВЕДЕНИЕ.

В настоящем введении мы напомним некоторыя формулы алгебры, геометрии и тригонометрии и познакоимъ читателя съ некоторыми понятіями высшей алгебры.

1) Величина пропорциональная переменной величинѣ x можетъ быть представлена въ видѣ произведения mx , гдѣ m постоянный множитель m . Действительно, если x увеличится вдвое, то и mx увеличится вдвое. Вообще, если x увеличится или уменьшится въ a разъ, то и mx увеличится или уменьшится въ a разъ. Постоянная величина m называется въ этомъ случаѣ коэффициентомъ пропорциональности. Итакъ,

mx = величина пропорциональная переменной величинѣ x .

2) Изъ $n + 1$ уравненій можно исключить n заключающихся въ нихъ неизвѣстныхъ.

3) Для опредѣленія n неизвѣстныхъ, требуется n уравненій.

4) Квадратное уравненіе $x^2 + px + q = 0$ имѣетъ два корня (рѣшенія)

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

5) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

6) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

7) Намъ понадобится формула бинама Ньютона

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}b^3 + \dots + ma b^{m-1} + b^m.$$

8) Дробные показатели: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

9) Отрицательные показатели: $\frac{1}{a} = a^{-1}$; $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$.

10) Величина a есть среднепропорциональная между m и n , если

$$\frac{m}{a} = \frac{a}{n}$$

откуда: $a^2 = mn$ или: $a = \sqrt{mn}$.

Итак, средне пропорциональная между m и n равна \sqrt{mn} .

11) Теорема Пифагора: два квадрата гипотенуз — суммы квадратов катетов.

12) Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу = средне пропорциональная между отрезками гипотенузы

13) Катет = средне-пропорциональная между гипотенузой и прилежащим отрезком.

14) Тригонометрические формулы:

$$\sin(90 - \varphi) = \cos \varphi;$$

$$\sin(180 - \varphi) = \sin \varphi.$$

$$\cos(90 - \varphi) = \sin \varphi;$$

$$\cos(180 - \varphi) = -\cos \varphi.$$

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1;$$

$$\operatorname{tg}(90 - \varphi) = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\sin(2\varphi) = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b.$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b.$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b.$$

Handwritten notes on the left margin:
 $\frac{a}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{a}{2}}$
 $\frac{a}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{a}{2}}$
 (1.4.2.1) 25

По сторонам a , b и углу φ , заключенному между ними, площадь треугольника определяется формулой:

$$\frac{ab \cdot \sin \varphi}{2}$$

Если a , b , c суть стороны треугольника φ угол, заключенный между a и b , то:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi.$$

15) Всякое уравнение m -ой степени может быть представлено в виде:

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \dots (x - k)(x - l) = 0,$$

Где a , b , c , d , ..., k , l суть корни (решения) уравнения. Действительно, если x равняется одному из этих корней, то левая часть уравнения обращается в нуль, и уравнение данным образом удовлетворяется. Например, при $x = b$, получим:

$$(b - a)(b - b)(b - c)(b - d) \dots (b - k)(b - l) = 0$$

или

$$(b - a) \cdot 0 \cdot (b - c) \cdot (b - d) \dots (b - k)(b - l) = 0.$$

Здесь, в числе множителей левой части находится нуль, следовательно, вся левая часть равна нулю, уравнение обращается в *тождество*.

16) Когда мы ищем уравнение в данном виде, левая часть, содержащая x , равна нулю, то мы *требуем* такое x , при котором левая часть обращается бы в нуль. В тождестве левая часть *сама по себе* равна нулю. Например, если имеем уравнение

$$x - 2 = 0,$$

то мы потребуем такое x , при котором это уравнение удовлетворилось бы. Такое x будет 2, и только при $x = 2$ это уравнение удовлетворится. Тождество же всегда удовлетворено, например, всегда:

$$x^2 - 9 = 0$$

или

$$(a + b)^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = 0$$

или

$$x^3 - x \cdot x = 0.$$

Уравнение обращается в тождество, если вместо неизвестного подставим одно из его корней. Например, уравнение $x - 2 = 0$ обращается в тождество $2 - 2 = 0$ если вместо x подставим его корень (решение) 2.

17) Из вышесказанного можно вывести, что всякое уравнение m -ой степени имеет m корней.

18) Выражение:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m$$

называется целым алгебраическою функциею

Такъ какъ уравненіи m -ой степени имѣть m корней, то написанная выше дѣлая алгебраическая функція можетъ быть представлена въ видѣ

$$A_0(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k)(x-l),$$

гдѣ $a, b, c \dots$ суть корни уравненія

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_{m-1}x + Am = 0.$$

Напримѣръ $x^2 + px + q$ можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\left[x - \left(\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right) \right] \left[x - \left(\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right) \right].$$

Возьмемъ еще примѣръ: два алгебраическая функція

$$x^2 - 7x + 10;$$

чтобы представить ее въ видѣ множителей, рѣшимъ уравненіе

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Получимъ $x_1 = 2, x_2 = 5$. Следовательно, данную функцію можно представить въ видѣ:

$$(x - 2)(x - 5).$$

Для того, чтобы проверить этотъ выводъ, раскроемъ скобки въ последнемъ выраженіи; получимъ:

$$x^2 - 2x - 5x + 10$$

или

$$x^2 - 7x + 10$$

именно данная функція.

19) Если уравненіе имѣть мнимый корень виде $a + b\sqrt{-1}$, то оно должно имѣть и сопряженный ему корень $a - b\sqrt{-1}$.

Часть I.

Основанія Аналитической Геометрии.

ГЛАВА I.

Аналитическая Геометрія на плоскости.

Приемы Аналитической Геометрии.

Характеръ Аналитической Геометрии.

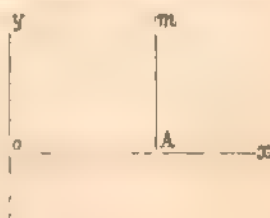
§ 1. Алгебраическій способъ применяется и въ элементарной геометрии при выводѣ различныхъ геометрическихъ формулъ, но тамъ эти формулы служатъ только для опредѣленія величинъ (длины, площади, объема, углы и проч.) и не показываютъ вида линий и поверхностей.

Знаменитый французскій философъ Декартъ (Descartes, по латыни Cartesius), (1596—1650) оказалъ огромную услугу человечеству и изображеніемъ Аналитической Геометрии, которая устанавливаетъ такую тѣсную связь между Алгеброю и Геометріею, что всякая линия или поверхность выражается *уравненіемъ*, вполне характеризующимъ всѣ свойства выражаемой имъ геометрической формы (то есть линии или поверхности).

Опредѣленіе положенія точки.

§ 2. Положеніе точки на плоскости вполне опредѣляется разстояніями этой точки отъ двухъ данныхъ перпендикулярныхъ между собою прямыхъ, если сказано по какую сторону отъ каждой изъ этихъ прямыхъ она находится.

Дѣйствительно, если даны на плоскости (фиг. 1) двѣ перпендикулярныя между собою прямыя ox и oy и сказано, что точка m находится на разстояніи 18 миллиметровъ отъ прямой ox , по ту ея сторону, гдѣ поставлена буква y , и на разстояніи 20 миллиметровъ отъ прямой oy , по ту ея сторону, гдѣ поставлена буква x , то мы найдемъ эту точку, откладывая $OA = 20$ мм. возставляя изъ A къ прямой ox перпендикуляръ и



Фиг. 1

отложив на немъ $Am = 18$ мм. Подобнымъ образомъ определяется по-ложение географическихъ мѣстъ по долготѣ, считываемой по экватору и широтѣ, считываемой по меридіану.

Прямоугольныя прямолинейныя координаты.

§ 3. Даныя перпендикулярныя между собою прямыя ox и oy (фиг. 1) называются *осями координатъ*, o называется *осью абсциссъ*, oy *осью ординатъ*. Пересѣченіе o осей координатъ называется *началомъ*. Расстоянія, отсчитываемыя по оси абсциссъ, такъ же какъ въ примѣрѣ § 2-го расстояние OA называются *абсциссами*. Расстоянія, отсчитываемыя по перпендикулярнымъ оси абсциссъ, называются *ординатами*. Абсциссы обозначаются буквою x , ординаты буквою y . Такъ что (фиг. 1) для точки m :

$$OA = x$$

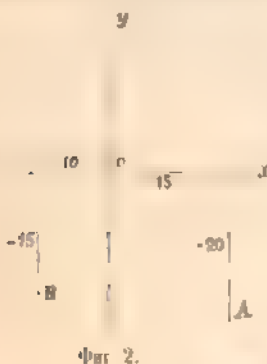
$$Am = y.$$

Величины x и y , соответствующія точкѣ m , называются *координатами* этой точки.

Линейная единица, которою измѣряются координаты, выбирается произвольно. Въ примѣрѣ § 2-го за линейную единицу приняты миллиметры.

Отрицательныя координаты.

§ 4. Абсциссы считаются положительными по одну сторону отъ начала и отрицательными по другую его сторону. Точно также и ординаты считаются положительными по одну сторону оси исковъ и отрицательными по другой ее сторону. Поэтому, напримеръ, координаты точки A (фиг. 2) суть:



Фиг. 2.

$x = 15$
 $y = -20$
 координаты точки B суть:
 $x = -10$
 $y = -15$.

Обозначенія точекъ.

§ 5. Точка, абсциссы которой равны a и ординаты равны b , обозначается такъ (a, b) . Напримеръ точка m въ § 2-мъ можетъ быть обозначена такъ $(20, 18)$, точки A и B въ § 4-мъ можно обозначить такъ $(15, -20)$ и $(-10, -15)$. Въ томъ обозначеніи въ скобкахъ пишется сначала абсцисса, потомъ занятая и слѣдующая ордината.

Опредѣленіе линий уравненіями.

§ 6. Если даны два уравненія съ двумя переменными, скажемъ говорить въ элементарной Алгебрѣ съ двумя независимыми, то изъ нихъ можно

представить оба неизвестных. Следовательно, если под x и y разумеются координаты точки t , двумя уравнениями с переменными x и y определяется положение точки. Например, если даны уравнения:

$$5x + 4y = 23$$

$$3x + y = 11,$$

то получим $x = 3$, $y = 2$. Следовательно, совокупность данных, в этом примере уравнений определяет точку (3, 2).

Рассмотрим теперь, какое значение имеет для уравнение с двумя переменными. Возьмем, например, уравнение

$$ax + by = c.$$

Определив из этого уравнения y через x , получим:

$$y = \frac{c - ax}{b} \dots \dots \dots (1)$$

Стоящий направо послед. ряд точек знак (1) обозначает формулу *сервис*; так же знаки ставятся, чтобы можно было удобнее ссылаться на приводимая формулы.

Каждому значению x формула (1) дает вполне определенное значение для y . Например:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 & \text{ получим } y = \frac{c}{b} \\ \text{» } x = 1 & \text{ » } y = \frac{c - a}{b} \\ \text{» } x = 2 & \text{ » } y = \frac{c - 2a}{b} \\ \text{» } x = \frac{7}{2} & \text{ » } y = \frac{c - \frac{7}{2}a}{b} \end{aligned}$$

Если мы изменили x скажем сразу после нуля давали ему значение 1, после чего сразу перескакивали на 2, не проходя дробей, заключенных в промежуток между 1 и 2.

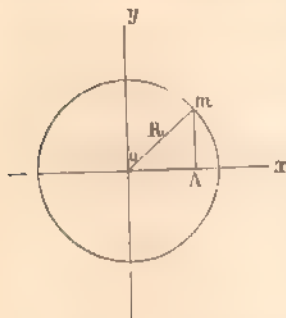
Но если бы x изменялось непрерывно, то и y изменялось бы непрерывно и встала бы каждому значению переменной x соответствовало бы определенное значение y ; для каждой абсциссы x находилась бы соответствующая ордината y , каждая такая пара этих координат определяла бы точку лежащую на линии ординаты. Но при непрерывном изменении x и y , эта точка описывает непрерывную линию. Координаты каждой точки этой линии непрерывно будут удовлетворять уравнению (1), так как они из него и получаются. Следовательно, уравнение (1) выражает собой линию очерченную кривою ординаты, определяемой из уравнения (1) по непрерывно изменяемым значениям x .

Итакъ, если принять переменныя x и y за координаты точки, то *одно уравнение съ двумя переменными представляетъ собою линию* (справу или кривую). Два уравнения съ двумя переменными представляютъ собою двѣ линии. Если ихъ, получимъ координаты точки пересѣченія этихъ линий то есть той точки, которая лежитъ какъ на одной изъ этихъ линий, такъ и на другой и координаты которой удовлетворяютъ слѣдовательно уравненіямъ обѣихъ линий.

Наоборотъ, если данъ законъ образованія какой-нибудь линии, то она можетъ быть выражена уравненіемъ съ двумя переменными. Покажемъ это на примѣрѣ въ слѣдующемъ параграфѣ.

Уравненіе окружности, описанной изъ начала координатъ радіусомъ R .

§ 7. Найдемъ уравненіе окружности, центръ которой находится въ началѣ и радіусъ равенъ R (фиг. 3). Возьмемъ какую-нибудь точку m на этой окружности и определимъ зависимость между координатами этой точки, основываясь на законѣ образованія окружности. Этотъ законъ состоитъ въ томъ, что все точки окружности лежатъ на одинаковомъ разстояніи R отъ центра. Изъ треугольника OmA видно, что разстояніе точки m отъ начала системы принятаго за центръ) определяется по координатамъ x, y формулою (квадратъ гипотенузуг



Фиг. 3.

$$om^2 = x^2 + y^2.$$

Все точки окружности находится на такомъ же разстояніи отъ центра, и тако, что оно равно R . Следовательно, для всехъ точекъ окружности:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

это и есть уравненіе данной окружности.

Линіи законѣрныя и незаконѣрныя.

§ 8. Однако уравненіями могутъ быть съ полносью выражаемы не всякія линіи, а только тѣ, для которыхъ имѣется законъ образованія (основныя геометрическія свойства). Мы будемъ называть такія линіи *законѣрными*. Линіи же какъ бы то ни было произвольныя начерченныя могутъ быть, какъ мы увидимъ въ слѣдствіи, выражены уравненіями лишь съ тѣмъ, которовъ степенью приближенія. Геометрія имѣетъ дѣло, главнымъ образомъ, съ линіями законѣрными.

Общій приемъ нахождения уравненій законѣрныхъ линій.

§ 9. Общій приемъ нахождения уравненія законѣрной линіи именно таковъ, какой былъ примѣненъ въ § 7-омъ. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ: берутъ (воображаютъ) на заданной линіи произвольную точку и стараются,

випному стику образваннн этой лннн, наити соотношенне между ея ординатами. Выраженное въ формѣ уравненн, это соотношенне, будучи правднвымъ для всѣхъ точекъ лннн, и оудеть ея уравненнемъ.

Начертнть лннню по данному ея уравненню.

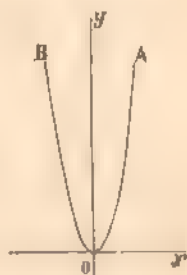
§ 10. Покажемъ на примѣрѣ, какъ вычерчивается лннн по данному я уравненню. Начертнмъ лннню, уравненне которой таково:

$$y = x^2.$$

Общнй прнемъ рѣшенн такой задачи состоитъ въ томъ, что дають нѣ сколько произвольныхъ значенн одному изъ переменныхъ и опредѣляютъ, по данному уравненню, соотвѣтственные имъ значенн другого переменнаго. Каждой парѣ такихъ значенн опредѣляетъ точку. По расположенню найденныхъ такимъ путемъ нѣсколькихъ точекъ (чѣмъ больше ихъ найдено, тѣмъ лучше) судятъ о формѣ лннн.

Прнмемъ за лннейную едннцу мнллнметръ, если бы выразнли за лннейную едннцу метръ, то размѣры крнвогъ вышн бы болыше, но форма ея получнлась бы та же. Начертнмъ оубо, О оси координатъ. Изъ даннаго уравненн $y = x^2$ вндимъ, что:

при $x = 0$	ордината $y = 0$
» $x = 1$	» $y = 1$
» $x = 2$	» $y = 4$
» $x = 3$	» $y = 9$
» $x = 4$	» $y = 16$.



Фнг. 4.

Стрнмъ точки (0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16). Соедннн ихъ прямыми между собою послѣдовательно, мы получнмъ бы ломаную лннню, похожую на вѣсьмую лннню; но лучше соединнть точки между собою «на глазъ» или въ *течку*. Лѣчкой называется лннейная, вырѣзанная узорчато по вѣсьмамъ различнымъ крнвымъ и употреблемая какъ линейка. Попытками находнтъ такое положенне лѣчки, при которомъ три, или болые нѣхъ найденныхъ точекъ находнтся въ край лѣчки, и ихъ соединнють лннейно, ведн въ край лѣчки карандашъ или реберо дѣръ, котормъ слѣдующую группу точекъ соединнють съ концомъ уже начертенной части, и такъ далѣе. Въ данномъ случаѣ замѣчаемъ, что значенне ординаты y не зависитъ отъ знака стоящаго при x такъ, что при $x = 3$ ордината $y = 9$, точно такъ же какъ и при $x = -3$. Следовательно, каждой точкѣ вида (a, b) будетъ соотвѣтствовать другая, тоже принадлежашая целому крнвогъ точка вида $(-a, b)$. Итакъ, противъ каждой изъ опредѣленныхъ уже точекъ, лежащихъ по одну сторону оси y , оудеть находнтся симметричная ей точка по другую сторону оси y . Значнтъ искомая лннн кромѣ найденной части OA содержитъ еще симметричную ей, относительно оси y , часть OB . Обѣ эти части простираются въ безконечность, потому что,

при безграничном увеличении x , ордината y , как видно из данного уравнения, тоже безгранично увеличивается. Вся линия лежит только по одну сторону оси x , потому что y является отрицательным в том только случае, если x мнимое.

Итак, линия может быть построена по данному уравнению путем внесения на чертеж отдельных ее точек, координаты которых определяются, если давать одному из переменных произвольные значения и по ним определять по данному уравнению, соответствующий значению другого переменного.

Отсюда уже видно, что эти линии а следовательно и все их геометрические свойства вполне определяются их уравнением. Заменяя Аналитическую Геометрию, можно друг другу себя видеть в уравнениях линии, или выражениях. Значит Аналитическую Геометрию как только ему дадут уравнение параграфа 7-го:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

уже утвердить, что это уравнение представляет собою окружность описанную радиусом R из начала. Настоящий знаток может даже и не чертить чертежи и решать все геометрические задачи, имея среди прочих только уравнения исследуемых линий.

Прямая линия.

Уравнение прямой, проходящей через начало.

§ 11. Определим уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей угол φ с осью x осью абсциссы. Возьмем в данной прямой произвольную точку m (фиг. 5) и проведем ее ординату Am . Из треугольника OAm имеем:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

Это уравнение верно для координат всякой точки данной прямой, и только для точек, лежащих на этой прямой. Следовательно, это некое уравнение прямой.

Отсюда видно, что всякое уравнение вида:

$$y = kx, \quad (4)$$

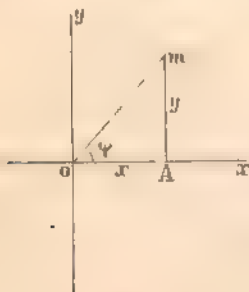
где k есть величина постоянная, выражает собою прямую, проходящую через начало

и составляющую с осью x такой угол φ , тангенс которого равен k .

Так например уравнение:

$$y = x, \quad (5)$$

есть возможно назвать и так: $y = 1 \cdot x$ есть уравнение прямой, проходящей через начало и составляющей с осью x угол в 45° , так как $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.



Фиг. 5.

Угол φ составляемый прямою съ осью абсцисс x , называется *углом наклона* прямой.

Уравнение прямой определяемой угломъ наклона и отрезкомъ, образуемымъ ею на оси ординатъ.

§ 12. Пусть намъ дана уголъ наклона φ прямой и расстояние b , которое она отсекаетъ отъ начала въ отрицательной области оси ординатъ (фиг. 6), решимъ уравнение этой прямой. Возьмемъ на прямой точку m примемъ ея ординату Am и проведемъ прямую параллельную оси абсцисс въ точку B пересечения данной прямой съ осью y . Изъ прямоугольнаго треугольника mBd

имемъ,

$$y - b = x \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

откуда:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \varphi + b \quad \dots (6)$$

Это и есть искомое уравнение прямой.

Отсюда видно, что вообще всякое уравнение вида:

$$y = kx + b \quad \dots (7)$$

представляетъ собою прямую пересекающую ось y на расстоянии b отъ начала и составляющую съ осью x уголъ, тангенсъ котораго равенъ k .

Напримѣръ, уравненіе

$$y = x - 10$$

представляетъ собою прямую пересекающую ось y на расстоянии 10 отъ начала и наклоненную къ оси x подъ угломъ въ 45° .

Частные виды уравненія (7).

§ 13. Если въ уравненіи (7) положимъ $b = 0$, то оно обратится въ уравненіе (1). Такъ и должно быть, потому что прямая, проходящая чрезъ начало все равно что прямая, пересекающая ось y на расстоянии $ничего$ отъ начала.

Если положимъ въ уравненіи (7) $k = 0$, получимъ уравненіе

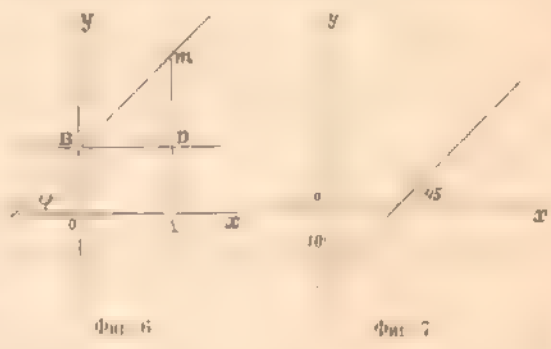
$$y = b \quad \dots \dots \dots (8)$$

т. е. k есть тангенсъ угла наклоненія, если тангенсъ $= 0$, то и уголъ $= 0$. Значитъ уравненіе (8) выражаетъ прямую параллельную оси x и отстоящую отъ нея на расстоянии b .

Длины отъ начала до ординаты такой прямой (фиг. 8) равны одной и той же величинѣ b .

Точно такъ же уравненіе

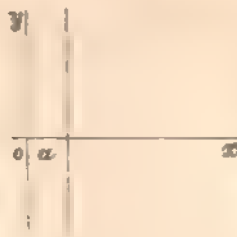
$$x = a \quad \dots \dots \dots (9)$$



выражаетъ *прямую параллельную оси y* и отстоящую отъ нея на разстояніи *a*.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Уравненіе
 $x = 0 \dots \dots (10)$

выражаетъ, слѣдовательно, прямую параллельную оси *y* и отстоящую отъ нея на разстояніи *нуль*, то есть *самую ось y*.

Точно такъ же уравненіе *оси x* будетъ:

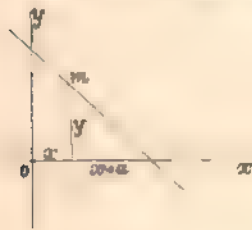
$$y = 0 \dots \dots (11)$$

Все это частные случаи уравненія (7). Напримеръ уравненіе (11) получается изъ уравненія (7), полагая въ немъ: $k = b = 0$ то есть оно равносильно такому:

$$y = 0 \cdot x + 0.$$

Уравненіе прямой, опредѣляемой отрезками, образуемыми ею на осяхъ.

§ 14. Если сказано, что прямая (фиг. 10) пересѣкаетъ ось *x* на разстояніи *a* отъ начала и ось *y* на разстояніи *b* отъ начала, то этимъ прямой вислѣль опредѣлена. Выведемъ ея уравненіе. Изъ подобія треугольниковъ имѣемъ:



Фиг. 10.

$$\frac{y}{a-x} = \frac{b}{a}.$$

откуда

$$ay = ab - bx.$$

Для все последнее уравненіе исключимъ его изъ ab получимъ искомае уравненіе въ легкой запоминаемой формѣ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \dots \dots (12)$$

Оно можетъ быть написано также въ видѣ:

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

похожемъ на уравненіе (7).

Порядокъ уравненія.

§ 15. *Порядкомъ* одночлена по отношенію къ заключающимся въ немъ переменнымъ называется *сумма показателей этихъ переменныхъ*. Такъ напримеръ, одночлены ax^2 , by^3 , c^2xy^2 , a^2x^2y суть третьяго порядка, одночлены же ax^2 , b^2xy , cy^2 суть втораго порядка.

Порядкомъ уравненія называется наибольшій изъ порядковъ его членовъ. Напримѣръ уравненія:

$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax = 0$$

суть перваго порядка. Уравненія же:

$$Ax + By^2 + C = 0$$

$$Axy + B = 0$$

суть втораго порядка.

Всякое уравненіе 1-го порядка выражаетъ прямую.

§ 16. Докажемъ весьма важную теорему, что *всякое уравненіе 1-го порядка выражаетъ прямую*.

Для этого докажемъ, что уравненіе 1-го порядка самаго общаго вида

$$Ax + By + C = 0 \dots \dots \dots (13)$$

можетъ быть приведено къ виду уравненія (7), отъ сего и котораго извѣстно, что оно выражаетъ прямую.

Уравненіе (13) можетъ быть послѣдовательно преобразовано въ слѣдующія формы:

$$By = -Ax - C$$

$$y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$$

т. е. въ видѣ

$$\frac{A}{B} = k$$

$$\frac{C}{B} = b$$

получимъ уравненіе (7):

$$y = kx + b \dots \dots \dots (7)$$

Итакъ, всякое уравненіе 1-го порядка можетъ быть приведено къ виду уравненія (7) и потому выражаетъ прямую.

Уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку.

§ 17. Прямая совершенно опредѣлена, если сказано, что она проходитъ черезъ данную точку (x_0, y_0) и составляетъ данный уголъ съ осью x . Если во второе условіе можетъ быть дано, что прямая составляетъ съ осью x и уголъ, тангенсъ котораго равенъ данной величинѣ k . Найдемъ уравненіе такой прямой. Для этого возьмемъ уравненіе (7)

$$y = kx + b \dots \dots \dots (7)$$

т. е. прямая, выраженная этимъ уравненіемъ, проходить черезъ точку

(x', y') , то координаты x' и y' этой точки должны удовлетворять уравнению (7), такъ что:

$$y' = kx' + b. \quad \dots \dots \dots (14)$$

Вычитая уравнение (14) из уравнения (7) получимъ:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad \dots \dots \dots (15)$$

Это и есть искомое уравнение прямой, проходящей чрезъ точку (x_1, y_1) и составляющей съ осью x уголъ, тангенсъ котораго равенъ k .

Здѣсь x, y суть переменныя координаты прямой, величина которыхъ измѣняется съ переходомъ отъ одной точки прямой къ другой ея точкѣ, что же касается x_1 и y_1 , то они суть постоянныя координаты *данной* точки.

Напримѣръ уравнение прямой, проходящей чрезъ точку $(2, 5)$ и наклоненной къ оси x подъ угломъ 45° (извѣстно что $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$) будетъ:

$$y - 5 = x - 2$$

или

$$x - y + 3 = 0.$$

Уравненіе прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки.

§ 18 Прямая вполнѣ определена если сказано, что она проходить чрезъ данныя точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Найдемъ уравнение прямой, заданной такимъ образомъ.

Если прямая проходить чрезъ точку (x_1, y_1) , то уравнение ея можно написать согласно § 17-му, въ видѣ

$$y_1 - y = k(x_1 - x). \quad \dots \dots \dots (16)$$

Если прямая проходить чрезъ точку (x_2, y_2) , то уравнение ея можно написать въ видѣ:

$$y_2 - y = k(x_2 - x).$$

Раздѣливъ это уравненіе на (16), получимъ:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2}. \quad \dots \dots \dots (17)$$

Это и есть искомое уравнение прямой, проходящей чрезъ точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

Преобразуемъ его такъ:

$$(y - y_1)(x - x_2) = (y - y_2)(x - x_1)$$

или:

$$xy - xy_1 - x_2y + x_2y_1 = xy - xy_2 - x_1y + x_1y_2.$$

откуда:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}. \quad \dots \dots \dots (18)$$

Сравнивая это уравнение съ (7), видимъ, что прямая, проходящая чрезъ точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , пересѣкаетъ ось y на разстоянн $\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$ отъ начала и составляетъ съ осью x уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Напримѣръ: уравнене прямой, проходящей чрезъ точки $(-2, 3)$ и $(1, 5)$, будетъ, по формулѣ (18):

$$y = \frac{3 - 5}{-2 - 1} x + \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot 3}{-2 - 1}$$

или

$$y = \frac{2}{3} x + \frac{13}{3}$$

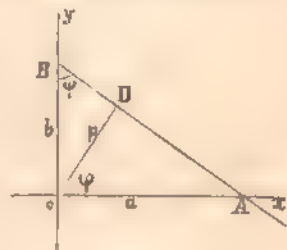
Эта прямая пересѣкаетъ ось y на разстоянн $\frac{13}{3}$ отъ начала и составляетъ съ осью x уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{2}{3}$.

Уравненіе прямой, проходящей на разстоянн p отъ начала.

§ 19. Выведемъ уравнене прямой, про которую извѣстно, что она находится на разстоянн p отъ начала, при чемъ p составляетъ уголъ φ съ осью x . Пусть a и b суть отрезки, отсѣаемые этою прямою (фиг. 11) на осяхъ x и y отъ начала. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ AoD и BoD имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} p &= a \cdot \cos \varphi \\ p &= b \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

По отрезкамъ наша прямая опредѣляется (§ 14) уравненіемъ (12)



Фиг. 11.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \dots \dots \dots (12)$$

Вставляя сюда вмѣсто a и b ихъ величины изъ равенствъ (19) получимъ.

$$\frac{x}{p \cos \varphi} + \frac{y}{p \sin \varphi} = 1$$

или:

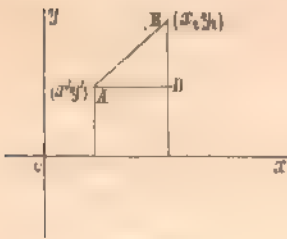
$$x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi - p = 0 \dots \dots \dots (20)$$

и есть искомое уравненіе прямой, проходящей на разстоянн p отъ начала.

Разстояніе между двумя точками.

§ 20. Опредѣлимъ разстояніе между двумя точками по заданнымъ координатамъ этихъ точекъ (фиг. 12). Пусть координаты 1-ой точки суть x_1, y_1 , координаты второй точки x_2, y_2 . Проведемъ чрезъ точку (x_1, y_1) ,

параллель къ оси x . Изъ прямоугольнаго треугольника ABD искомое разстояние δ опредѣлится, какъ гипотенуза по катетамъ, въ видѣ:



Фиг. 12

$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \dots (21)$$

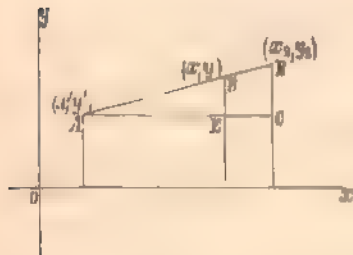
Выражая, что разстояние точки (x, y) окружности отъ центра, взятаго не въ началѣ, но въ точкѣ (a, b) одинаково и равно радиусу R для всѣхъ точекъ окружности, получимъ уравненіе окружности, описанной радиусомъ R изъ точки (a, b)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Координаты точки, раздѣляющей разстояние между двумя данными точками на двѣ части, относящіяся одна къ другой какъ m къ n .

§ 21. Пусть намъ даны координаты двухъ точекъ: (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , требуется найти координаты (фиг. 13) точки (x, y) , дѣлящей разстояние между данными точками на два отрезка, которые относятся бы одинаково къ другому какъ m къ n .

Изъ подобія треугольниковъ ABC и ADE имѣемъ



Фиг. 13.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m}{m + n}$$

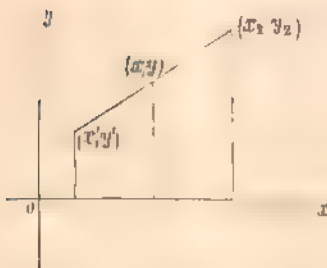
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m}{m + n};$$

откуда:

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n} \dots (22)$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \dots (23)$$

Координаты середины разстоянія между двумя данными точками.



Фиг. 14.

§ 22. Если точка D дѣлитъ разстояние AB (фиг. 14) пополамъ, то въ формулахъ (22) и (23) нужно положить: $m = n$, и тогда для координатъ точки D получимъ:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \dots (24)$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \dots (25)$$

Эти формулы показываютъ, что координаты середины разстоянія между

двумя данными точками суть арифметическія средняя *) отъ координатъ данныхъ точекъ.

Уголъ, составляемый двумя прямыми.

§ 23. Если даны двѣ прямыя уравненіями

$$y = kx + b$$

$$y = k'x + b'$$

то легко найти тангенсъ угла, заключеннаго между ними. А именно мы знаем (§ 12), что k и k' суть тангенсы угловъ наклоненія данныхъ прямыхъ (фиг. 15) къ оси x , такъ что:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= k \\ \operatorname{tg} \beta &= k' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

Кромѣ того, уголъ α есть внешний уголъ треугольника ABC и потому:

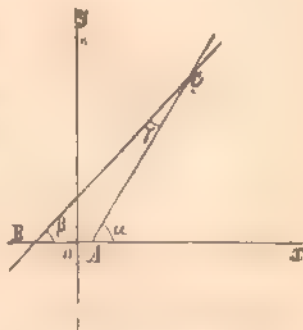
$$\alpha = \beta + \gamma,$$

куда

$$\gamma = \alpha - \beta.$$

Итакъ:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$



Фиг. 15

для случая вместо $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ величины k и k' (согласно формуламъ (26)), получимъ:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{k - k'}{1 + kk'}$$

такъ: тангенсъ угла, составляемаго прямыми

$$\left. \begin{aligned} y &= kx + b \\ y &= k'x + b' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

даны:

$$\frac{k - k'}{1 + kk'}$$

Если прямыя были бы даны уравненіями:

$$Ax + By + C = 0 \dots \dots \dots (29)$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \dots \dots \dots (30)$$

то можно было бы привести къ виду:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \\ y &= \frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

* Арифметическою среднею величинъ a и b называется величина $\frac{a+b}{2}$.

сходному съ видомъ уравненій (27). Слѣдовательно, тангенсъ угла, составляемаго прямыми (31), такъ же составляется изъ величинъ: $\frac{A}{B}$ и $\frac{A'}{B'}$ (коэффициентовъ при x) какъ формула (28) составлена изъ k и k' (коэффициентовъ при x уравненій 27). Слѣдовательно, тангенсъ этого угла равенъ

$$\frac{\frac{A}{B} - \frac{A'}{B'}}{1 + \frac{AA'}{BB'}}$$

или

$$\frac{A'B - AB'}{AA' + BB'}$$

Итакъ: тангенсъ угла заключеннаго между прямыми:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

равенъ:

$$\frac{A'B - AB'}{AA' + BB'} \dots \dots \dots (33)$$

Напримѣръ: тангенсъ угла заключеннаго между прямыми

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 2 &= 0 \\ 4x + y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

равенъ:

$$\frac{4 \cdot 5 - 3 \cdot 1}{3 \cdot 4 + 5 \cdot 1} = \frac{17}{17} = 1.$$

Слѣдовательно, эти прямые составляютъ уголъ въ 45° , такъ какъ $tg 45^\circ = 1$.

Условіе параллельности двухъ прямыхъ.

§ 24. Если числитель выраженія (28) равенъ нулю, но знаменатель не равенъ нулю, то это выраженіе, а слѣдовательно опредѣляемый имъ тангенсъ и уголъ между прямыми (27) равенъ нулю, то есть эти прямые взаимно параллельны. Итакъ: условіе параллельности прямыхъ:

$$\begin{aligned} y &= kx + b \\ y &= k'x + b' \end{aligned}$$

таково:

$$k = k' \dots \dots \dots (34)$$

Прилагая такія же разсужденія къ выраженію (33), находимъ, что условіе параллельности прямыхъ:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \end{aligned}$$

такое:

$$A'B = AB'$$

или

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \dots \dots \dots (35)$$

Напримѣръ прямыя:

$$32x + 80y - 15 = 0$$

$$8x + 20y + 61 = 0$$

взаимно параллельны, потому что:

$$\frac{32}{8} = \frac{80}{20} = 4.$$

Условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ.

§ 25. Если знаменатель выраженія (28) равенъ нулю, то самое это выраженіе и определяемый имъ тангенсъ угла, заключеннаго между прямыми

$$y = kx + b$$
$$y = k_1x + b_1,$$

равны безконечности, а слѣдовательно самый этотъ уголъ есть прямой. Итакъ условіе перпендикулярности прямыхъ:

$$y = kx + b$$
$$y = k_1x + b_1$$

такое:

$$1 + kk' = 0$$

или

$$k' = -\frac{1}{k} \dots \dots \dots (36)$$

Прилагая такія же разсужденія къ выраженію (33), находимъ, что условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ:

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

такое

$$AA' + BB' = 0, \dots \dots \dots (37)$$

Напримѣръ прямыя:

$$6x + 5y - 13 = 0$$

$$10x - 12y - 17 = 0$$

перпендикулярны между собою, потому что:

$$6 \cdot 10 - 5 \cdot 12 = 0.$$

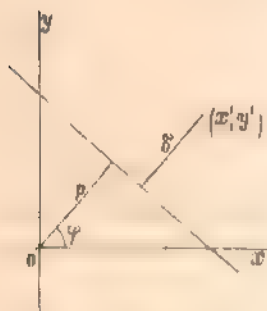
Разстояніе точки отъ прямой $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$.

§ 26. Опредѣлимъ разстояніе точки (x_1, y_1) отъ прямой, выраженной уравненіемъ:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0, \dots \dots \dots (20)$$

найденнымъ въ § 19-мъ. Здѣсь, какъ мы видѣли въ § 19-мъ, p есть раз-
стояние данной прямой отъ начала координатъ, φ уголъ, составляемый
съ осью x перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ начала на нашу прямую.

Планъ рѣшенія нашей задачи таковъ: 1) найдемъ уравненіе перпенди-
куляра, опущеннаго изъ данной точки (x_1, y_1) на данную прямую, вы-
раженнаго уравненіемъ (20). Затѣмъ 2) рѣшая уравненіе этого перпенди-
куляра совместно съ уравненіемъ (20), найдемъ (см. конецъ § 6-го) ко-



Фиг. 16.

ординаты оси x и y перпендикуляра, опущеннаго
изъ (x_1, y_1) на данную прямую. Наконецъ: 3)
по координатамъ этой оси x и по коорди-
натамъ (x_1, y_1) данной точки найдемъ, пользуясь
формулою (21), величину δ перпендикуляра, опу-
щеннаго изъ (x_1, y_1) на данную прямую — то-
есть некоторое расстояние точки x_1, y_1 отъ этой
прямой.

1) Уравненіе перпендикуляра, опущеннаго
изъ (x_1, y_1) на прямую (20), напишемъ въ фор-
мулѣ (15), пользуясь тѣмъ, что уголъ наклопенія
этого перпендикуляра къ оси x равенъ φ , то-есть

углу наклопенія p къ оси x (Фиг. 16):

$$y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} \varphi. \dots \dots \dots (38)$$

2) Рѣшимъ это уравненіе съ уравненіемъ данной прямой.

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0.$$

Получимъ по исключенію y :

$$x \cos \varphi + y_1 \sin \varphi + (x - x_1) \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi - p = 0,$$

откуда:

$$x \cos \varphi + x \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi = p + x_1 \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi - y_1 \sin \varphi.$$

Помножая всѣ члены послѣдняго уравненія на $\cos \varphi$, имѣемъ:

$$x (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = p \cos \varphi + x_1 \sin^2 \varphi - y_1 \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

или

$$x = p \cos \varphi + x_1 \sin^2 \varphi - y_1 \sin \varphi \cdot \cos \varphi. \dots \dots \dots (39)$$

Подставляя эту величину x въ (38), получимъ:

$$y = y_1 + p \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi + x_1 \sin^2 \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi - y_1 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi - x_1 \operatorname{tg} \varphi$$

или

$$y = p \cdot \sin \varphi + x_1 \operatorname{tg} \varphi (\sin^2 \varphi - 1) + y_1 (1 - \sin^2 \varphi)$$

или

$$y = p \sin \varphi - x_1 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi + y_1 \cos^2 \varphi. \dots \dots \dots (40)$$

Формулы (39) и (40) даютъ выраженія координатъ (x, y) основанія
перпендикуляра опущеннаго изъ (x_1, y_1) на данную прямую.

3) По координатам (x, y) , определяемым формулами (39) и (40) и по координатам x_1, y_1 данной точки составляем, пользуясь формулою,

$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

выражение для искомого расстояния δ .

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}.$$

Вставляя сюда вместо x и y их величины из (39) и (40), получим:

$$\delta = \sqrt{(x_1 - p \cos \varphi - x_1 \sin^2 \varphi + y_1 \sin \varphi \cdot \cos \varphi)^2 + (y_1 - p \sin \varphi + x_1 \sin \varphi \cdot \cos \varphi - y_1 \cos^2 \varphi)^2}$$

или

$$\delta = \sqrt{(x_1 \cos^2 \varphi + y_1 \sin \varphi \cdot \cos \varphi - p \cos \varphi)^2 + (x_1 \sin \varphi \cdot \cos \varphi + y_1 \sin^2 \varphi - p \sin \varphi)^2}$$

или

$$\delta = \sqrt{(x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p)^2 \cos^2 \varphi + (x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p)^2 \sin^2 \varphi}$$

При радикале берем знак $+$ потому, что расстояние считаем всегда положительным (не обращаем внимания на его направление). Координаты определяют и направление, поэтому берется с соответствующими знаками. Расстояние же рассматривается только с точки зрения своей величины.

$$\delta = \sqrt{(x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}$$

Принимая, что: $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, получим наконец:

$$\delta = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p. \dots \dots \dots (41)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (20) данной прямой, можем сказать, что, чтобы получить расстояние точки (x_1, y_1) от прямой

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0,$$

достаточно заменить в уравнении от прямой переменные координаты x, y постоянными координатами (x_1, y_1) данной точки.

Расстояние точки от прямой $Ax + By + C = 0$.

§ 27. Чтобы получить формулу для расстояния точки (x_1, y_1) от прямой, выраженной общим уравнением:

$$Ax + By + C = 0, \dots \dots \dots (42)$$

сравним это уравнение с (20). Коэффициенты при x и y уравнения (20) таковы, что сумма их квадратов $(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$ равна 1. Чтобы привести уравнение (42) к такому виду, при котором его коэффициенты имели бы такое свойство, необходимо и достаточно все члены уравнения (42) разделить на $\sqrt{A^2 + B^2}$. Действительно тогда получим уравнение

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \dots \dots (43)$$

въ которомъ тоже сумма квадратовъ коэффициентовъ

$$\left(\frac{A^2}{A^2 + B^2} + \frac{B^2}{A^2 + B^2} \right) \text{ равна } 1.$$

Уравнение (43) будетъ тождественно съ (20) если положимъ:

$$\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad p = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (44)$$

Искомое выражение расстояния δ отъ прямой (12) получится следовательно, если въ формулу (41) подставимъ вмѣсто $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, p величины, определяемыя равенствами (44). Получимъ.

$$\delta = \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \dots \dots \dots (45)$$

Итакъ: чтобы получить расстояние точки (x, y) отъ прямой $Ax + By + C = 0$ можно въ это уравненіе прямой подставить, вмѣсто переменныхъ координатъ (x, y) , координаты x_1, y_1 данной точки и полученное выраженіе раздѣлить на $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Напримѣръ: расстояние точки $(3, 5)$ отъ прямой

$$2x + 7y - 20 = 0$$

будеть:

$$\delta = \frac{2(3) + 7(5) - 20}{\sqrt{2^2 + 7^2}}$$

или

$$\delta = \frac{9}{\sqrt{53}}.$$

Эллипсъ.

Опредѣленіе эллипса.

§ 28. Въ особенности яро выступаетъ пригодность Аналитической Геометріи при изслѣдованіи кривыхъ линій *) определяемыхъ ихъ характеристическими свойствами.

Займемся изслѣдованіемъ свойствъ кривой, основное свойство которой заключается въ томъ, что *сумма расстояній каждой ея точки отъ двухъ данныхъ точекъ F и F' есть величина постоянная*. Такая кривая называется *эллипсомъ*. Точки F и F' называются его *фокусами*.

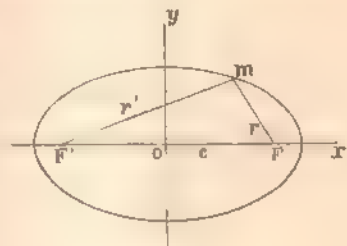
Уравненіе эллипса относительно главныхъ осей его.

§ 29. Выведемъ прежде всего уравненіе эллипса въ предположеніи, что фокусы его F и F' расположены (фиг. 17) на оси x по обѣ стороны

*, Впослѣдствіи мы будемъ ихъ называть просто *кривыми*.

отъ начала въ равныхъ отъ него разстоянiяхъ. Пусть m есть какая-нибудь точка эллипса, r и r' — ея разстоянiя отъ F и F' (радиусы векторы). По опредѣленiю эллипса, данному въ предыдущемъ параграфѣ, $r + r'$ одинаково для всѣхъ точекъ эллипса. Назовемъ постоянную величину этой суммы чрезъ s , такъ что:

$$r + r' = s. \dots \dots (46)$$



Фиг. 17.

Мы получимъ уравненiе эллипса, если вмѣсто r и r' вставимъ въ (46) нѣхъ выраженiе чрезъ координаты (x, y) точки m , потому что тогда получимъ соотношенiе между x и y годное для всѣхъ точекъ эллипса.

Пусть $OF = c$; $OF' = -c$. Координаты фокуса F будутъ, слѣдовательно, $(c, 0)$; координаты фокуса F' будутъ $(-c, 0)$. По формулѣ (21) параграфа 20-го имѣемъ:

$$r = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Вставляя эти величины въ (46), имѣемъ:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = s$$

или

$$(\sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2 = [s - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}]^2$$

откуда

$$(x - c)^2 + y^2 = s^2 - 2s\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2$$

или

$$[2s\sqrt{(x + c)^2 + y^2}]^2 = [s^2 + 4cx]^2$$

откуда

$$4s^2 [(x + c)^2 + y^2] = s^4 + 8s^2cx + 16c^2x^2$$

или

$$1s^2x^2 + 8s^2cx + 1s^2c^2 + 4s^2y^2 = s^4 + 8s^2cx + 16c^2x^2.$$

Положимъ, для удобства: $s = 2a$, получимъ:

$$16a^2x^2 + 16a^2cx + 16a^2c^2 = 16a^4 + 16c^2x^2$$

или

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

называя $a^2 - c^2$ чрезъ b^2 , полагая слѣдовательно:

$$a^2 - c^2 = b^2 \dots \dots \dots (47)$$

получимъ:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Для всех члены этого уравнения на a^2b^2 получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (48)$$

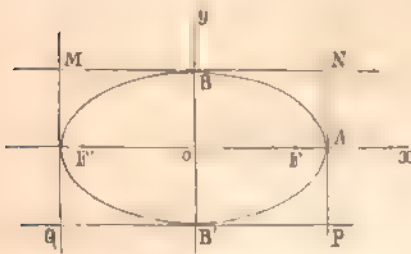
Это и есть уравнение эллипса в форме, легко запоминаемой и сходной с формой уравнения (12) прямой линии.

Исследование вида эллипса по его уравнению.

§ 30. Посмотрим, как определить вид эллипса по уравнению (48). Проведем это исследование сначала общим способом (см. § 10). Для этого определим из уравнения (48) ординату y . Получим:

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (49)$$

При $x = 0$ получаем из этой формулы $y = \pm b$. Следовательно, точки $(0, b)$, $(0, -b)$ принадлежат эллипсу. Это суть точки B и B' (фиг. 18), лежащие на оси y по обе стороны начала на расстоянии b от него. Вообще знак \pm в формуле (49) показывает, что каждой положительной ординате эллипса соответствует, равная ей по абсолютной величине, отрицательная ордината. Другими словами, эллипс симметричен относительно оси x . Поэтому достаточно исследовать формулу (49) только со знаком $+$ и определять (этим самым) вид той части эллипса, которая лежит по одну сторону оси x в области положительных ординат, а затем присоединить к этой части другую симметричную ей относительно оси x .



Фиг. 18.

Итак, займемся исследованием формулы:

$$y = + b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (50)$$

Придавая здесь переменному x последовательно значения, возрастающие от нуля, видим, что y будет все уменьшаться и наконец, при $x = a$, ордината y обратится в 0, потому что тогда:

$$y = + b \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2}} = 0.$$

Следовательно, эллипсу принадлежит точка $(a, 0)$, расположенная на оси x в расстоянии a от начала. На фиг. 18 эта точка обозначена буквою A .

При дальнейшем увеличении переменного x формула (50) будет да-

вать для y минимья значения, потому что, при $x > a$, подъ знакомъ радикала будутъ получаться отрицательныя количества. Следовательно: эллисъ не простирается въ сторону положительныхъ y далѣе прямой MN проведенной чрезъ B параллельно оси y .

Если опредѣлимъ x изъ уравненія (48), то получимъ:

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Эта формула показываетъ, что эллисъ симметриченъ и относительно оси y и что далѣе параллелья, проведенныя къ оси y на равстоянняхъ a отъ нея, эллисъ не простирается. Итакъ: весь эллисъ заключается въ прямоугольникъ $MNPQ$ (фиг. 18), и уже многое выяснилось относительно его вида.

Еслибы мы задались какими-нибудь числовыми величинами параметра a и b въ уравненн (48), то, поступая по указанному въ § 10-мъ опредѣлили бы достаточное число точекъ, которыя дали бы намъ возможность начертить всю фигуру эллиса изображеннаго на (фиг. 18).

По слѣдующимъ два параграфа изучать намъ лучше судить о видѣ эллиса чѣмъ самая чертежъ, изображающій только, какъ сказать, опредѣленную особь изъ всей породы эллисовъ.

Діаметры эллиса и его центръ.

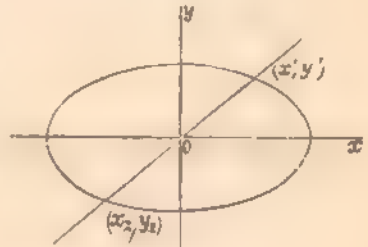
§ 31. Опредѣлимъ разстояніе отъ начала O точекъ пересѣченія эллиса съ прямою

$$y = kx, \dots \dots \dots (51)$$

проведенною чрезъ начало (фиг. 19).

Для этого опредѣлимъ сперва споможаясь сказаннымъ въ § 6) координаты этихъ точекъ пересѣченія, рѣшая совместно уравненія (48) и (51). Подумимъ, по исключенн y :

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{k^2 x^2}{b^2} = 1$$



Фиг. 19.

откуда

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}} = \pm \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 k^2} = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2 k^2}}.$$

Имѣемъ, следовательно, два значенія для абциссы искомыя точки пересѣченія:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= + \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2 k^2}} \\ x_2 &= - \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2 k^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (52)$$

Вставляя эти величины, вмѣсто x , послѣдовательно въ уравнение (51), получимъ для y тоже два значенія:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= + \frac{kab}{\sqrt{b^2 + a^2k^2}} \\ y_2 &= - \frac{kab}{\sqrt{b^2 + a^2k^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (53)$$

Слѣдовательно, получаются двѣ точки пересѣченія (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Разстоянiе первой точки отъ начала будетъ:

$$\sqrt{(x_1 - o)^2 + (y_1 - o)^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2 + a^2k^2} + \frac{k^2a^2b^2}{b^2 + a^2k^2}} = ab \sqrt{\frac{1 + k^2}{b^2 + a^2k^2}}$$

Разстоянiе 2-ой точки отъ начала будетъ:

$$\sqrt{(x_2 - o)^2 + (y_2 - o)^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2 + a^2k^2} + \frac{k^2a^2b^2}{b^2 + a^2k^2}} = ab \sqrt{\frac{1 + k^2}{b^2 + a^2k^2}} \quad (54)$$

Для обоихъ разстоянiй получается одна и та же величина. Итакъ: всѣ хорды эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, проходящія чрезъ начало координатъ, дѣлятся этимъ началомъ пополамъ.

Слѣдовательно, эллипсъ имѣетъ *четыре*. Хорды, проходящія чрезъ центръ, называются *диаметрами* эллипса.

Сравненiе эллипса съ окружностью.

§ 32. Опивемъ изъ начала координатъ окружность радиусомъ R . Уравненiе ея, какъ мы знаемъ (см. § 7), будетъ

$$X^2 + Y^2 = R^2 \quad \dots \dots \dots (55)$$

Посмотримъ, какая линия получится, если уменьшимъ всѣ ординаты окружности въ m разъ (m есть какое-нибудь цѣлое число). Назовемъ координаты точекъ этой искомой линии

чрезъ x, y . Согласно предположенiю

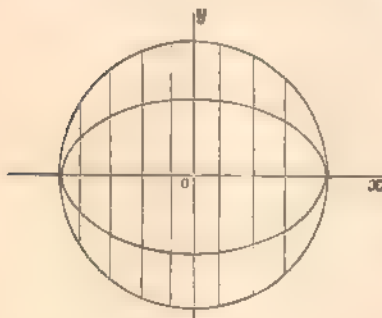
$$\left. \begin{aligned} X &= x \\ Y &= my \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (56)$$

Вставляя вмѣсто X и Y въ уравненiе (55) величины, опредѣляемыя уравненiями (56), получимъ уравненiе искомой линии:

$$x^2 + m^2y^2 = R^2 \quad \dots \dots (57)$$

потому что, если X, Y удовлетворяютъ уравненiю (55), то x, y должны удовле-

творять уравненiю (57) а между тѣмъ x, y суть координаты искомой линии; слѣдовательно, (57) есть уравненiе этой линии. Докажемъ, что она



Фиг. 20

представляет собою эллипс. Разделим все члены уравнения (57) на $m^2 R^2$. Получимъ:

$$\frac{x^2}{m^2 R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1. \quad \dots \dots \dots (58)$$

Это есть уравнение эллипса (48), въ которомъ $a = mR$, $b = R$, какъ видно изъ сравненія уравненій (48) и (58).

Такъ, эллипсъ получается изъ окружности, если все ея ординаты уменьшить въ одинаковое число разъ (фиг. 20).

Главные оси эллипса.

§ 33. Диаметръ AA' , проходящій чрезъ фокусы, называется *большою осью* эллипса. Его половина OA называется (фиг. 21) *большою полуосью*. Величина большой полуоси есть абсцисса точки пересѣченія эллипса (48) съ осью x ; поэтому она опредѣлится изъ уравненія (48), полагая въ немъ: $y = 0$. Получимъ

$$x = a = \text{большая полуось.}$$

Диаметръ BB' , перпендикулярный къ большой оси, называется *малою осью* эллипса. Его половина OB называется *малою полуосью*. Величина малой полуоси есть ордината точки пересѣченія эллипса съ осью y ; поэтому она опредѣлится изъ уравненія (48) если положить въ немъ: $x = 0$. Имеемъ:

$$y = b = \text{малая полуось.}$$

Полы параметры a и b въ уравненіи (48) эллипса суть его большая и малая полуоси. Точки A , A' , B , B' полуосей называются вершинами эллипса.

Соотношеніе между a , b и c .

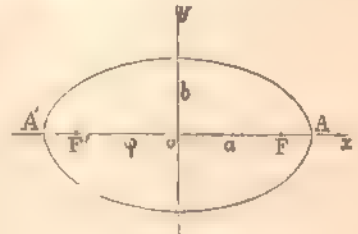
§ 34. Представивъ формулу (47) параграфа 29-го въ видѣ:

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad \dots \dots \dots (59)$$

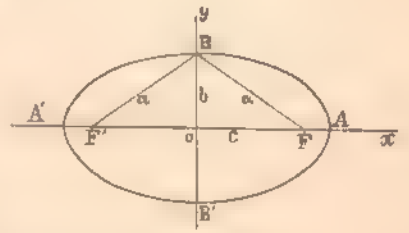
и зная, что *фокальное разстояніе* c (разстояніе OF отъ центра до фокуса) откладывается по оси x , тогда какъ малая полуось b — по оси y ,

имея въ виду, по теоремѣ Пифагора, что разстоянія вершины B отъ фокусовъ равны a (фиг. 22), такъ что:

$$BF = BF' = \sqrt{b^2 + c^2} = a. \quad \dots \dots \dots (60)$$



Фиг. 21.



Фиг. 22

Эксцентриситет эллипса.

§ 35. Отношение $\frac{c}{a}$ фокального расстояния к большой полуоси называется *эксцентриситетом* эллипса и обозначается буквою e . Из этого определения и формулы (59) заключаем, что

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \dots \dots \dots (61)$$

Чем более удлиненную форму иметь эллипс, тем более его эксцентриситет.

Геометрическое место середин параллельных хорд эллипса.

§ 36. Проведем в эллипсе ряд параллельных друг другу хорд (фиг. 23) и посмотрим, какое будет геометрическое место середин этих хорд. Решим задачу эту аналитически, то есть формулами. Возьмем уравнение эллипса



Фиг. 23.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots \dots (18)$$

и пусть уравнение какойнибудь из рассматриваемых хорд будет

$$y = kx + \beta \dots \dots (62)$$

Замечим, что, благодаря взаимной параллельности рассматриваемых хорд, величины k во всех уравнениях будут одинаковы для всех хорд, и только величины β будут различны. План решения задачи будет следующий: нахождение точек пересечения хорды (62) с эллипсом (18), стоящее в совместном решении этих уравнений, определит координаты середины расстояния между этими точками, переходя от рассмотрения одной хорды к рассмотрению всех хорд, параллельных ей.

Подставляя в (18) вместо y ее величину из (62), имеем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + \beta)^2}{b^2} = 1,$$

или

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) + \frac{2\beta k}{b^2} x + \frac{\beta^2}{b^2} = 1,$$

откуда

$$x = \frac{\beta k}{b^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)} = \frac{\beta k^2}{b^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2} = \frac{\beta}{b^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)}.$$

Назовем ли кратности, стоящая здесь радикаль чрезъ N и положимъ

$$\frac{k}{b^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)} = M. \quad \dots \dots \dots (63)$$

Тогда получимъ для x формулу:

$$x = M\beta \pm N.$$

И ставимъ эту величину вмѣсто x въ (62), получимъ

$$y = (kM + 1) \beta \pm kN.$$

Итакъ координаты одного изъ концовъ хорды будутъ:

$$\begin{aligned} x_1 &= M\beta + N \\ y_1 &= (kM + 1) \beta + kN. \end{aligned}$$

Координаты же другого конца хорды будутъ:

$$\begin{aligned} x_2 &= M\beta - N \\ y_2 &= (kM + 1) \beta - kN. \end{aligned}$$

Зная координаты концовъ, получимъ по формуламъ (24) и (25) координаты середины въ видѣ:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = M\beta \quad \dots \dots \dots (64)$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = (kM + 1) \beta. \quad \dots \dots \dots (65)$$

Для послѣднихъ уравненій (64) и (65) одно на другое, получимъ

$$\frac{y}{x} = \frac{kM + 1}{M} \quad \dots \dots \dots (66)$$

Здесь уже не содержится величины β , такъ какъ она не выключается въ величинѣ M , определяемой формулою (63). А такъ какъ именно только величину β и отличаютъ уравнения рассматриваемыхъ взаимно-параллельныхъ хордъ одно отъ другого, то уравнение (66) справедливо для координатъ середины каждой изъ рассматриваемыхъ хордъ. Следовательно, (66) и есть уравнение искомагаго геометрическаго мѣста среднихъ взаимно-параллельныхъ хордъ. Для всѣхъ взаимно-параллельныхъ хордъ величина k одинакова (равенствъ ихъ угла наклоенія къ оси x). Итакъ k постоянное, M тоже постоянное, какъ видно изъ (63). Следовательно, уравненіе (66) содержитъ во второй своей части постоянную величину $\frac{kM + 1}{M}$.

Назовемъ ее чрезъ A : тогда уравненіе (66) искомагаго геометрическаго

мѣста можно представить такъ:

$$\frac{y}{x} = A,$$

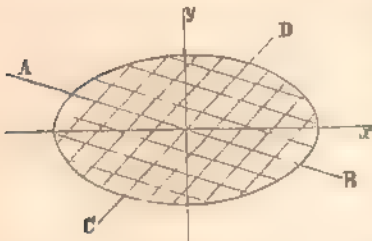
или

$$y = Ax. \dots \dots \dots (67)$$

Сравнивая это уравнение съ (4) убѣдимся, что *въ эллипсѣ геометрически лежатъ средины взаимно-параллельныхъ хордъ есть прямая, проходящая чрезъ центръ*. Другими словами *срединны взаимно-параллельныхъ хордъ лежатъ на диаметрѣ*.

Сопряженные диаметры.

§ 37. Диаметры AB (фиг. 24), дѣлящій пополамъ каждое семейство взаимно-параллельныхъ хордъ называется *сопряженнымъ*, по отношению къ этимъ хордамъ. Одна изъ хордъ этого семейства проходитъ чрезъ центръ и потому есть тоже диаметръ OD , и этимъ диаметромъ CD , какъ проходящимъ чрезъ центръ, диаметръ AB , а слѣдовательно и всѣ хорды параллельныя съ AB , дѣлятся пополамъ. *Такіе два диаметра AB и CD , изъ которыхъ каждый дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому, называются сопряженными*. Диаметръ сопряженный съ большою x есть малая ось, такъ же можно сказать и о симметріи эллипса относительно его осей.

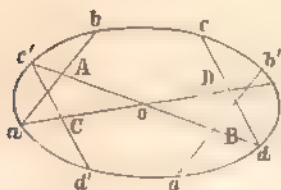


Фиг. 24

Диаметръ сопряженный съ большою x есть малая ось, такъ же можно сказать и о симметріи эллипса относительно его осей.

Нахождение центра начерченного эллипса.

§ 38. Свойство сопряженныхъ диаметровъ даетъ возможность определить центръ эллипса, контуръ котораго начерченъ слѣдующимъ образомъ (фиг. 25).



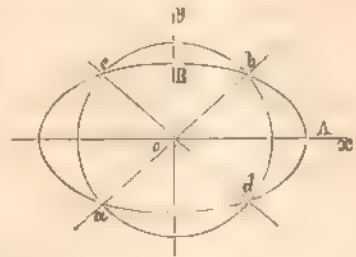
Фиг. 25

Пересекаемъ эллипсъ двумя какими-нибудь взаимно-параллельными прямыми ab и $a'b'$. Дѣлимъ полученныя хорды пополамъ и, соединяя средины этихъ хордъ прямою AB , получаемъ диаметръ сопряженный хордамъ ab и $a'b'$. Точно такъ же поступаемъ съ двумя другими произвольно взятыми, но взаимно-параллельными, хордами cd и $c'd'$. Получаемъ сопряженный этимъ хордамъ диаметръ CD . Точка o пересѣченія диаметровъ AB и CD и будетъ искомый центръ.

Опредѣленіе главныхъ осей начерченного эллипса.

§ 39. Когда центръ o эллипса уже опредѣленъ указаннымъ въ § 38 способомъ или какъ-нибудь иначе, то для опредѣленія главныхъ осей

списываемъ изъ центра окружность давимъ въбѣдь такимъ радиусомъ, который былъ бы болѣе малой полуоси и меньше большой полуоси. Такая окружность пересѣкаетъ (фиг. 26) эллипсъ въ четырехъ точкахъ. Соединимъ крестъ на крестъ эти точки прямыми ab и cd . Для смежные углы, образуемые этими прямыми, пополамъ, получимъ направленіи главныхъ осей. OA и OB будутъ главные полуоси. Это построеніе основано на симметріи, относительно главныхъ осей.

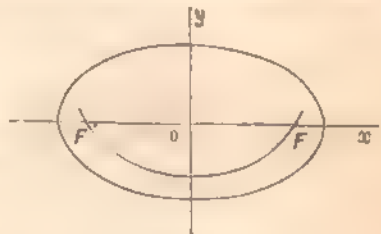


Фиг. 26.

Фигуры состоящей изъ эллипса и построения окружности

Опредленіе фокусовъ начерченного эллипса.

§ 40. Определимъ центръ данного эллипса и главные оси, а также найдемъ его фокусы, пользуясь тѣмъ, что (см. § 34) разстояніи фокусовъ отъ концовъ малой оси равны большой полуоси. Опредѣлимъ (фиг. 27) изъ конца малой оси окружность радиусомъ равнымъ большой полуоси OA . Точки пересѣченія F и F' этой окружности съ большою осью AA' и будутъ фокусами эллипса.



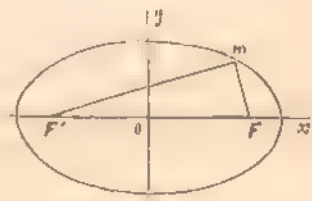
Фиг. 27.

Черченіе эллипса помощью нити.

§ 41. Основное свойство эллипса (§ 28),

$$r + r' = 2a.$$

по которому сумма разстояній каждой его точки отъ фокусовъ есть величина постоянная равная удвоенной оси, дасть возможность чертить эллипсъ по даннымъ фокусамъ и большой оси, слѣдующимъ способомъ: отъмечаемъ (фиг. 28) точками фокусы F и F' на чертежѣ. Втыкаемъ въ эти точки булавки, на одну изъ которыхъ надѣваемъ глухою петлею нить. Обматываемъ другой конецъ нити около другой булавки такъ, чтобы часть нити, остающаяся между булавками, имѣла длину $2a$ большой оси. Оттягиваемъ остріемъ карандаша m нить въ такое положеніе



Фиг. 28.

$Fm + F'm$ чтобы части Fm и $F'm$ были натянуты. Не ослабивъ этой натяжки ведемъ по бумажѣ карандашъ, въ торъ и концы эллипса, потому что нити образкомъ совпадется условие $r + r' = 2a$.

Если бы даны были не фокусы и большая ось, но уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то следовало бы поступить такъ. На произвольно взятой прямой линии отложить расстояние $FF' = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ такъ же выше изъ (47); в действительнейшемъ же поступать какъ и прежде.

Гипербола.

Основное свойство гиперболы.

§ 42. Займемся исследованиемъ кривой, основное свойство которой заключается въ следующемъ: *разность расстояний всякой точки кривой отъ двухъ данныхъ точекъ, называемыхъ фокусами, есть величина постоянная.* Такая кривая называется *гиперболою*. Называя расстояния какой-нибудь точки гиперболы отъ фокусовъ чрезъ r и r' замечаемъ, что основное свойство гиперболы выражается равенствомъ

$$r - r' = s. \dots \dots \dots (68)$$

Уравненіе гиперболы относительно главныхъ осей.

§ 43. Поступая совершенно такъ же, какъ при выводѣ въ § 29-омъ уравненія эллиса, получимъ для гиперболы уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots \dots \dots (69)$$

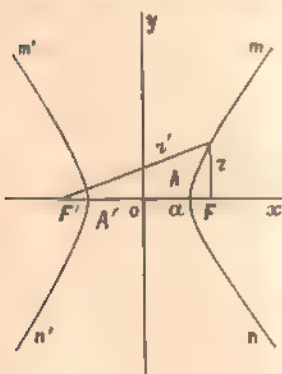
весьма сходное съ уравненіемъ эллиса. Только здѣсь фокусное расстояние $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Исследование вида гиперболы по ея уравненію.

§ 44. Опредѣлимъ изъ (69) y

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \dots \dots \dots (70)$$

Изъ этой формулы мы видимъ, во первыхъ, что гипербола симметрична относительно оси x , потому что, благодаря знаку \pm , каждому положительному y соответствуетъ равное ему по абсолютной величинѣ, отрицательное y . Затѣмъ видимъ, что для всѣхъ x меньшихъ чѣмъ a , величина, стоящая подъ радикаломъ, является отрицательною, и следовательно y мнимое для всѣхъ x меньшихъ чѣмъ a . Значитъ (фиг. 29), въ части плоскости, ограниченной прямыми параллельными оси y и отстоящими на расстоянии a



Фиг. 29.

и $(-a)$ отъ оси y гипербола не имѣетъ точекъ.

Если увеличим x в формуле (70) y безраздельно увеличивается.

Если бы наконец мы остановились на каких-нибудь заданных величинах параметров a и b , то могли бы определить (см. § 10) сколько угодно точек гиперболы и увидели бы, что она имеет вид, изображенный на фиг. 29-ой. А именно гипербола состоит из двух ветвей mAn и $m'A'n'$, при чем каждая ветвь уходит двумя своими концами в бесконечность, так что на чертеже можно изобразить только часть гиперболы.

Асимптоты гиперболы.

§ 4Б. Определим абсциссу точки пересечения гиперболы с прямою

$$y = x \operatorname{tg} \varphi, \dots \dots \dots (71)$$

прошедшей чрез начало координат и совпадающей (см. § 11) углом φ с осью x (фиг. 30). Для этого исключим y из (70) и (71). Подставляя в (70) вместо y его величину из (71), получим:

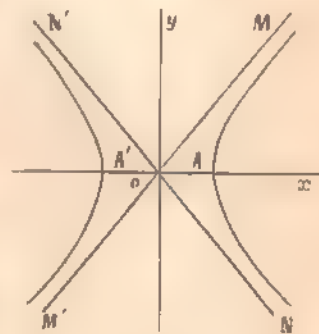
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{b^2} = 1,$$

или

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{b^2} \right) = 1$$

откуда:

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a^2} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{b^2}}} \dots \dots (72)$$



Фиг. 30.

величина $\frac{1}{a^2} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{b^2}$, стоящая под радикалом, обращается в нуль если $\frac{1}{a^2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{b^2}$, то есть при $\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{b}{a}$, и тогда x обращается в бесконечность. Значит, прямые, проведенные из начала под углами φ гиперолы которых суть $+\frac{b}{a}$ и $-\frac{b}{a}$, встречаются гиперболу в бесконечности. Эти прямые MM' и NN' (фиг. 30) называются *асимптотами*. При дальнейшем увеличении $\operatorname{tg} \varphi$, величина $\frac{1}{a^2} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{b^2}$, стоящая под радикалом в формуле (72) является отрицательною следовательно, x является мнимым; значит ветви углов $M'oN$ и $M'o'N'$ гиперболы не имеют точек.

Нельзя существовать для каждой гиперболы такие две проходящая чрез ее центр o прямые, называемые *асимптотами*, которые встречаются гиперболу в бесконечно-удаленных точках. Обе ветви гиперболы распространяются в противоположных углах образованных асимптотами. Вследствии (§ 214) мы докажем, что асимптоты касаются к гиперболе в бесконечности. Угол наклона асимптот к оси x опреде-

ляются (см. выше) равенством

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{b}{a}.$$

Главные оси гиперболы.

§ 46. Прямые, на которой расположены фокусы гиперболы, пересекаются с ней в точках A и A' (фиг. 30), называемых *вершинами* гиперболы. Расстояние от центра до вершин OA и OA' называют *действительными полуосями* гиперболы. Величина действительной полуоси гиперболы, выраженной уравнением (69) равна a , как это можно вывести из этого уравнения, определив координаты точек пересечения гиперболы с осью x , то есть определив x в предположении, что $y = 0$.

Таким образом, один из двух параметров a и b гиперболы

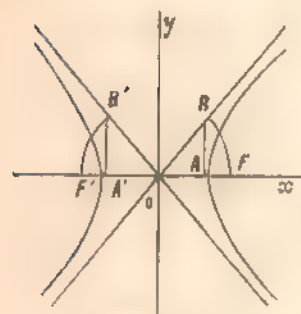
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

есть ее действительная полуось. Другой параметр b называется *мнимой полуосью* и самая прямая PQ , проведенная через центр гиперболы перпендикулярно к действительной оси, называется мнимой осью гиперболы.

Построение асимптот по уравнению гиперболы.

§ 47. В параграфе 46 мы видели, что угол φ , составленный асимптотой гиперболы с осью x определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{b}{a} \dots \dots (73)$$



Фиг. 31.

Если из вершин гиперболы возведем перпендикуляры к действительной оси (фиг. 31) и на них отложим величину мнимой полуоси b , то, соединив полученные точки прямыми с центром O гиперболы, получим асимптоты, потому что построенные таким образом прямые образуют, как видно из треугольников OAB и $OA'B'$ с осью x

углы, гипербола которых удовлетворяет уравнению (73).

П а р а б о л а.

Основное свойство параболы.

§ 48. Запомним изследуемъ кривой, основное свойство которой заключается в следующем: *расстояние каждой точки кривой от некоторой точки, называемой фокусомъ, равно расстоянию той же точки кривой*

бой этой тангенсировой прямой, называемой директрисой (фиг. 32), такъ что:

$$mF = ma$$

$$m_1F = m_1a_1$$

$$m_2F = m_2a_2$$

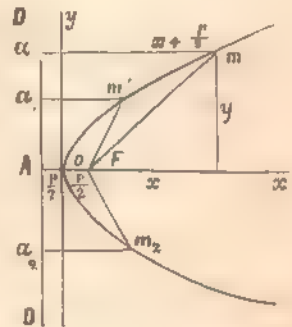
.....

Такая кривая называется *параболою*.

Уравнение параболы относительно вершины.

§ 49. Выведемъ уравнение параболы изъ ея основнаго свойства (фиг. 32). Пусть расстояние отъ фокуса F до директрисы DD будетъ $AF = p$.

Примемъ прямую AF за ось x . На ней будетъ находиться точка O , принадлежащая параболѣ, въ разстоянн $\frac{p}{2}$ отъ фокуса и отъ директрисы, потому что всякая точка, находящаяся въ равныхъ разстояннхъ отъ фокуса и отъ директрисы, принадлежитъ параболѣ. Примемъ эту точку O за начало координатъ. Пусть координаты каковъ-нибудь точки m параболы будутъ (x, y) . Изъ чертежа видно, что



Фиг. 32.

$$am = \frac{p}{2} + x. \quad (74)$$

Координаты фокуса F будутъ $(\frac{p}{2}, 0)$, и следовательно по формулѣ (74)

$$Fm = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}. \quad (75)$$

По основному свойству параболы $am = Fm$, или, вследствие равенствъ (74) и (75)

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Сочинивъ обѣ части этого уравненія въ квадратъ, получимъ

$$\frac{p^2}{4} + px + x^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

или

$$y^2 = 2px. \quad (76)$$

Это и есть искомое уравненіе параболы. Оно содержитъ одну постоянную величину (параметръ) p равную разстоянню фокуса отъ директрисы.

Ислѣдованіе вида параболы по ея уравненію.

§ 50. Изъ (76) имѣемъ

$$y = \pm \sqrt{2px}.$$

Эта формула показывает, что съ увеличиваніемъ x безпредѣльно увеличиваются и y , что парабола симметрична относительно оси x и, наконецъ, что вся она лежитъ по одну сторону оси y , такъ какъ при отрицательныхъ значеніяхъ x (и положительномъ p) для y получаются мнимыя величины. Если бы p было отрицательно, получившіяся значенія x давали бы мнимое y .

Если бы мы остановились на какомъ-либо численномъ значеніи p , то мы бы опредѣлили скланыя углы точки параболы (см. § 10) и замѣтили бы, что она имѣетъ видъ, представленный на фиг. (32*)

Полярныя координаты.

Полярныя координаты.

§ 51. Положеніе точки можно опредѣлять также разстояніемъ r точки (фиг. 33) отъ некоторой данной на плоскости точки O , называемой *полюсомъ* и угломъ (φ), составляемымъ прямою om съ вѣткою данною на плоскости прямою OA , называемою *полярною осью*. Разстояніе r называется *радиусомъ-векторомъ* точки m . Уголъ φ и радиусъ-векторъ r называются полярными координатами точки. Точку, имѣющую полярный уголъ φ и радиусъ-векторъ r , будемъ обозначать такъ: (φ, r) .



Фиг. 33.

Потому что такъ въ Декартовыхъ координатахъ уравненіе, заключающее переменныя x, y , изображаетъ линію, точно такъ же и въ полярныхъ координатахъ: уравненіе, содержащее переменныя φ и r , изображаетъ некоторую (прямую или кривую) линію.

Преобразованіе Декартовыхъ координатъ въ полярныя.

§ 52. Не трудно найти соотношенія, существующія между Декартовыми координатами точки и ея полярными координатами, если въ послѣднихъ полюсъ совпадаетъ съ началомъ Декартовыхъ координатъ, а полярная ось съ осью x . Дѣйствительно изъ чертежа (фиг. 34) видно, что

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (77)$$

Эти формулы служатъ для преобразованія уравненій, выраженныхъ въ Декартовыхъ координатахъ, въ уравненія, выраженныхъ въ координатахъ полярныхъ, для чего достаточно въ первыхъ замѣнить x и y ихъ

Фиг. 34.

*) См. задачу 53.

величинами, определяемыми изъ (77). Напримеръ, уравненіе прямой $Ax + By + C = 0$ выражится въ полярныхъ координатахъ такъ, $Ar \cos \varphi + Br \sin \varphi + C = 0$ или:

$$r = \frac{C}{A \cos \varphi + B \sin \varphi}.$$

Преобразованіе полярныхъ координатъ въ Декартовы.

§ 53. Иногда нужно бываетъ, наоборотъ, перейти отъ полярныхъ координатъ къ Декартовымъ. Найдемъ формулы для такого перехода. Для этого изъ уравненій (77) изъ первое, получимъ:

$$tg \varphi = \frac{y}{x} \dots \dots \dots (78)$$

Возведемъ уравненія (77) почленно въ квадраты и сложимъ, получимъ

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

откуда $r = \sqrt{x^2 + y^2} \dots \dots \dots (79)$

Здѣсь передъ радикаломъ удерживаемъ +, считая r всегда положительнымъ. Формулы (78) и (79) служатъ для перехода отъ полярныхъ координатъ къ Декартовымъ.

Примѣръ. Преобразовать къ Декартовымъ координатамъ уравненіе

$$r = \frac{C}{A \cos \varphi + B \sin \varphi}$$

найденное въ предыдущемъ параграфѣ.

По формуламъ тригонометрии имѣемъ: $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \varphi}}$, $\sin \varphi = \frac{tg \varphi}{\sqrt{1 + tg^2 \varphi}}$. Подставимъ эти величины въ данное уравненіе, получимъ,

$$r = \frac{C \sqrt{1 + tg^2 \varphi}}{A + B tg \varphi}$$

ставивъ сюда имѣемъ r и $tg \varphi$ изъ выраженій изъ (78) и (79), имѣемъ

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{C \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}}{A + B \frac{y}{x}}$$

или

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{C \sqrt{x^2 + y^2}}{Ax + By}$$

или

$$1 = \frac{C}{Ax + By},$$

и въ концѣ: $Ax + By + C = 0$, какъ и следовало ожидать, потому что мы шли въ этой задачѣ путемъ прямо противоположнымъ задачѣ предыдущаго параграфа.

Поллярныя координаты позволят вам познакомиться съ уравненіями эллипса, параболы и гиперболы, весьма часто употребляемыми въ Астрономіи, и вообще поллярныя координаты иногда удобнѣе Декартовыхъ. Но прежде выведемъ еще нѣкоторыя замѣчательныя формулы.

Разстояніе точекъ эллипса и гиперболы отъ фокусовъ этихъ кривыхъ.

§ 54. Пусть (x, y) суть координаты точки, лежащей на эллипсѣ

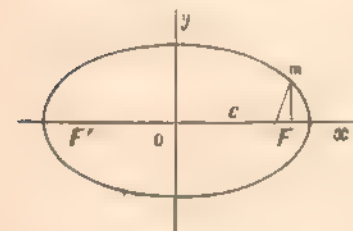
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Координаты фокуса F (фиг. 35) суть $(c, 0)$, гдѣ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (см. ур. (47)). Квадратъ разстоянія точки (x, y) отъ F будетъ, следовательно, по формулѣ (21):

$$r^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2cx + c^2. \quad (80)$$

Изъ уравненія эллипса имѣемъ:

$$y^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}.$$



Фиг. 35.

Вставляя въ величину имѣето y^2 въ (80), получимъ:

$$r^2 = x^2 + \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2} - 2cx + c^2,$$

или

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + b^2 - 2cx + c^2 = r^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + b^2 - 2cx + c^2 \\ &= \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2cx + a^2. \end{aligned}$$

Приравнивая выражение (61) эксцентриситета, получимъ:

$$r^2 = e^2 x^2 - 2aex + a^2 = (a - ex)^2$$

или

$$r = a - ex. \quad (81)$$

Разстояніе r точки (x, y) отъ другаго фокуса опредѣлимъ, зная, что по основному свойству эллипса $r + r' = 2a$. Получимъ:

$$r' = a + ex. \quad (82)$$

Поступая совершенно такъ же для гиперболы и замѣчая только, что для нея (см. конецъ § 43) $c^2 = a^2 + b^2$, получимъ бы:

$$r = ex - a. \quad (83)$$

$$r' = ex + a. \quad (84)$$

Полярныя уравненія эллипса, гиперболы и параболы относительно фокуса.

§ 55. Посмотримъ, каково будетъ полярное уравненіе эллипса, если за полярную ось принять большую его ось (фиг. 36), а за полюсъ фокусъ F .

Изъ чертежа видимъ, что

$$x = r \cos \varphi + c.$$

Исключая x изъ этого уравненія и уравненія (81), получимъ:

$$r = a - e (r \cos \varphi + c).$$

откуда:

$$r = \frac{a - ec}{1 + e \cos \varphi} = \frac{a}{1 + e \cos \varphi} = \frac{a^2 - c^2}{a(1 + e \cos \varphi)} = \frac{b^2}{a(1 + e \cos \varphi)}.$$

Полагая $\frac{b^2}{a} = p$, получимъ наконецъ:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \dots \dots \dots (85)$$

Это и есть уравненіе эллипса въ полярныхъ координатахъ. Здѣсь величина $\frac{b^2}{a}$, которую мы обозначили чрезъ p , называется параметромъ. Какъ не трудно вывести изъ уравненія эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, этотъ параметръ есть не что иное, какъ ордината, возмѣщенная изъ фокуса F' . (Дѣйствительно, абсциссы фокуса F' , какъ известно (см. § 29), ось c равно $\sqrt{a^2 - b^2}$. Подставляя въ уравненіе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вмѣсто x эту величину, получимъ $\frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, откуда $y = \frac{b^2}{a}$).

Для гиперболы получимъ то же самое уравненіе (85), только для эллипса $e = \frac{c}{a} < 1$, для гиперболы же, $e = \frac{c}{a} > 1$. Тѣмъ что уравненіе (85) представляетъ эллипсъ при $e < 1$ и гиперболу при $e > 1$.

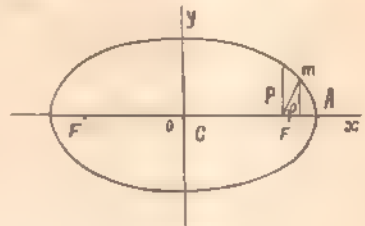
Мы сейчасъ увидимъ, что и парабола выражается уравненіемъ (85).

Дѣйствительно (фиг. 37), по основному свойству параболы и припоминая, что въ ея уравненіи $y^2 = 2px$ величина $p = DF'$, полу-

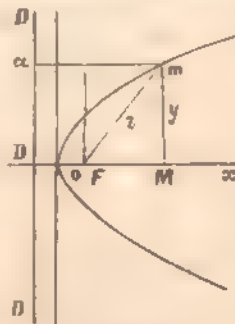
$$r = am = p + FM = p + r \cos \varphi.$$

откуда:

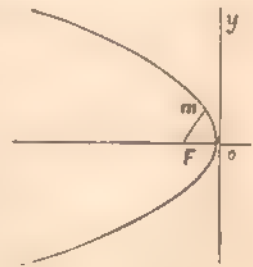
$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}.$$



Фиг. 36.



Фиг. 37.



Фиг. 38.

Но если бы парабола была расположена такъ, какъ на фиг. 38-ой, то по-

лучши бы

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \dots \dots \dots (86)$$

Въ это уравнение обращается уравнение (85) при $e = 1$.

Итакъ: уравненіе (85) выражаетъ собою:

эллисъ при $e < 1$

параболу » $e = 1$

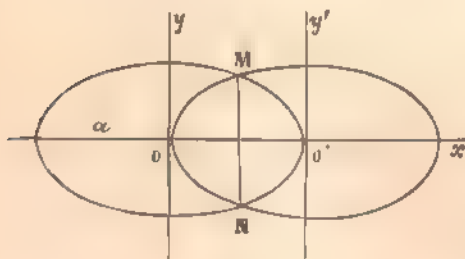
гиперболу » $e > 1$.

Допустимъ, что и для гиперболы величина p равна ординатѣ, поставленной надъ фокусомъ. Дѣйствительное расстояние фокуса равно $\frac{p}{2}$ (см. § 19). Вставивъ въ уравненіе параболы $y^2 = 2px$ вмѣсто x эту величину $\frac{p}{2}$ получимъ $y^2 = 2p \cdot \frac{p}{2} = p^2$, откуда $y = p$ для фокуса.

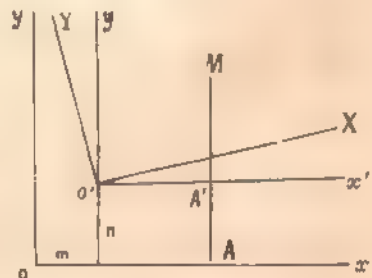
Преобразованіе координатъ.

Необходимость преобразованія однихъ Декартовыхъ координатъ въ другія Декартовы.

§ 56. Уравненія эллиса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и параболы $y^2 = 2px$, введенныя нами, годятся для этихъ кривыхъ только при принятыхъ нами предположеніяхъ относительно расположенія этихъ кривыхъ по отношенію къ осямъ координатъ. Между тѣмъ во многихъ задачахъ приходится имѣть дѣло съ этими кривыми иначе расположенными относительно осей координатъ. Напримеръ въ такой задачѣ найти (фиг. 39) величину x_0 xy , соединяющей точки пересеченія даннаго эллиса съ тѣмъ



Фиг. 39.



Фиг. 40

который получается отъ перемѣненія перваго эллиса на расстояние α въ сторону положительныхъ x . Если уравненіе 1 го эллиса относительно его осей и принявъ начало координатъ въ его центрѣ, будетъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ уравненіе же втораго эллиса будетъ иное, а такое мы еще пока не знаемъ. Если-же за начало координатъ примемъ центръ 2 го эллиса, то по

систему написать уравнения первого центра эллипса, а затем не вь на чать координатъ.

Что бы выйти изъ подобнаго рода затрудненій приближить къ преобразованію координатъ.

Самый общій случай (фиг. 40) преобразованія координатъ, для перехода отъ какой-нибудь системы xoy къ системѣ XoY , разсматриваются какъ два последовательныхъ перехода: 1) отъ системы xoy къ системѣ $x'o'y'$ съ осми, параллельными осемъ первой системы. Этотъ переходъ называется *переносомъ начала*. 2) отъ системы $x'o'y'$ къ системѣ $Xo'Y'$, имѣющей то же начало, что и промежуточная система xoy . Этотъ переходъ называется *поворотомъ осей* на уголъ φ . Уголъ φ есть уголъ, составляемый между собою осми $o'x'$ и $o'X$.

Переносъ начала.

§ 57 Для переноса начала необходимо должна быть задана та точка, въ которую начало переносится. Обыкновенно она задается ее координатами (m, n) (фиг. 40) относительно прежней системы. Преобразование будетъ достигнуто если будемъ знать, какъ выражаются прежнія координаты (x, y) какой-нибудь точки M чрезъ координаты той же точки M новыя относительно системы $x'o'y'$. Не трудно видеть изъ чертежа (фиг. 40), что:

$$\begin{aligned} x &= oA = m + o'A = m + x' \\ y &= AM = n + A'M = n + y'. \end{aligned}$$

Итакъ формулы для переноса начала будутъ:

$$x = m + x' \dots \dots \dots (87)$$

$$y = n + y', \dots \dots \dots (88)$$

гдѣ (m, n) суть координаты новаго начала o' относительно старой системы xoy .

Если какая-нибудь кривая задана уравненіемъ въ координатахъ x, y то чтобы получить ее уравненіе относительно системы $x'o'y'$, достаточно вмѣсто x и y вставить въ данное уравненіе ихъ величины изъ (87) и (88).

Перенесени начала уже достаточно, напримѣръ, для рѣшенія задачи, предложенной въ § 56-омъ, относительно хрты пересѣченія эллиса въ фиг. 39) Уравненіе первого эллиса относительно осей xoy намъ извѣстно $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Уравненіе 2го эллиса относительно осей $x'o'y'$ тоже извѣстно оно будетъ $\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$. Координаты начала o' относительно осей xoy будутъ (a, o) , следовательно, формулы преобразованія (87) и (88) въ настоящемъ случаѣ примутъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + x' \\ y &= y' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (89)$$

подставляя въ уравненіи $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вмѣсто x и y ихъ величинамъ изъ (89), получимъ:

$$\frac{(a+x')^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \dots \dots \dots (90)$$

Такое уравненіе 1-го эллипса относительно двухъ же осей $x'o'y'$ относительно которыхъ намъ известно и уравненіе 2-го эллипса

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \dots \dots \dots (91)$$

Рѣшая теперь съ помощью уравненія (90) и (91) определяемъ координаты точки пересѣченія эллипсовъ по формулѣ (21) величину хорды MN . Продолжая эти вычисленія представляемъ ихъ также въ видѣ уравненія симметричнаго, что для перваго эллипса дала бы намъ одно необратимое и что отвѣтъ долженъ получиться:

$$MN = b\sqrt{\dots}$$

Поворотъ осей.

§ 58. Возьмемъ теперь переходомъ ось осей $x'o'y'$ (т. е. осми $Xo'Y$ фиг. 41). Проверимъ изъ точки M ординату $MA = Y$ и ординату $M_1A_1 = y'$ и проведемъ чрезъ точку A' параллель $A'B'$ въ оси $o'i'$. За-

мѣтимъ, что уголъ $A''mB'' = \varphi$, какъ имѣющій стороны перпендикулярныя сторонамъ угла φ . Изъ чертежа видимъ, что:

$$x' = O'A' = O'B' - A'B' = O'B' - A''B'' = O'A'' \cdot \cos \varphi - A''M \cdot \sin \varphi$$

или,

$$x' = X \cdot \cos \varphi - Y \cdot \sin \varphi \dots (92)$$

и

$$y' = A_1M = A_1B'' + B''M = B_1A'' + B''M = O'A'' \cdot \sin \varphi + A'M \cdot \cos \varphi$$

или:

$$y' = X \cdot \sin \varphi + Y \cdot \cos \varphi. \dots \dots \dots (93)$$

Формулы (92) и (93) и служатъ для перехода отъ системы $x'o'y'$ къ системѣ $Xo'Y$.

Общее преобразованіе координатъ.

§ 59. Соединяя формулы (87) и (88) съ формулами (92) и (93), найдемъ для самаго общаго преобразованія осей Декартовыхъ координатъ въ другія такія формулы (фиг. 40):

$$\left. \begin{aligned} x &= m + X \cos \varphi - Y \sin \varphi \\ y &= n + X \sin \varphi + Y \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (94)$$

Гдѣ m и n суть координаты новаго начала o' относительно старой си-

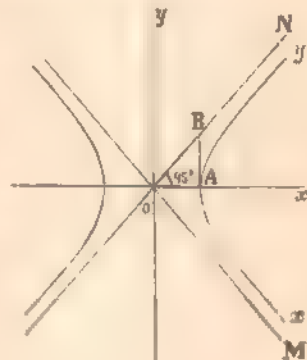
отомы xoy , угол же φ есть угол, заключенный между осями $o'x'$ и $o'X$ или, что то же, угол наклона оси $o'X$ къ оси ox .

Уравнение равносторонней гиперболы, отнесенной къ асимптотамъ.

§ 60. Мы приложимъ преобразование координат къ представляемому при-
мѣру, который познаемъ имѣть связь съ криволинейными уравненіемъ одной гиперболы. Возь-
мемъ такую гиперболу (фиг. 42), асимптоты
— три наклонныя къ ox и oy угломъ 45° ,
такъ что эти асимптоты взаимно-перпендику-
лярны. Гипербола, имѣющая такія асимптоты,
называется *равностороннею*. Изъ треугольника
 AOB видно, что въ этомъ случаѣ $a = b$,
такъ что уравненіе гиперболы будетъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

или: $x^2 - y^2 = a^2 \dots \dots \dots (95)$



Фиг. 42.

И съдвигнемъ такое уравненіе на двѣ единицы, если мы счи-
таемъ за новую ось ox ось $o'X$ и за новую ось oy ось $o'Y$ (ли по-
лучимъ отъ уравненія надъ северную дугу $o'X$ и $o'Y$, то оста-
ется воспользоваться формулами (92) и (93) въ предположеніи $\varphi = 45^\circ$.
Примемъ, что, такъ какъ было въ тригонометри $\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
 $\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Такимъ образомъ, переходимъ отъ (x, y)
къ (X, Y) , въ формулы (92) и (93) примемъ въ восточномъ случаѣ видъ

$$x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}} = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$$

Подставляя эти значенія x и y въ (95), получимъ

$$\frac{(X+Y)^2}{2} - \frac{(X-Y)^2}{2} = a^2$$

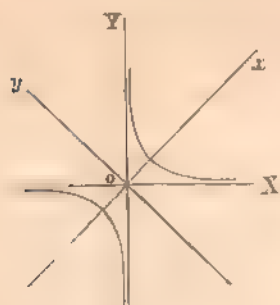
или $2XY = a^2$ или $XY = \frac{a^2}{2}$.

Пологая $\frac{a^2}{2} = m^2$, получимъ:

$$XY = m^2 \dots \dots \dots (96)$$

И это уравненіе выражаетъ, что произведеніи координатъ равняется

постоянному, представляет собою равноугольную гиперболу, отнесенную къ асимптотамъ (фиг. 43).

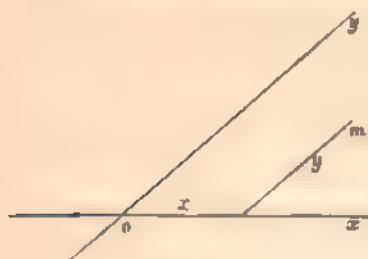


Фиг. 43

Очень часто въ различныхъ вопросахъ приходится имѣть дѣло съ такими двумя переменными величинами, произведение которыхъ остается постояннымъ. Совмѣстное изменение такихъ величинъ, называется, изображается совмѣстнымъ измененіемъ абсциссы и ординаты равноугольной гиперболы (фиг. 43), отнесенной къ асимптотамъ. Здѣсь видно, какъ, съ увеличеніемъ одной изъ переменныхъ до безконечности другая уменьшается до нуля.

Косоугольныя координаты.

§ 61. Кромѣ прямоугольныхъ Декартовыхъ координатъ существуютъ еще *косоугольныя*, въ которыхъ (фиг. 44) оси неперпендикулярны между собою. Въ такой системѣ ординатю точки *m* служитъ прямая, проведенная чрезъ эту точку параллельно оси *y* до пересѣченія *A* съ осью *x*, абсциссою же служитъ разстояніе этого пересѣченія *A* отъ начала.



Фиг. 44.

Кривыя второго порядка.

§ 62. Въ строго научныхъ курсахъ Аналитической Геометрии изученіе эллипса, параболы и гиперболы ведется необыкновенно стройно при широкоемъ примѣненіи преобразования координатъ. А именно выводится самое общее уравненіе второго порядка:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

и доказывается, что это уравненіе (а слѣдовательно и всякое уравненіе 2-го порядка съ двумя переменными) можетъ изображать три лишь кривыя, смотря по тому, будетъ ли величина $B^2 - 4AC$ больше, равна или меньше нуля. А именно, 1) При $B^2 - 4AC < 0$ уравненіе (97) принадлежитъ къ типу *эллипса* и можетъ представлять собою, а) эллипсъ, б) окружность, в) точку, г) мнимый эллипсъ. 2) При $B^2 - 4AC = 0$ уравненіе (97) принадлежитъ къ типу *параболы* и можетъ представлять собою, а) параболу, б) двѣ параллельныя прямыя, в) двѣ мнимыя прямыя и г) двѣ совпадающія прямыя. 3) При $B^2 - 4AC > 0$ уравненіе (97) принадлежитъ къ типу *гиперболы* и можетъ представлять собою, а) гиперболу и б) двѣ пересѣкающіяся прямыя.

Кроме того оказывается, что уравнение второго порядка только в том случае представляет пару прямых, если величина, называемая *дискриминантом* и составленная из коэффициентов уравнения следующим образом:

$$BDE - CD^2 - AE^2 - F(B^2 - 4AC) \dots (98)$$

окажется равной нулю.

Кривые эллипса, параболы и гиперболы называются *кривыми 2-го порядка*. В § 114 мы покажем, что они получаются от пересечения круглого конуса плоскостью. Поэтому их зовут также *коническими сечениями*.

Не входя уместным, но напомним руководств, имеем, в виду лишь насущными потребностями приложений приводить изыскания уравнения второго порядка во всей его стройности, мы ограничимся применением преобразования координат к выводу таких уравнений кривых 2-го порядка, которые прежде всего узнают на переходе от параболы к эллипсу и гиперболы.

Уравнения эллипса, параболы и гиперболы относительно вершинъ.

§ 63. Примем за начало вершину эллипса и большую ось xx' (ср. фиг. 45) тогда переходя от уравнения $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ къ координатным x, y придется совершить помощью формулы $x_1 = x - a; y_1 = y$ и получится уравнение эллипса

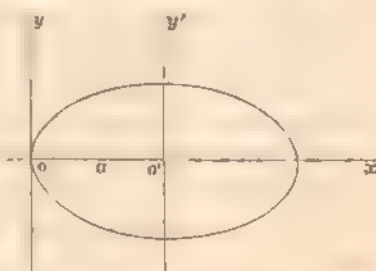
$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

или: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} + 1 + \frac{y^2}{b^2} = 1$

или $y^2 = 2 \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2$

Введя параметр $p = \frac{b^2}{a}$, получим:

$$y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2} x^2 \dots (99)$$



Фиг. 45

Примем за начало координат вершину эллипса A . Переходя от x', y' къ x, y придется сделать по формулам $x_1 = x + a, y_1 = y$.

Вставив вместо x', y' эти ихъ выражения въ уравнение гиперболы $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$, получим, $\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, или, $y^2 = 2 \frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2$

Введя параметр $p = \frac{b^2}{a}$, получим:

$$y^2 = 2px + \frac{b^2}{a^2} x^2 \dots (100)$$

Наконец мы знаем уравнение параболы

$$y^2 = 2px \dots (101)$$

Сравнивая уравнения (99) и (100) съ (101) замечаем, что эллипс обра-

щается въ параболу при $\frac{b^2}{a^2} = 0$, то есть она тѣмъ болѣе сходится съ параболою, чѣмъ менѣе отношеніе $\frac{b}{a}$.

Точно также и гипербола обращается въ параболу при $\frac{b^2}{a^2} = 0$. Вообще эллипсъ и гипербола отличаются отъ параболы добавочнымъ членомъ $\frac{b^2}{a^2} x^2$, который въ случаѣ эллипса вычитается, а въ случаѣ гиперболы — прибавляется. Парабола представляетъ собою какъ бы переходъ отъ эллипса къ гиперболѣ.

Примѣчаніе.

§ 64. Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы познакомимся еще со многими другими свойствами кривыхъ второго порядка и между прочимъ: дифференціальное исчисленіе позволитъ намъ познакомиться со свойствами ихъ касательныхъ, а интегральное — съ вычисленіемъ площадей, ограниченныхъ этими кривыми.

Первое понятіе о функціи.

§ 65. Если какая нибудь величина измѣняется съ измѣненіемъ въ другой величинѣ, и при томъ такъ, что, при всякомъ данномъ значеніи 2-ой величинѣ, первая величина имѣетъ вполнѣ определенное значеніе, или по крайней мѣрѣ конечное число определенныхъ значеній, то первая изъ этихъ величинъ называется *функціею* второй. Напримѣръ объемъ тѣла есть функція его температуры, потому что съ измѣненіемъ температуры измѣняется объемъ, и (при данномъ давленіи) всякой данной температурѣ соответствуетъ вполнѣ определенная величина объема даннаго тѣла. Если некоторая переменная величина разсматривается какъ функція другой величинѣ, то послѣдняя называется *независимою переменною*. Напримѣръ, ордината y прямой $y = kx + b$ есть функція ея абсциссы x , которая называется *независимою переменною*. Мы измѣняемъ какъ угодно независимую переменную и изслѣдуемъ какъ при этомъ измѣняется ея функція (см. §§ 6 и 10).

Законъ, по которому измѣняется функція съ измѣненіемъ независимаго переменнаго, можетъ быть данъ математическою формулою. Напримѣръ, ордината прямой измѣняется съ измѣненіемъ ея абсциссы по закону, выражаемому формулою $y = kx + b$. Ордината окружности $x^2 + y^2 = R^2$ измѣняется съ измѣненіемъ абсциссы по закону $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$. Здѣсь каждому значенію x соответствуютъ два значенія y .

Съ этой точки зрѣнія всякая формула, заключающая въ себѣ переменное количество x и сколько угодно постоянныхъ величинъ, разсматривается какъ функція независимаго переменнаго x , потому что величина, выраженная такою формулою, измѣняется съ измѣненіемъ x .

Если дана формула, по которой функція определяется чрезъ независимыя переменныя, то такая функція называется *явною*. Напримѣръ, y есть явная функція отъ x , если дано $y = \frac{Ax^2 + Bx + C}{1 + \sin x}$. Какъ бы ни была

сложна формула, содержащая въ себѣ одно переменное x и выражающая y , говорить, что y есть явная функция x са.

Но во многихъ случаяхъ весьма удобно бываетъ обозначить только, что y есть функция отъ x , не давая закона зависимости между y и x , не давая никакой определенной формулы для выражения y чрезъ x ; тогда пишутъ такъ: $y = f(x)$, или такъ: $y = F(x)$ или $y = \varphi(x)$; всѣ эти уравнения выговариваются такъ: y равно функции отъ x , или такъ: y есть функция отъ x , или такъ: иречь равняется функции x са. Тутъ уже не дается, какая именно функция отъ x есть y , но просто выражается, что между y и x существуетъ какая-то зависимость. Такия функции называются *м-ными*. Разсмотрѣние возможныхъ функций и приведенный выше способъ ихъ обозначенія вносятъ большую общность въ математику и упрощаютъ языкъ, на которомъ выражаются математики.

Если какая нибудь переменная величина зависитъ отъ нѣсколькихъ другихъ такимъ образомъ, что измѣняется съ измѣненіемъ каждой изъ нихъ и при определенныхъ ихъ значеніяхъ имѣетъ вполнѣ определенное значеніе (или по крайней мѣрѣ конечное число значеній), то первая изъ этихъ величинъ называется функцией остальныхъ. Такая функция называется функцией многихъ переменныхъ. Онѣ бываютъ явныя и неявныя. Напримеръ z есть *явная* функция отъ x и y , если z выражено формулою, заключающею въ себѣ x и y ; напримеръ, $z = A \sin(x + by)$. Неявныя функции многихъ переменныхъ выражаются такъ:

$z = f(x, y)$ читается: z равняется функции x са и y реча;

$u = f(x, y, z)$ читается: u равняется функции x са, y реча и z еда и такъ далѣе.

Примѣнимъ понятіе о функции къ выраженію въ которыхъ общія положенія Аналитической Геометріи.

Кривыя различныхъ порядковъ.

§ 66. Всякое уравненіе съ двумя переменными x и y можетъ быть, перенесеніемъ всѣхъ членовъ въ одну сторону, выражено такъ:

$$f(x, y) = 0. \quad \dots \dots \dots (102)$$

Напримеръ уравненіе $x^2 + 3x^2y = ax + b$ можно написать такъ: $x^2 + 3x^2y - ax - b = 0$, или: $f(x, y) = x^2 + 3x^2y - ax - b = 0$.

Если $f(x, y)$ первого порядка, то, какъ мы видѣли въ § 16-омъ, такое уравненіе выражаетъ собою прямую.

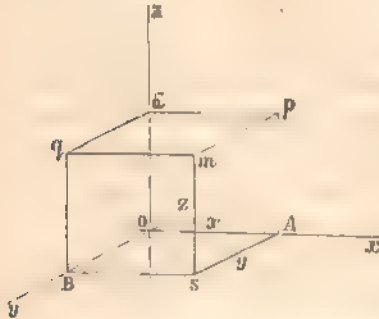
Если $f(x, y)$ второго порядка, то, какъ мы видѣли въ § 62-омъ, уравненіе (102) выражаетъ собою кривую второго порядка или пару прямыхъ (для общности) и пара прямыхъ считается кривою второго порядка.

Если $f(x, y)$ имѣетъ m -ый порядокъ, то и кривая, выражаемая уравненіемъ (102), называется кривою m -го порядка.

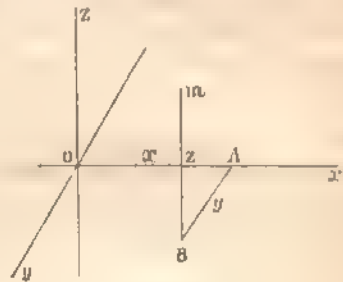
Аналитическая Геометрія въ пространствѣ.

Опредѣленіе положенія точки прямоугольными координатами.

§ 67. Положеніе точки въ пространствѣ опредѣляется расстояніями ея отъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ *плоскостей координатъ* xoy , yoz , zox (фиг. 46). Прямыя ox , oy , oz , по которымъ пересекаются между собою плоскости координатъ, называются *осями координатъ*. Оси координатъ взаимно пересекаются въ точкѣ O , называемой *началомъ*. Перпендикуляры mp , mq , ms , опущенные изъ точки m на плоскости координатъ и называются *координатами точки* (точно по сказанному въ началѣ этого параграфа). Дополнивъ къ этимъ перпендикулярамъ прямоугольный параллелепипедъ и припомнимъ, что противоположныя ребра параллели-



Фиг. 46



Фиг. 47.

ны равны между собою, видимъ, что упомянутыя перпендикуляры соответственно равны: OA , OB и OC — ребра сходящияся въ началѣ, которыя и могутъ быть приняты за координаты той вершины m параллелепипеда, которая проектируется на начало o . Наконецъ приняты въ началѣ этого параграфа координаты разныя слѣдующимъ образомъ: (фиг. 47) — расстояние z точки m отъ плоскости (xoy) , расстояние y основанія B перпендикуляра mB отъ оси x и расстояние x основанія A перпендикуляра BA отъ начала.

Если направленія ox , oy и oz осей приняты за положительныя, то противоположныя имъ направленія принимаются за отрицательныя.

Поверхность выражается уравненіемъ вида: $f(x, y, z) = 0$

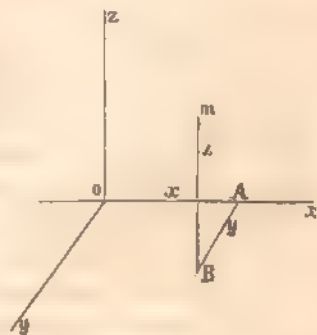
§ 68. Подобно тому какъ линія выражается на плоскости уравненіемъ вида $f(x, y) = 0$, точно такъ же всякая закономѣрная поверхность въ прямоугольныхъ координатахъ x, y, z выражается уравненіемъ вида

$$f(x, y, z) = 0 \dots \dots \dots (193)$$

Докажемъ это. Пусть намъ дана какая-нибудь закономерная поверхность (фиг. 48). Возьмемъ на ней какую-нибудь точку m , проведемъ ей координаты $x = OA$; $y = AB$; $z = Bm$. Съ измѣненіемъ положенія точки m на поверхности и точка B будетъ измѣнять свое положеніе на плоскости (x, y) , и слѣдовательно координаты x и y будутъ измѣняться. Следовательно ордината z точки m мѣняется съ измѣненіемъ x и y такъ, что для каждой совокупности значений x и y ордината z имѣетъ вполне определенное значение. Значитъ z есть функция двухъ независимыхъ переменныхъ x, y , то есть: $z = F(x, y)$. Перенеся всѣ члены этого уравненія въ одну часть получимъ уравненіе вида (103), что и требовалось доказать. Напримѣръ уравненіе

$$z = ax^2 + bx + y^2,$$

вида $z = F(x, y)$, можно написать такъ $ax^2 + bx + y^2 - z = 0$ въ видѣ $f(x, y, z) = 0$. Здѣсь $ax^2 + bx + y^2 - z$ кратко обозначено чрезъ $F(x, y)$, тогда какъ $ax^2 + bx + y^2 - z$ обозначено чрезъ $f(x, y, z)$.



Фиг. 48

Уравненіе сферической поверхности, описанной радиусомъ R изъ начала.

§ 69. Выведемъ, для примѣра, уравненіе сферической поверхности имѣющей центръ въ началѣ, основанное свойство которой, какъ извѣстно, состоитъ въ томъ, что всѣ точки этой поверхности (фиг. 49) находятся въ одинаковомъ разстояніи отъ центра. Пусть R есть радиусъ такой сферы.

Изъ треугольника oBm имѣемъ

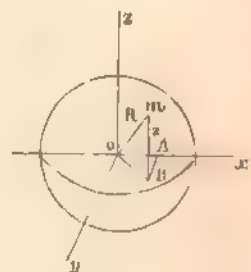
$$om^2 = R^2 = oB^2 + z^2.$$

Изъ треугольника же oAB имѣемъ

$$oB^2 = x^2 + y^2.$$

Итакъ,
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \dots (104)$$

Это уравненіе вѣрно для всѣхъ точекъ нашей сферической поверхности.



Фиг. 49

Слѣдовательно, это уравненіе (104) есть уравненіе сферической поверхности, описанной радиусомъ R изъ начала. Перенеся R^2 въ лѣвую часть уравненія, получимъ $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ имѣющее видъ $f(x, y, z) = 0$.

Всякое уравненіе $f(x, y, z) = 0$ между координатами x, y, z представляетъ собою поверхность.

§ 70. Наоборотъ, всякое уравненіе $f(x, y, z) = 0$ между тремя координатами x, y, z представляетъ собою поверхность. Покажемъ это, слѣ-

чала для частных случаев уравнения $f(x, y, z) = 0$. Одним из таких частных случаев будет такой, когда данное уравнение не заключает в себя координат x и y , когда, например, оно таково:

$$z = c; \text{ или: } z - c = 0, \dots \dots \dots (105)$$

где c положительно.

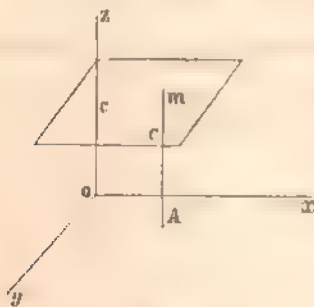
Это уравнение обозначает собою (фиг. 50) совокупность точек, находящихся на одинаковом расстоянии c от плоскости (x, y) в сторону положительных z . Такая совокупность точек, как известно из элементарной геометрии, есть *плоскость, параллельная плоскости (x, y) и отстоящая от нея на расстоянии c* .

Точно так же уравнение $x - c = 0$ представляет собою плоскость, параллельную плоскости (y, z) ; уравнение $y - c = 0$ представляет собою плоскость, параллельную плоскости (z, x) .

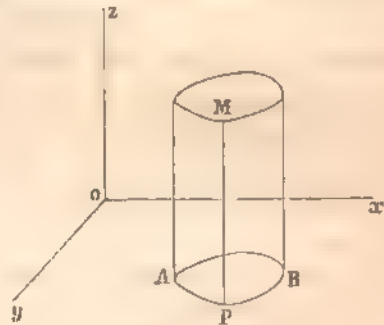
Разсмотрим теперь тот случай, когда уравнение $f(x, y, z) = 0$ не содержит в себя одной координаты. Например такое уравнение

$$f(x, y) = 0, \dots \dots \dots (106)$$

не содержит в себя z , при чем сказано, что рассматриваемое уравнение относится к пространству трех измерений. Мы знаем уже из пре-



Фиг. 50.



Фиг. 51.

дыщей главы, что уравнение (106) в плоскости (x, y) (фиг. 51) представляет собою некоторую линию AB . Проведем через какуюнибудь точку P этой линии прямую PM параллельную oz . Так как координата z остается неопределенною, то координаты всех точек прямой удовлетворяют уравнению (106), потому что x и y всех этих точек удовлетворяют ему. Но точку P мы брали на линии AB произвольно, следовательно координаты всех точек прямых, проходящих через все точки линии AB параллельно оси oz , удовлетворяют уравнению (106). Совокупность всех таких прямых представляет собою цилиндр (M) , параллель-

* В элементарной геометрии рассматривается только круглый цилиндр, направляющая которого есть окружность. В математике же цилиндром называется всякая поверхность, прямолинейная обрамляющая которой взаимно-параллельны, какова бы ни была направляющая.

ный оси oz . Итакъ уравненіе (106) представляетъ собой *цилиндръ, параллельный оси oz* .

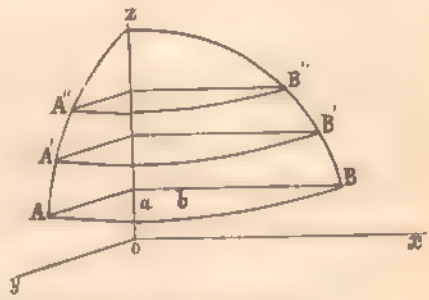
Точно такъ же: уравненіе $f(y, z) = 0$ представляетъ собою цилиндръ, параллельный оси x ; уравненіе $f(x, z) = 0$ представляетъ собою цилиндръ, параллельный оси y .

Разсмотримъ наконецъ уравненіе

$$f(x, y, z) = 0, \dots \dots \dots (103)$$

содержащее все три координаты. Проведемъ на разстоянн c отъ плоскости (x, y) параллельную къ ней плоскость ab (фиг. 52). Для всехъ точекъ этой плоскости $z = c$. Следовательно, уравненіе (103) для точекъ только этой плоскости обратится въ $f(x, y, c) = 0$,

но такое уравненіе съ двумя переменными, относящееся только къ одной плоскости ab , какъ мы знаемъ изъ предыдущей главы, представляетъ собою некоторую кривую AB , лежащую въ этой плоскости. Измѣняя c на небольшую величину, получимъ другую кривую $A'B'$ въ плоскости параллельной плоскости ab . Такимъ образомъ получимъ цѣлый рядъ кривыхъ, совокупность которыхъ составитъ некоторую поверхность. Итакъ, уравненіе (103) представляетъ собою поверхность. Если же оно не содержитъ какой либо координаты, то представляемая имъ поверхность цилиндрическая (см. ур. 106). Если уравненіе (103) содержитъ только одну координату, то (см. ур. 105) представляемая имъ поверхность есть плоскость параллельная одной изъ плоскостей координатъ.



Фиг. 52.

Представленіе линій совокупностью двухъ уравненій съ тремя переменными.

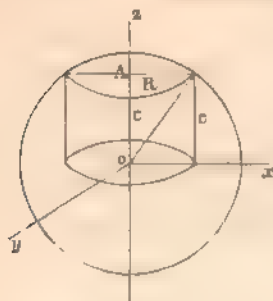
§ 71. Линія (прямая или кривая) представляется при помощи пространственныхъ координатъ x, y, z , какъ пересѣченіе двухъ поверхностей

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ f_1(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (107)$$

Такъ какъ всякая линія можетъ быть разсматриваема какъ пересѣченіе безчисленныхъ паръ поверхностей, то линія можетъ быть выражена безконечнымъ числомъ паръ уравненій вида (107). Напримѣръ линія (107) выражается и такою совокупностью уравненій

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ f(x, y, z) - k \cdot f_1(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (108)$$

какое бы ни было k , потому что координаты, удовлетворяющія уравнениямъ (107), удовлетворяютъ и уравнениямъ (108), и обратно: координаты, удовлетворяющія уравнениямъ (108) удовлетворяютъ и уравнениямъ (107), какъ это видно изъ состава той и другой совокупности уравнений.



Фиг. 53.

Примѣръ. Окружность, описанная радиусомъ R изъ точки A въ плоскости, параллельной плоскости (x, y) (фиг. 53) и отстоящей отъ нея на разстоянн c , представляетъ собою пересѣченное цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ съ плоскостью $z = c$ и потому можетъ быть выражена совокупностью уравнений.

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 \\ z &= c \end{aligned} \right\} \dots \dots (109)$$

но эта же окружность можетъ быть рассматриваема какъ пересѣченіе плоскости $z = c$ съ сферою $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + c^2$, и потому можетъ быть выражена совокупностью уравненій

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 + c^2 \\ z &= c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (110)$$

Представленіе линіи пересѣченіемъ двухъ цилиндровъ.

§ 72. Если дана линія уравненіями

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ f_1(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (111)$$

исключая y изъ этихъ двухъ уравненій, получимъ уравненіе вида:

$$F(x, z) = 0, \dots \dots \dots (112)$$

исключая же изъ уравненій (111) координату x , получимъ уравненіе вида:

$$F_1(y, z) = 0, \dots \dots \dots (113)$$

Уравненіе (112) представляетъ собою (см. § 70) цилиндръ, параллельный оси y ; уравненіе же (113) выражаетъ собою цилиндръ, параллельный оси x . Этими двумя уравненіями замѣнена теперь система уравненій (111). Итъакъ, *всякая линія можетъ быть рассматриваема, какъ пересѣченіе двухъ цилиндровъ, изъ которыхъ одинъ параллеленъ одной оси координатъ, а другой параллеленъ другой оси.*

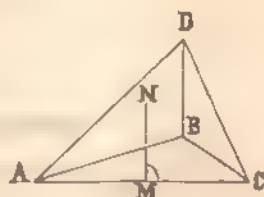
Понятіе о прозекціяхъ.

§ 73. Основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки m на данную прямую, называется ортогональною прозекціею точки m на эту прямую.

Основание перпендикуляра, опущенного из данной точки m на данную плоскость, называется *проекцией точки m на эту плоскость*. Часть прямой, ограниченная двумя точками, называется *прямолинейным отрезком* или *вектором*.

Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из концов прямолинейного отрезка на данную прямую, называется *проекцией прямолинейного отрезка на эту прямую*. При этом прямолинейный отрезок может лежать на прямой не параллельной и перпендикулярной ей.

Угол между двумя непараллельными и непересекающимися прямыми называется *углом*, составленный одной из данных прямых с прямой, проходящей через одну из ее точек параллельно другой данной прямой. Например (фиг. 54) угол, составленный непараллельными и непересекающимися взаимно ребрами AC и BD пирамиды $ABCD$, равен углу NMC , составленному ребром AC с прямой MN , проведенной параллельно ребру BD через какую-нибудь точку M ребра AC .



Фиг. 54

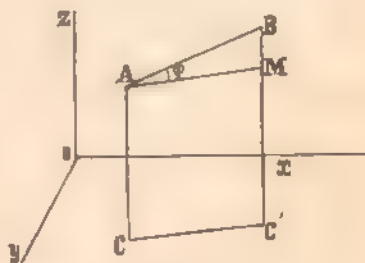
Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из концов прямолинейного отрезка на данную плоскость, называется *проекцией прямолинейного отрезка на эту плоскость*.

Длина проекции на плоскость прямолинейного отрезка.

§ 74. *Длина проекции на плоскость (101) прямой и данного отрезка AB (фиг. 55) равна произведению $AB \cdot \cos \varphi$ длины отрезка на косинус угла, составляемого отрезком с плоскостью xy . Докажем это. Проведем через A прямую AM параллельную прямой CC' данного отрезка. Из треугольника $ВМ$ видим, что:*

$$CC' = AM = AB \cdot \cos \varphi. \quad (114)$$

что и требовалось доказать.

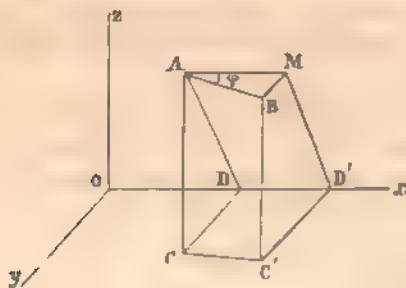


Фиг. 55.

Длина проекции прямолинейного отрезка на прямую.

§ 75. *Длина проекции прямолинейного отрезка AB на прямую ox равна произведению $AB \cdot \cos \varphi$ отрезка на косинус угла, составляемого им с прямой ox . Докажем это (фиг. 56). Пусть AB будет данный отрезок. Проведи через концы его плоскости ACD и $BC'D'$ перпендикулярные к прямой ox получим проекцию DD' отрезка AB на пря-*

мую oz . Проведемъ чрезъ A прямую AM параллельную DD' до встрѣчи



Фиг. 56.

въ точкѣ M съ плоскостью $BC'D'$. Изъ треугольника AMB , прямоугольнаго при M , имѣемъ:

$$AM = AB \cdot \cos \varphi.$$

Но AM равна DD' какъ отрезокъ параллельной между параллельными плоскостями. Следовательно:

$$DD' = AB \cdot \cos \varphi; \quad (115)$$

что и требовалось доказать.

Проекція послѣдней стороны многоугольника.

§ 76. Если въ пространствѣ данъ треугольникъ ABC , то проекція стороны AC на какую бы то ни было прямую равна суммѣ проекцій на ту же прямую двухъ другихъ сторонъ AB и BC . Пусть a, b, c будутъ проекціи вершинъ A, B и C даннаго треугольника на упомянутую произвольно взятую прямую которая можетъ даже и не находиться въ плоскости ABC . Если b находится между a и c , то ac очевидно равно $ab + bc$. Если c находится между a и b , то ac будетъ равно разности ab и bc , но направлеше bc противоположно направлешю ab и потому ac является

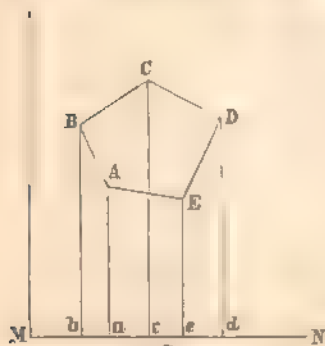


Фиг. 57

всетаки алгебраическою суммою частей ab и bc (фиг. 57). Итакъ теорема доказана. Вместо трехъ точекъ A, B, C можно взять какое угодно число точекъ въ пространствѣ, провести чрезъ нихъ послѣдовательно прямая, составить пространственный многоугольникъ и совершенно такимъ же способомъ доказать, что вѣрно.

Теорема: При проекировании пространственнаго многоугольника на какую-либо прямую, проекція послѣдней стороны многоугольника равна суммѣ проекцій прочихъ сторонъ его.

Эта теорема справедлива и въ томъ случаѣ, если многоугольникъ плоская и проекируется на прямую, лежащую въ его плоскости. На такомъ частномъ случаѣ мы повнимъ смыслъ общей теоремы. Пусть $ABCDE$ будетъ такой многоугольникъ. Проектируемъ его на прямую MN (фиг. 58).



Фиг. 58.

Посмотримъ какъ выразится проекція ae стороны AE чрезъ проекціи другихъ сторонъ: при этомъ считаемъ положительными тѣ проекціи, которыя идутъ въ направленіи ae указанномъ

стрѣлкою; проэкции же, идущія въ противоположномъ направленіи считаемъ отрицательными. Получимъ:

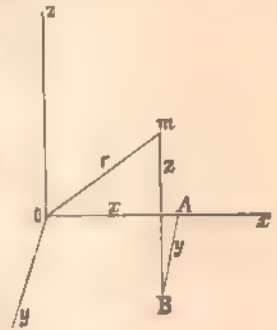
$$\begin{aligned} av &= (-ba) + bc + cd + (-ed) \\ &= bc + cd - ba - ed = bd - ba - ed. \end{aligned}$$

Равенство, къ которому мы пришли: $ac = bd - ba - ed$, очевидно изъ чертежа.

Эта весьма важная теорема въ особенности часто применяется въ такомъ видѣ, при проэктированіи, на какую-либо прямую, координатъ x , y , z и радиуса-вектора r какой-либо точки M (фиг. 59); сумма проэктий координатъ равна проэкции радиуса-вектора. Дѣйствительно здѣсь r есть послѣдняя сторона многоугольника $OABMO$, составленнаго изъ сторонъ:

$$OA = x; AB = y; BM = z; OM = r.$$

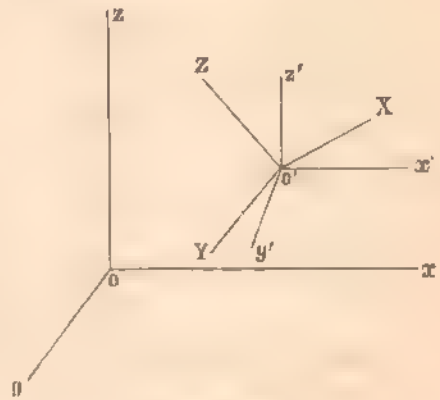
Эта послѣдняя теорема дастъ намъ возможность въслѣдствіи (§ 79) весьма легко найти формулы преобразованія однихъ координатъ x , y , z въ другія X , Y , Z .



Фиг. 59.

Преобразованіе координатъ въ пространствѣ.

§ 77. Подобно тому, какъ на плоскости (§ 36, фиг. 40) мы совершали переходъ отъ однихъ координатъ къ другимъ въ два пріема: 1) перенесеніемъ начала и 2) поворотомъ осей, точно такъ же, въ два пріема, будемъ переходить отъ координатъ x , y , z (фиг. 60) къ координатамъ X , Y , Z : сперва перенесемъ начало изъ o въ o' , оставляя оси x' , y' , z' параллельными осямъ x , y , z , а потомъ повернемъ систему x' , y' , z' въ положеніе X , Y , Z .



Фиг. 60

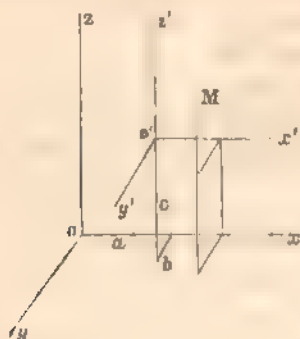
Перенесеніе начала.

§ 78. Перейдемъ отъ осей x , y , z къ параллельнымъ съ ними осямъ x' , y' , z' (фиг. 61). Пусть a , b , c будутъ координаты новаго начала o' относительно старой системы x , y , z . Не трудно видѣть, что:

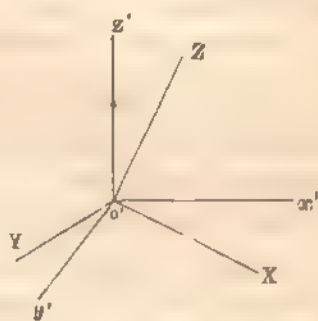
$$\left. \begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \\ z &= z' + c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (116)$$

Поворот осей.

§ 79. Перейдем теперь от системы x, y, z к системе X, Y, Z , имеющей то же начало o' , но другое направление осей. Пусть ось X составляет с осями x', y', z' углы α, β, γ ; ось Y составляет с осями x', y', z' углы α', β', γ' ; ось Z составляет с осями x', y', z' углы $\alpha'', \beta'', \gamma''$. Переход возможен тогда и возможен, когда эти углы даны. Помни, что проекция отрезка равна его длине, помноженной на косинус угла, со-



Фиг. 61.



Фиг. 62.

ставляемого имъ съ прямою, на которую онъ проектируется (115), приложимъ скалярное въ концѣ § 76-го, согласно чему проекция x' (фиг. 62) координаты x' на ось x' (себя x) равна суммѣ $X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma$ проекцій координатъ X, Y, Z на ту же ось x . Составляя такія же равенства для y' и z' , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} x' &= X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma \\ y' &= X \cos \alpha' + Y \cos \beta' + Z \cos \gamma' \\ z' &= X \cos \alpha'' + Y \cos \beta'' + Z \cos \gamma'' \end{aligned} \right\} \dots \dots (117)$$

Общее преобразование.

§ 80. Соединяя формулы (117) съ (116) получимъ для общего перехода (фиг. 60):

$$\left. \begin{aligned} x &= X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma + a \\ y &= X \cos \alpha' + Y \cos \beta' + Z \cos \gamma' + b \\ z &= X \cos \alpha'' + Y \cos \beta'' + Z \cos \gamma'' + c \end{aligned} \right\} \dots \dots (118)$$

Разстояніе между двумя точками.

§ 81. Выведемъ для двухъ точекъ (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) въ пространстве формулу и дѣйствую (21), данной въ главѣ I-ой. Пусть первая точка будетъ A (фиг. 63), а вторая B . Проведи чрезъ A и B плоскости,

параллельныя плоскостямъ координатъ, получимъ параллелепипедъ, въ которомъ, какъ видно изъ чертежа, ребра Aa , ab и bB соответственно равны:

$$Aa = x_2 - x_1$$

$$ab = y_2 - y_1$$

$$\dots bB = z_2 - z_1, \dots$$

Сумма квадратовъ этихъ трехъ реберъ равна AB^2 , какъ это видно изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABb и Aba , въ которыхъ $AB^2 = Ab^2 + bB^2$, $Ab^2 = Aa^2 + ba^2$. Итакъ искомое расстояние δ между A и B определится изъ формулы:

$$\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \dots (119)$$

Расстояніе точки отъ начала.

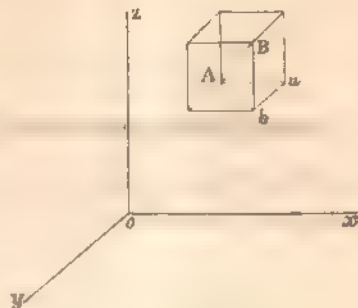
§ 82. Если точка A находилась бы въ началѣ, т. е. ея координаты x_1 , y_1 , z_1 равнялись бы нулю и формула (119) обратилась бы въ

$$\delta = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \dots (120)$$

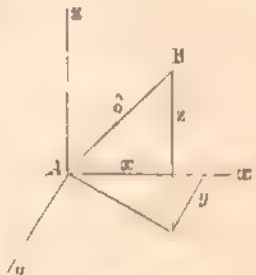
эта формула определяетъ расстояние точки отъ начала.

Сферическія координаты.

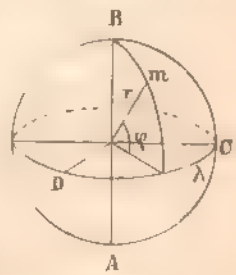
§ 83. Аналогично съ полярными координатами на плоскости (§ 51) употребляются для определения положенія точки въ пространствѣ *сферическія* координаты, которыя весьма сходны съ географическими координатами. Изобразимъ начало O , за одну изъ координатъ точки m (фиг. 65) принимается расстояние ея r отъ начала, называемое *радиусомъ-актюсомъ*. Этимъ радиусомъ описываемъ около начала сферу и выобразимъ плоскость меридіана OBV и плоскость экватора OCD , проходящую чрезъ начало O . Уголъ λ , составляемый плоскостью меридіана съ плоскостью меридіана проходящаго чрезъ m принимается за другую координату точки m и называется ея *долготой*. Уголъ φ , составляемый радиусомъ-векторомъ съ плоскостью экватора, принимается за третью координату и называется *широтой*. Перпендикуляръ DB , возставленный въ плоскости въ центрѣ, называется *полярною осью*. Итакъ,



Фиг. 63.



Фиг. 64.



Фиг. 65.

имѣется три «сферическія» координаты:

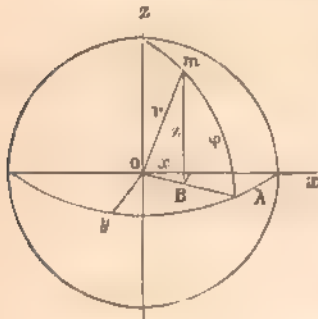
r радиусъ-векторъ,

λ долгота,

φ широта.

Преобразование сферическихъ координатъ въ Декартовы и обратно.

§ 84. Очень часто приходится преобразовывать Декартовы координаты x, y, z въ такія сферическія r, λ, φ , въ которыхъ плоскость (x, y) служитъ экваторомъ, а плоскость (x, z) первымъ меридіаномъ.



Фиг. 66

Изъ чертежа (фиг. 66) видно, что $x = OB \cdot \cos \lambda$; $y = OB \cdot \sin \lambda$, тогда какъ изъ треугольника OMB видимъ, что

$$OB = r \cdot \cos \varphi.$$

Слѣдовательно:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ y &= r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ z &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots (121)$$

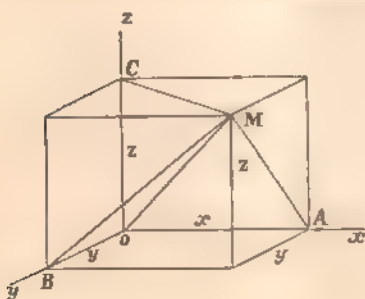
Эти формулы служатъ для перехода отъ Декартовыхъ координатъ x, y, z къ полярнымъ. Изъ нихъ не трудно вывести для обратнаго перехода формулы.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \dots \dots \dots (122)$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{y}{x} \dots \dots \dots (123)$$

$$\sin \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \dots \dots \dots (124)$$

Свойство угловъ, составляемыхъ радиусомъ-векторомъ съ осями координатъ.



Фиг. 67.

§ 85. Пусть r есть радиусъ-векторъ OM точки M (фиг. 67) и пусть α, β, γ суть углы, составляемые радиусомъ-векторомъ r съ осями координатъ. Замѣчая, что r есть діагональ параллелепипеда, у котораго ребра x, y, z сходятся въ o , мы видимъ, что треугольники oAM, oBM и oCM прямоугольны, потому что углы, находящиеся при вершинахъ ихъ A, B и C , суть прямые. Изъ этихъ треуголь-

никовъ, по известному въ тригонометрии соотношенію между катетомъ и

гипотенузой, имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos \alpha; & \cos \alpha &= \frac{x}{r} \\ y &= r \cdot \cos \beta; & \cos \beta &= \frac{y}{r} \\ z &= r \cdot \cos \gamma; & \cos \gamma &= \frac{z}{r} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (125)$$

Отсюда видно, что координаты точки суть проеции ея радиуса-вектора на оси координатъ (см. § 75).

Возводя равенства (125) почленно въ квадратъ и складывая, получимъ:

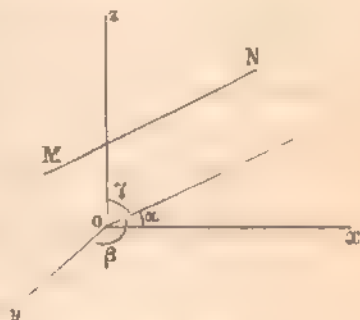
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cdot \cos^2 \alpha + r^2 \cdot \cos^2 \beta + r^2 \cdot \cos^2 \gamma.$$

Пользуясь формулою (122) и выводомъ въ правой части только что написаннаго равенства r^2 за скобки, получимъ:

$$r^2 = r^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma),$$

откуда: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \dots \dots \dots (126)$

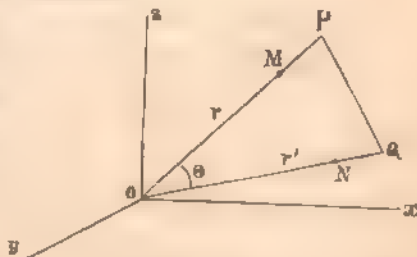
Углы, составляемые какою бы то ни было прямою (фиг. 68) MN съ осями, равны угламъ, составляемымъ съ осями прямою, проходящею чрезъ начало и параллельною прямой MN . Формула (126) показываетъ, следовательно, что *сумма квадратовъ косинусовъ угловъ, составляемыхъ прямою съ осями координатъ, всегда равна 1*. Формула (126) аналогична известной тригонометрической формулѣ $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ и имѣетъ такое же важное значеніе. Величины: $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ называются *косинусами направления прямой*.



Фиг. 68.

Опредѣленіе угла, составляемаго двумя прямыми по даннымъ косинусамъ наклоненія этихъ прямыхъ.

§ 86. Пусть OM и ON будутъ прямыми. Косинусы наклоненія прямой OM суть: $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$. Косинусы наклоненія прямой ON суть: $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$. Требуется опредѣлить уголъ θ , заключенный между OM и ON (фиг. 69).



Фиг. 69

Возьмемъ на данныхъ прямыхъ какія-либо точки P и Q . Обозначимъ

координаты P чрезъ (x, y, z) и координаты точки Q чрезъ (x', y', z') .

Из треугольника OPQ выводимъ (квадратъ стороны, лежащей противъ угла θ):

$$PQ^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta. \quad (127)$$

По формулѣ (119) имѣемъ:

$$PQ^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2. \quad (128)$$

Кромѣ того мы знаемъ по (122), что:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Раскрывъ скобки въ (128) и пользуясь формулами (127) и (129), получимъ:

$$rr' \cos \theta = xx' + yy' + zz',$$

откуда, пользуясь (125), получимъ:

$$\cos \theta = \cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \beta \cdot \cos \beta' + \cos \gamma \cdot \cos \gamma'. \quad (130)$$

Итакъ косинусъ угла, составляемаго двумя прямыми, равенъ суммѣ произведеній косинусовъ наклоновъ этихъ прямыхъ.

Если двѣ прямыя взаимно-перпендикулярны, то $\cos \theta = 0$, потому что въ этомъ случаѣ $\theta = 90^\circ$. Следовательно въ случаѣ взаимной перпендикулярности двухъ прямыхъ:

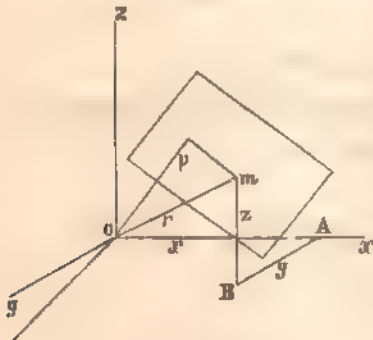
$$\cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \beta \cdot \cos \beta' + \cos \gamma \cdot \cos \gamma' = 0. \quad (131)$$

Уравненіе плоскости, проходящей на разстояніи p отъ начала.

§ 87. Найдемъ уравненіе плоскости, зная, что перпендикуляръ, спущенный на нее изъ начала, имѣетъ длину p и косинусы его наклоновъ суть: $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ (фиг. 70). Рассмотрим многоугольникъ $OABm$, составленный координатами x , y , z какой нибудь точки m данной плоскости и ея радиусомъ-векторомъ, и приложимъ къ этому многоугольнику сказанное въ концѣ § 76-го слѣдующимъ образомъ: провѣдши r на p есть само p , но кромѣ того она, какъ послѣдняя сторона многоугольника $OABm$, равна суммѣ провѣдѣній на p остальныхъ сторонъ. Следовательно:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p. \quad (132)$$

Здѣсь x , y , z суть координаты любой точки m плоскости. Следовательно, уравненіе (132) есть искомое уравненіе плоскости. Оно похоже на уравненіе (20) прямой.



Фиг. 70

Плоскость и прямая.

Всякое уравнение 1-го порядка выражает въ пространственныхъ координатахъ плоскость.

§ 88. Докажемъ, что всякое уравнение 1-го порядка

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \dots \dots \dots (133)$$

выражаетъ собою плоскость.

Дѣйствительно, уравнение (133) можетъ быть приведено къ виду (132) если раздѣлимъ (133) почленно на R и положимъ:

$$A = R \cdot \cos \alpha; \quad B = R \cdot \cos \beta; \quad C = R \cdot \cos \gamma; \quad \frac{D}{R} = p \quad \dots \dots (134)$$

потому, что тогда получимъ:

$$\frac{R \cos \alpha}{R} x + \frac{R \cos \beta}{R} y + \frac{R \cos \gamma}{R} z = \frac{D}{R}$$

или $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma = p.$

Но уравнение (132) выражаетъ собою плоскость; следовательно и (133) выражаетъ плоскость, потому что можетъ быть сведено на (132).

При этомъ изъ формуль (134) и (126) видно, что

$$R = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad \dots \dots \dots (135)$$

Здѣсь мы даемъ радикалу такой знакъ, чтобы p , равное по послѣдней изъ формуль (134) $\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, было положительно.

Уголъ, составляемый двумя плоскостями.

§ 89. Опредѣлимъ косинусъ угла θ , составляемаго плоскостями:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (136)$$

Изъ (134) и (135) слѣдуетъ, что перпендикуляры, опущенные изъ начала на плоскости (136), имѣютъ косинусы наклоенія, выражаемые формулами:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; & \cos \alpha' &= \frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}; \\ \cos \beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; & \cos \beta' &= \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}; \\ \cos \gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; & \cos \gamma' &= \frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (137)$$

Уголъ, составляемый этими перпендикулярами, равенъ углу, составляемому плоскостями, потому что стороны его перпендикулярны сторонамъ ли-

нейного угла, которым измеряется двугранный угол, составленный плоскостями (136). Но угол между перпендикулярами имеет косинусъ, выражаемый формулою (130). Вставляя въ (130), вместо косинусовъ, ихъ выражения изъ (137), получимъ для искомаго угла θ , составляемаго плоскостями (136), формулу:

$$\cos \theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \dots (138)$$

Условіе перпендикулярности двухъ плоскостей.

§ 90. Если плоскости (136) взаимно-перпендикулярны, то: $\theta = 90^\circ$; $\cos 90^\circ = 0$, и, следовательно въ (138) числитель = 0, то есть:

$$AA' + BB' + CC' = 0. \dots (139)$$

Условіе параллельности двухъ плоскостей.

§ 91. Если плоскости (136) взаимно-параллельны, то: $\cos \theta = \cos \theta^\circ = 1$, и следовательно, числитель въ (138) равенъ знаменателю, то есть:

$$[AA' + BB' + CC']^2 = [A^2 + B^2 + C^2] [A'^2 + B'^2 + C'^2],$$

или:

$$AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + 2AA'BB' + 2AA'CC' + 2BB'CC' = A^2A'^2 + B^2B'^2 + C^2C'^2 + A^2B'^2 + A^2C'^2 + B^2A'^2 + B^2C'^2 + C^2A'^2 + C^2B'^2$$

или: $(BC' - C'B')^2 + (CA' - A'C')^2 + (AB' - A'B)^2 = 0.$

Но сумма трехъ квадратовъ можетъ быть равна нулю только въ томъ случаѣ, если каждый квадратъ равенъ нулю, потому что каждый квадратъ положительенъ. Итакъ условіе параллельности плоскостей (136) будетъ таково:

$$BC' = CB'$$

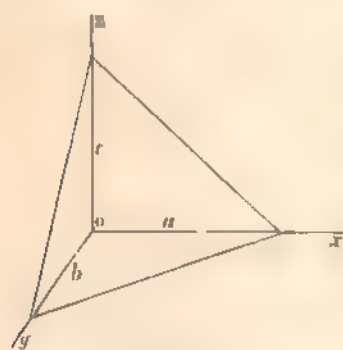
$$CA' = AC'$$

$$AB' = A'B$$

или: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \dots (140)$

Итакъ коэффициенты параллельныхъ плоскостей пропорциональны между собою.

Уравненіе плоскости, отсѣкающей на осяхъ отрезки a, b, c .



Фиг. 71.

§ 92. Опредѣлимъ уравненіе плоскости, отсѣкающей на осяхъ отрезки a, b, c (фиг. 71).

Отрезокъ a на оси x получимъ, подставивъ въ уравненіи

$$Ax + By + Cz + D = 0 \dots (141)$$

$y = 0$, $z = 0$, причём получим $Aa + D = 0$, откуда $A = -\frac{D}{a}$. Точно так же получим: $B = -\frac{D}{b}$; $C = -\frac{D}{c}$. Вставляя эти величины, вместо A , B и C , вь (141), получим искомое уравнение:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \dots \dots \dots (142)$$

сходное съ уравненіемъ (12) прямой.

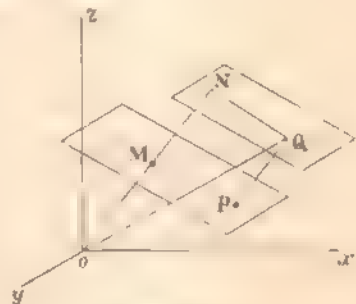
Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x', y, z') на плоскость $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$.

§ 93. Опредѣлимъ длину перпендикуляра, опущеннаго изъ какой-нибудь точки (x', y', z') , которую мы назовемъ Q , на плоскость

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p.$$

Проведемъ (фиг. 72) чрезъ (x', y', z') плоскость, параллельную данной и опустимъ на обѣ эти плоскости перпендикуляры изъ начала. Эти параллельныя плоскости отсекутъ на немъ часть MN , равную искомому перпендикуляру PQ . Но ON , какъ проекція радиус-вектора OQ на ON , равна (см. конецъ § 76-го):

$$x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma = 0.$$



Фиг. 72.

Слѣдовательно:

$$PQ = MN = ON \quad OM = ON \quad p = x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma = p.$$

Итакъ искомая длина есть:

$$x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma = p. \dots \dots \dots (143)$$

Еслибы p было больше ON , то есть еслибы точка (x', y', z') лежала по ту же сторону отъ данной плоскости какъ начало, то искомая длина перпендикуляра была бы:

$$p - (x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma). \dots \dots \dots (144)$$

Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x', y', z') на плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$

§ 94. Переходя, при помощи формулъ (134) и (135) отъ уравнения $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma = p$ плоскости къ уравненію

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

получимъ двѣ длины перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x', y', z') на плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ формулу

$$\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \dots \dots \dots (145)$$

Примеръ. Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (2, 5, 4) на плоскость. $x + 3y - 2z + 3 = 0$ будетъ:

$$\frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}.$$

Выраженіе прямой двумя уравненіями.

§ 95. Всякая линия (см. § 71) разсматривается какъ пересѣченіе двухъ поверхностей. Прямая разсматривается какъ пересѣченіе двухъ плоскостей и потому представляется совокупностью двухъ уравненій вида:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (146)$$

Исключимъ изъ этихъ уравненій y . Получимъ

$$(AB' - A'B)x + (B'C - BC')z + B'D - BD' = 0,$$

или:
$$x = \frac{B'C - BC'}{AB' - A'B}z + \frac{B'D - BD'}{AB' - A'B} \dots \dots \dots (147)$$

Исключая изъ уравненій (146) переменнаго x , получимъ:

$$(AB' - A'B)y + (A'C - A'C)z + AD' - A'D = 0,$$

или:
$$y = \frac{A'C - A'C'}{AB' - A'B}z + \frac{A'D - AD'}{AB' - A'B} \dots \dots \dots (148)$$

Называя въ (147) и (148) коэффициенты и постоянные члены маленькими буквами, замѣчаемъ, что уравненіе (147) и (148), которыми можетъ быть замѣнена совокупность уравненій (146), имѣютъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} x = az + a' \\ y = bz + b' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (149)$$

Итакъ прямая линия можетъ быть выражена совокупностью уравненій вида (149).

Уравненіе прямыхъ, проходящихъ чрезъ данную точку (x', y', z').

§ 96. Если прямая, выраженная совокупностью уравненій (146), проходитъ чрезъ данную точку (x', y', z'), то координаты этой точки удовлетворяютъ уравненіямъ (146) и потому окажутся вѣрными равенства:

$$\left. \begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D = 0 \\ A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0. \end{aligned} \right\}$$

Вычитая, соответственно, эти равенства изъ уравненій (146), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0 \\ A'(x - x') + B'(y - y') + C'(z - z') = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (150)$$

Раздѣливъ каждое изъ этихъ уравненій на $(z - z')$ и опредѣляя изъ

полученныхъ послѣ такого раздѣленія уравненій величины $\frac{x-x'}{a} = \frac{y-y'}{b} = \frac{z-z'}{c}$, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-x'}{a} &= \frac{BC'-B'C}{AB'-A'B} \\ \frac{y-y'}{b} &= \frac{A'C-AC'}{AB'-A'B} \\ \frac{z-z'}{c} &= \frac{A'C-AC'}{AB'-A'B} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (151)$$

Положимъ, для краткости:

$$BC' - B'C = a; \quad A'C - AC' = b; \quad AB' - A'B = c.$$

Тогда можно представить уравненія (151) въ видѣ:

$$\frac{x-x'}{a} = \frac{y-y'}{b} = \frac{z-z'}{c} \dots \dots \dots (152)$$

Всякая прямая, проходящая чрезъ точку (x, y, z) , выражается уравненіями (152). Величины a, b, c называются *коэффициентами наклоненія* прямой, выраженной уравненіями (152).

Напримѣръ уравненія:

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{7}$$

выражаютъ собою прямую, проходящую чрезъ точку $(3, 1, -2)$.

Уравненія прямой, проходящей чрезъ точки (x', y', z') и (x'', y'', z'') .

§ 97. Если прямая, проходя чрезъ точку (x', y', z') , проходитъ еще и чрезъ точку (x'', y'', z'') , то координаты x'', y'', z'' должны удовлетворять уравненіямъ (152), и потому должны оказаться вѣрными равенства:

$$\frac{x''-x'}{a} = \frac{y''-y'}{b} = \frac{z''-z'}{c}.$$

Для почленно на эти равенства уравненія (152), получимъ:

$$\frac{x-x'}{x''-x'} = \frac{y-y'}{y''-y'} = \frac{z-z'}{z''-z'} \dots \dots \dots (153)$$

Итакъ уравненія прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки, имѣтъ видъ (153).

Напримѣръ, уравненія прямой, проходящей чрезъ точки: $(2, -1, 5)$ и $(3, 2, -4)$, будутъ:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{9}$$

или, послѣ приведенія къ одному знаменателю:

$$\begin{aligned} 9x - 18 &= z - 5 \\ 9y + 9 &= 3z - 15. \end{aligned}$$

Эти уравнения не трудно привести къ виду:

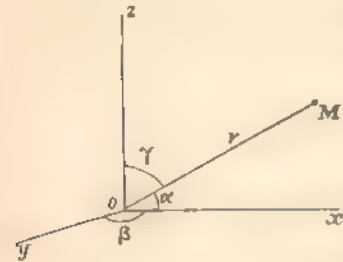
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{9} z + \frac{13}{9} \\ y &= \frac{1}{3} z + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

сходному съ видомъ (149).

Уравненіе прямой, проходящей чрезъ точку (x', y', z') и составляющей съ осями углы: α, β, γ .

§ 98. Всѣ прямыя, проходящія чрезъ точку (x', y', z') , отличаются между собою только своимъ направлениемъ; уравненія же ихъ имѣютъ видъ (152) и отличаются одни отъ другихъ только величинами a, b, c . Поэтому полагая въ уравненіяхъ (152) $x' = 0, y' = 0, z' = 0$, получимъ уравненіе прямой, проведенной чрезъ начало $(0, 0, 0)$ параллельно прямой (152). Это уравненіе прямой, проведенной чрезъ начало будетъ:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \dots \dots \dots (154)$$



Фиг. 73

Пусть α, β, γ суть углы наклона прямой (152) и следовательно такъ же и прямой (154) къ осямъ. Отложимъ на прямой (154) (фиг. 73) отъ начала длину r . Тогда координаты (x, y, z) конца M этого отрезка будутъ удовлетворять равенствамъ

(125): $x = r \cdot \cos \alpha; y = r \cdot \cos \beta; z = r \cdot \cos \gamma$. Но точка M лежитъ на прямой (154) и потому координаты ея удовлетворяютъ уравненію (154), то есть справедливы равенства:

$$\frac{\cos \alpha}{a} = \frac{\cos \beta}{b} = \frac{\cos \gamma}{c} = r \dots \dots \dots (155)$$

Опредѣляя отсюда a, b, c , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\cos \alpha}{r} \\ b &= \frac{\cos \beta}{r} \\ c &= \frac{\cos \gamma}{r} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (156)$$

Вставляя вмѣсто a, b, c въ (152) ихъ величины изъ (156), получимъ:

$$\frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma} \dots \dots \dots (157)$$

Это и есть уравненіе прямой, проходящей чрезъ точку (x', y', z') и составляющей съ осями углы: α, β, γ .

Замѣтимъ, что изъ равенствъ (156) слѣдуетъ:

$$r = \frac{-1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}; \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \dots \dots \dots (158)$$

Итакъ уравненіе (152) представляетъ собою прямую, проходящую чрезъ точку (x', y', z') и наклоненную къ осямъ подъ углами α, β, γ , определяемыми изъ формулы (158).

Уголъ, составляемый двумя прямыми.

§ 99. Если имѣемъ двѣ прямыя:

$$\frac{x - x'}{\cos \alpha} = \frac{y - y'}{\cos \beta} = \frac{z - z'}{\cos \gamma}$$

$$\frac{x - x''}{\cos \alpha'} = \frac{y - y''}{\cos \beta'} = \frac{z - z''}{\cos \gamma'}$$

то пользуясь формулами (140) заключаемъ, что косинусъ угла θ , составляемаго этими прямыми, будетъ:

$$\cos \theta = \cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \beta \cdot \cos \beta' + \cos \gamma \cdot \cos \gamma' \dots \dots (159)$$

Подставляя сюда вмѣсто косинусовъ ихъ величины, определяемыя по формуламъ (158), видимъ, что косинусъ угла θ , составляемаго прямыми

$$\left. \begin{aligned} \frac{x - x'}{a} - \frac{y - y'}{b} &= \frac{z - z'}{c} \\ \frac{x - x''}{a} - \frac{y - y''}{b} &= \frac{z - z''}{c} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (160)$$

будетъ:

$$\cos \theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \dots \dots \dots (161)$$

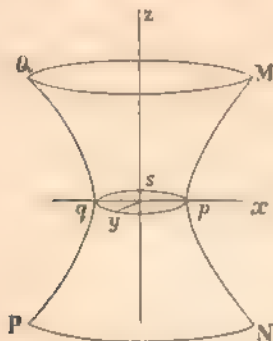
Поверхности второго порядка.

Познакомимся теперь съ наиболее интересными поверхностями.

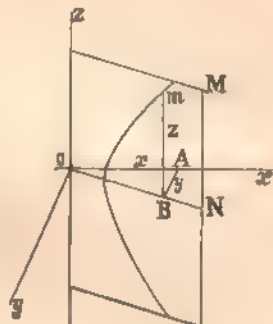
Гиперболоидъ вращенія объ одной полости.

§ 100. Если будемъ вращать (фиг. 74) гиперболу около ея мнимой оси oz , то она опишетъ поверхность $MNPQ$, называемую *гиперболоидомъ вращенія объ одной полости*. На чертежѣ, для его ясности, эта поверхность ограничена плоскостями QM и PN , но поверхность эта простирается въ безконечность какъ и гипербола, вращеніемъ которой она была образована.

Выведем уравнение этой поверхности. Для этого рассмотрим соотношения, существующия между координатами точки m гиперболы въ тотъ моментъ (фиг. 75), когда гиперболоидъ вышелъ изъ плоскости (x, z) и находится въ некоторой плоскости OMN . Точка m , принадлежащая вращаемой



Фиг. 74.



Фиг. 75.

около оси z гиперболѣ, принадлежитъ очевидно и образованному такимъ вращеніемъ гиперболоиду. По свойству гиперболы (см. (64)),

$$\frac{OB^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Но $OB^2 = x^2 + y^2$. Следовательно

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \dots \dots \dots (162)$$

Это и есть искомое уравнение гиперболоида вращения объ одной полости, произведеннаго отъ вращения около оси oz такой гиперболы, для которой ось oz есть мнимая ось.

Сѣченіе pqs (фиг. 74) такого гиперболоида плоскостью (x, y) называется *горловымъ кругомъ* (къ oz называется осью вращения).

Прямолинейныя образующія гиперболоида вращения.

§ 101. Пересѣченіе гиперболоида плоскостью

$$x = a, \dots \dots \dots (163)$$

параллельною плоскости (y, z) и находящеюся на разстояніи a отъ начала. Въ сѣченіи получимъ фигуру, выражаемую совокупностью уравнений (162) и (163). Подставляя вмѣсто x въ (162) его величину a изъ (163), получимъ:

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \dots \dots \dots (164)$$

или:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \dots \dots \dots (165)$$

Припоминая формулу «разности квадратов», получим изъ (165):

$$\left(\frac{y}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{y}{a} - \frac{z}{c}\right) = 0. \quad \dots \quad (166)$$

Это уравненіе справедливо или при

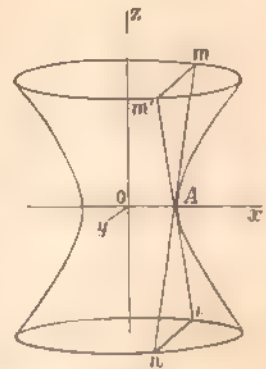
$$\frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 0, \quad \dots \quad (167)$$

или при:

$$\frac{y}{a} - \frac{z}{c} = 0. \quad \dots \quad (168)$$

Итакъ въ сѣчени получается или фигура, выражаемая совокупностью уравненій (163) и (167) или фигура, выражаемая совокупностью уравненій (163) и (168). И та, и другая фигуры суть прямыя линии потому, что уравненія (163), (167) и (168) все перваго порядка. Эти прямыя обозначены на чертежѣ (фиг. 76) линиями mn и $m'n'$.

Гиперболоидъ нашъ, какъ тѣло вращения, симметриченъ относительно оси z . Повертывая его около этой оси, мы во всякомъ его положеніи нашли бы въ сѣчени его плоскостью $mn'm'n'$ пару прямыхъ. Слѣдовательно весь онъ состоитъ изъ прямолинейныхъ образующихъ (фиг. 75 и 79).



Фиг. 76

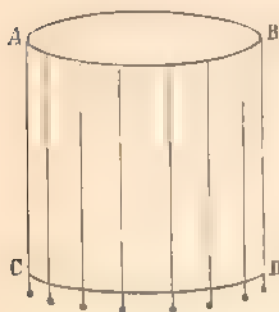
Модель гиперболоида вращения объ одной полости.

§ 102. Для уясненія вида такого гиперболоида лучше всего пригото- вить себѣ его модель слѣдующимъ образомъ.

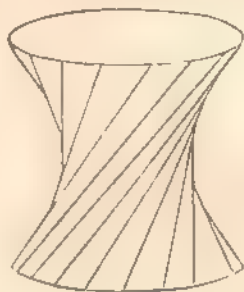
Возьмемъ два одинаковыхъ круга, деревянныхъ или металлическихъ, и предѣлемъ въ нихъ рядъ отверстій, расположенныхъ по окружностямъ въ одинаковомъ разстоянн одно отъ другого. Положимъ круги одинъ на другой такъ, чтобы отверстія одного круга приходились надъ отверстиями другого, проднемъ сквозь каждую пару отверстій нити, закрѣпимъ ихъ у верхняго круга, а на нижне концы нитей надѣнемъ грузы. Раздвинувъ круги, увидимъ, что нити расположились по поверхности прямого круглаго цилиндра, и если сдѣлано было достаточное число отверстій, то форма цилиндра (фиг. 77) достаточно выяснится. Повернемъ теперь кругъ CD въ его плоскости на нѣкоторый уголъ, тогда нити пойдутъ наклонно къ кругамъ и расположатся по поверхности гиперболоида вращения объ одной полости (фиг. 78). Поверхность гиперболоида вырисуетея тѣмъ яснѣе, чѣмъ большее число нитей имѣется въ модели.

Въ элементарной геометрн описываются только двѣ линейчатая поверхности (образованныя прямыми линиями): цилиндръ и конусъ. Разсматриваемый гиперболоидъ, какъ мы видѣли, тоже линейчатая поверхность. Цилиндръ и конусъ можно согнуть изъ листа бумаги и наоборотъ разогнуть на плоскость, разрѣзавъ предварительно по одной изъ образующихъ.

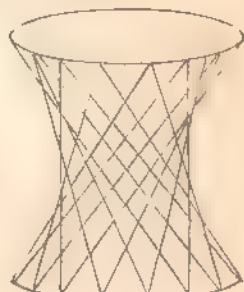
Съ гиперболоидомъ этого нельзя сдѣлать, какъ и съ поверхностью шара. Поверхности, образованныя прямыми, называются *линейчатými*. Линейчатая поверхности бываютъ такия (какъ цилиндръ и конусъ), которыя можно развернуть на плоскость безъ складокъ и разрывовъ: эти поверхности называются *развертывающимися*. Линейчатыя поверхности бываютъ



Фиг. 77.



Фиг. 78.



Фиг. 79.

и такия (какъ гиперболоидъ), которыя нельзя развернуть на плоскость безъ складокъ и разрывовъ. Эти поверхности называются *косыми*.

Кромѣ образующихъ семейства *m* (фиг. 76) существуетъ на гиперболоидѣ и другое семейство образующихъ *m'* (фиг. 76). Оба семейства образующихъ изображены на чертежѣ (фиг. 79). Если кругъ *CD* модели (фиг. 77) повернемъ въ обратную, противъ прежняго, сторону на тотъ же уголъ, то получимъ тотъ же гиперболоидъ (фиг. 78), но составленный изъ образующихъ другого семейства. На (фиг. 79) оба эти семейства образующихъ видны.

Гиперболоидъ объ одной полости.

§ 103. Уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \dots \dots \dots (169)$$

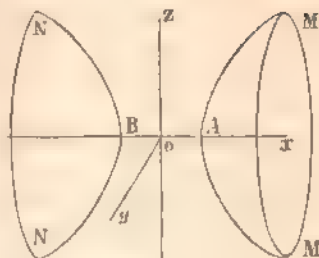
въ которомъ коэффициенты при x^2 и при y^2 неодинаковы, опредѣляется поверхность, похожая на гиперболоидъ, опредѣляемый уравненіемъ (162) и отличающаяся только тѣмъ, что сѣченія, образуемая плоскостями, параллельными плоскости (x, y), въ гиперболоидѣ (162) суть окружности; сѣченія же поверхности (169) такими плоскостями суть эллипсы. Такая поверхность (169) называется *гиперболоидомъ объ одной полости* (безъ прибавленія слова «вращения») или *трехъ-оснымъ гиперболоидомъ*, потому что оны отсѣкаютъ на осяхъ x и y отрезки различной длины, называемые полуосями OA и OB . Тогда какъ въ гиперболоидѣ вращения всѣ оси, лежащія въ плоскости горлового круга, одинаковы.

Гиперболоидъ вращения о двухъ полостяхъ.

§ 104. Если вращать гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

около действительной оси x , то получимъ поверхность (фиг. 80) съ двумя полостями AM и BN , простирающимися въ бесконечность. На чертежѣ онѣ для ясности ограничены плоскостями MM и NN . Уравнение такой поверхности, называемой *гиперболоидомъ вращения съ двумя полостями*, таково:



Фиг. 80.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \dots \dots \dots (170)$$

Трехосный гиперболоидъ о двухъ полостяхъ.

§ 105. Поверхность

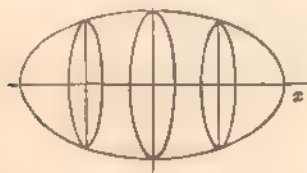
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \dots \dots \dots (171)$$

отличается отъ (170) тѣмъ, что сѣчени ея плоскостями, параллельными плоскости (y, z) , не круговыя, а эллипческія. Поверхности (170) и (171) не линейчатая, то есть не могутъ быть образованы прямыми (см. подробные курсы).

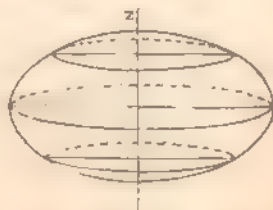
Эллипсоиды вращения.

§ 106. Отъ вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ около его большой оси получается поверхность (фиг. 81), называемая *удлинненнымъ эллипсоидомъ вращения*.

Отъ вращения того же эллипса около малой оси получается поверхность, называемая *сплюснутымъ эллипсоидомъ вращения*.



Фиг. 81.



Фиг. 82.

Не трудно вывести уравненіе эллипсоида вращения около оси x на-примеръ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \dots \dots \dots (172)$$

Онъ будетъ удлинненный, если $a > b$ и сплюснутый, если $a < b$.

Въ эллипсоидѣ вращения всѣ сѣченія плоскостями, перпендикулярными оси вращения, суть окружности.

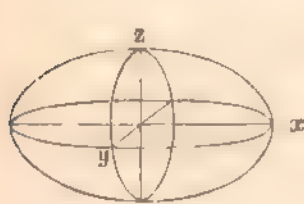
Трехосный эллипсоидъ.

§ 107. Уравненіе:

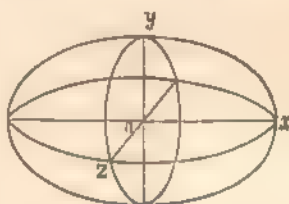
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \dots \dots \dots (173)$$

выражаетъ поверхность, называемую трехоснымъ эллипсоидомъ. Она имѣетъ чрезвычайно важное значеніе въ механикѣ и физикѣ.

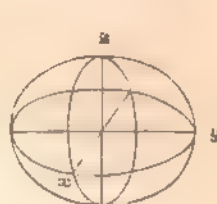
На плоскомъ чертежѣ она изображается въ томъ же видѣ (фиг. 81), какъ и эллипсоидъ вращения, но отличается отъ него тѣмъ, что сѣченія ея плоскостями, перпендикулярными къ какой бы то ни было изъ осей, не круговыя, а эллиптическія. Видъ такого трехоснаго эллипсоида изо-



Фиг. 83.



Фиг. 84.



Фиг. 85.

браженъ на фиг. 83 со стороны оси y ; на фиг. 84 со стороны оси z и на фиг. 85 со стороны оси x , если $a > b > c$.

Докажемъ, что сѣченіе его плоскостію $x = m$, перпендикулярною оси x , будетъ эллипсъ. Подставимъ въ (173) m вмѣсто x , получимъ:

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

или

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - m^2}{a^2} \dots \dots \dots (174)$$

Для всѣхъ членовъ уравненія 174 на $\frac{a^2 - m^2}{a^2}$, получимъ:

$$\frac{\frac{y^2}{b^2} (a^2 - m^2)}{a^2} + \frac{\frac{z^2}{c^2} (a^2 - m^2)}{a^2} = 1 \dots \dots \dots (175)$$

Отъ перенесенія начала по оси x въ плоскость $x = m$ измѣнится только координата x' , но она не входитъ въ (175), которое поэтому и будетъ уравненіемъ плоскаго сѣченія. Уравненіе (175) представляетъ собою (какъ это видно изъ сравненія его съ (48)) эллипсъ съ осями $\frac{2b\sqrt{a^2 - m^2}}{a}$ и $\frac{2c\sqrt{a^2 - m^2}}{a}$. Отношеніе этихъ осей равно $\frac{b}{c}$, каково бы ни было m , то есть на какомъ бы разстояніи отъ начала мы не пересѣкали эллип-

сойдъ плоскостью, перпендикулярною оси x . Эллипсы, имѣющіе одинаковое отношение между осями, называются *подобными* между собою. Совершенно къ такимъ же результатамъ мы пришли бы, пересекая эллипсоидъ плоскостями, перпендикулярными къ осямъ y и z . Только отношения осей были бы $\frac{a}{c}$ и $\frac{a}{b}$.

Итакъ сѣченія трехоснаго эллипсоида плоскостями, перпендикулярными его осямъ, суть эллипсы.

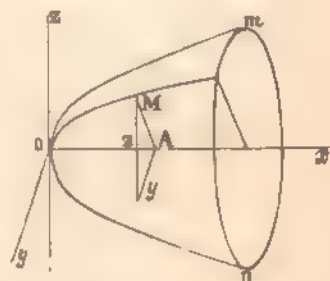
Если $a > b > c$, то осямъ даются такія названія: $2a$ большая ось, $2b$ средняя ось, $2c$ малая ось.

Параболоидъ вращенія.

§ 108. Если вращать параболу *топ* (фиг. 86) около ея оси, то получимъ поверхность, называемую параболоидомъ вращенія. Для вывода ея уравненія замѣтимъ, что координаты точки M параболы OM (фиг. 86), лежащей въ плоскости OAM , будутъ OA и AM и что, согласно (70), уравненіе между ними будетъ таково:

$$AM^2 = 2p \cdot OA.$$

Но въ пространственныхъ координатахъ: $AM^2 = y^2 + z^2$; $OA = x$ Итакъ между пространственными координатами точки M параболоида существуетъ уравненіе:



Фиг. 86

$$y^2 + z^2 = 2px. \dots \dots \dots (176)$$

Это и есть уравненіе параболоида вращенія.

Эллиптический параболоидъ.

§ 109. Уравненіе

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2px \dots \dots \dots (177)$$

выражаетъ поверхность, называемую эллиптическимъ параболоидомъ и отличающуюся отъ (176) тѣмъ, что въ ней сѣченія плоскостями, перпендикулярными оси, не круговыя, а эллиптическія.

Гиперболическій параболоидъ.

§ 110. Разсмотримъ поверхность, выражаемую уравненіемъ

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x \dots \dots \dots (178)$$

Чтобы узнать какое сѣченіе образуетъ она съ плоскостью (y, z) , положимъ въ (178) $x = 0$. Получимъ $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 0$ или: $\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}}\right) \left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}}\right) = 0$.

Это уравнение удовлетворяется или при

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 0, \dots \dots \dots (179)$$

или при

$$\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 0. \dots \dots \dots (180)$$

Уравнения (179) и (180) выражают собою прямая. Итакъ въ сѣчени въ плоскости (y, z) получаются двѣ прямыя mm и nn (фиг. 87).

Полагая z равнымъ какому нибудь постоянному, напримѣръ $z = c$, получимъ изъ (178): $y^2 = 2px + \frac{pc^2}{q}$ уравнение параболы, потому что преобразованиемъ $x = x_1 - \frac{c^2}{2q}$ оно приведетъ къ виду $y = 2px_1$. Значитъ сѣченія поверхности (178) плоскостями, параллельными плоскости (x, y) , суть параболы.

Полагая $x = a$, получимъ изъ (178):

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2a, \text{ или: } \frac{y^2}{2ap} - \frac{z^2}{2aq} = 1$$

уравненіе гиперболы съ полуосями: $\sqrt{2ap}$ и $\sqrt{2aq}$. Итакъ, сѣченія поверхности плоскостями $x = a$, параллельными плоскости (y, z) , суть гиперболы, напримѣръ $kkk'k'$ (фиг. 87).

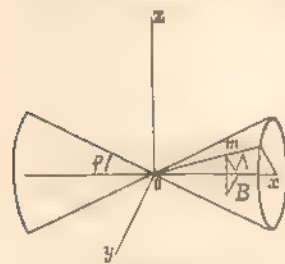
Полагая въ (178): $y = 0$, получимъ: $z^2 = -2qx$ параболу, обращенную въ сторону отрицательныхъ x . Таково сѣченіе поверхности плоскости (z, x) , обозначенное на чертежѣ буквами AOB (фиг. 87).

Изъ всего сказаннаго заключаемъ, что поверхность (178) имѣетъ видъ, изображенный на чертежѣ (фиг. 87)—продѣ сѣдла; только всѣ упомянутыя параболическія ея сѣченія распространяются въ безконечность, такъ что и самая поверхность распространяется въ безконечность, на чертежѣ мы ее ограничили разными плоскостями чтобы выяснить ея видъ.

Эта поверхность, имѣющая параболическія, гиперболическія и прямолинейныя сѣченія, называется *гиперболическимъ параболоидомъ*.

Поверхность прямого круглаго конуса.

§ 111. Посмотримъ, какимъ уравненіемъ выражается поверхность прямого круглаго конуса (известнаго изъ элементарной геометрии), ось котораго (фиг. 88) направлена по оси x



Фиг. 88.

Положимъ, что образующая составляетъ съ осью уголъ φ . Возьмемъ какую

вишюдь образующую, не лежащую въ плоскости (x, z) и на ней точку m . Опредѣливъ зависимость между координатами (x, y, z) точки m , очевидно принадлежащей конусу, получимъ его уравнение. Образующая Om составляетъ съ осью x тоже уголъ φ . Изъ треугольника OAm имѣемъ $Am = OA \cdot tg \varphi$. Но $Am = \sqrt{y^2 + z^2}$, $OA = x$. Следовательно $\sqrt{y^2 + z^2} = x \cdot tg \varphi$. Возвысивъ обѣ части этого уравненія въ квадратъ, получимъ уравненіе конуса.

$$y^2 + z^2 = x^2 \cdot tg^2 \varphi. \dots \dots \dots (181)$$

Здѣсь $tg \varphi$ есть величина постоянная.

Конусы 2-го порядка.

§ 112. Уравненіе:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = x^2 \cdot tg^2 \varphi \dots \dots \dots (182)$$

выражаетъ собою поверхность, отличающуюся отъ круглаго конуса (181) тѣмъ, что у нея сѣченія плоскостями, параллельными плоскости (y, z) , не круговыя, а эллиптическія.

Вообще, поверхность, образованная такимъ движеніемъ прямой, при которомъ она, проходя постоянно чрезъ одну и ту же точку, опирается на какую-нибудь плоскую кривую 2-го порядка эллипсъ, параболу или гиперболу, называется конусомъ 2-го порядка.

Если вершина такого конуса удалена въ бесконечность, то образующія взаимно-параллельны, и получается цилиндръ, который разсматривается какъ частный случай конуса.

Поверхности 2-го порядка.

§ 113. Въ нѣкоторыхъ курсахъ аналитической геометріи доказывается, что уравненіе 2-го и ряда между координатами пространственными представляетъ собою одну изъ слѣдующихъ поверхностей эллипсоидъ, гиперболоидъ обѣ одной и двѣти, гиперболоидъ о двухъ полостяхъ, эллиптический параболоидъ, гиперболоидическій параболоидъ. Эти поверхности называются поверхностями 2-го порядка. При этомъ, какъ частные случаи этихъ и поверхностей, могутъ получаться конусъ 2-го и ряда, пара плоскостей, прямая, сфера, точка и минимъ и поверхность. При этомъ точку можно разсматривать какъ эллипсоидъ съ безконечно-малыми осями; прямую какъ безконечно тонкій цилиндръ.

Такъ же показывается, по такимъ признакамъ узнается, къ какому изъ упомянутыхъ видовъ относится поверхность, выражаемая даннымъ уравненіемъ 2-го порядка. Добавляется также, что изъ всѣхъ поверхностей 2-го порядка только пары плоскостей, конусы, цилиндры, гиперболоидъ обѣ одной полости и гиперболоидическій параболоидъ, суть линейчатыя. Поверхности вращения считаются частными случаями трехосныхъ поверхностей.

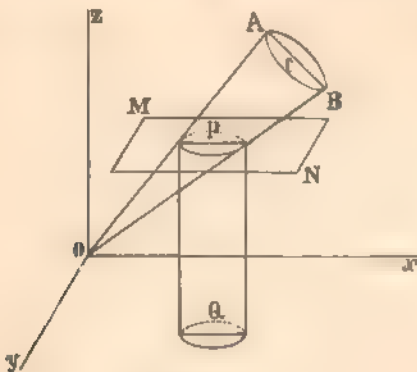
Коническія сѣченія.

§ 114. Всѣ кривыя 2-го порядка, в ихъ частные случаи, можно получить, пересѣкая по различнымъ направлениямъ прямой круглый конусъ. Докажемъ это.

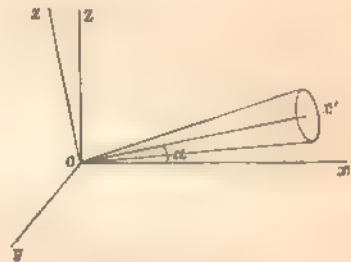
Будемъ наклонять конусъ AOB (фиг. 89) такъ, чтобы его ось OC составляла различные углы съ осью x , оставаясь въ плоскости (x, z) и пересѣкая его затѣмъ плоскостью MN , параллельною плоскости (x, y) .

Прежде всего найдемъ уравненіе такимъ образомъ расположеннаго конуса. Назовемъ чрезъ φ уголъ, составляемый его осью съ образующею, и чрезъ α —уголъ наклоненія его оси OC къ оси x .

Изберемъ другую систему осей



Фиг. 89.



Фиг. 90.

координатъ, въ которой ось x' совпадала бы съ осью конуса, ось y' съ осью y и z' была бы перпендикулярна къ осямъ x и y' . Въ такой системѣ уравненіе нашего конуса, согласно съ (181), будетъ:

$$y^2 + z'^2 = x'^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad \dots \dots \dots (183)$$

Но намъ хочется вывести уравненіе конуса въ системѣ (x, y, z) . Такъ какъ ось y въ обѣихъ системѣхъ одинакова, то формулы преобразования будутъ тѣ же (92) и (93), что и для плоскихъ координатъ (x, z) , только въ нихъ надо вмѣсто y поставить z и замѣнить, что переходимъ отъ (x', z') къ (x, z) и что поворачиваемъ систему (x', z') при этомъ на уголъ $(-\alpha)$. Итакъ формулы преобразования будутъ:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + z \sin \alpha \\ z' &= -x \sin \alpha + z \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (184)$$

Вставляя въ (183) вмѣсто x' и z' величины, опредѣляемыя изъ (184), получимъ:

$$y^2 + (z \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = (x \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad \dots (185)$$

Таково уравненіе конуса относительно осей (x, y, z) . Пересѣчемъ конусъ

плоскостью MN , уравнение которой есть

$$z = a \dots \dots \dots (186)$$

где z расстояние плоскости MN отъ начала

Если вставимъ въ (185) вмѣсто z величину a , то получимъ:

$$y^2 + (a \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 = (x \cdot \cos \alpha + a \cdot \sin \alpha)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi \dots (187)$$

Согласно § 72-му уравнение выражаетъ себѣ въ пространственныхъ координатахъ цилиндръ PQ (фиг. 89). Оно же выражаетъ въ плоскостныхъ координатахъ на плоскости (x, y) проекцію a разсматриваемаго сѣченія, которая равна самому сѣчению. Итакъ, уравнение разсматриваемаго сѣченія есть (187). Оно 2-го порядка относительно координатъ (x, y) . Значитъ: *сѣченіе цилиндра конуса плоскостью есть кривая 2-го порядка*. Замѣтимъ, что, благодаря произвольности угловъ φ и α и расстоянія a , въ настоящее разсмѣрѣніе входятъ всевозможныя сѣченія по всевозможнымъ направленіямъ и въ любомъ разстояніи отъ вершины всевозможныхъ круглыхъ конусовъ.

Теперь можно было бы аналитически (то есть вычислениями) показать, въ какомъ случаѣ получается тогъ или другой видъ кривой 2-го порядка. Но мы сделаемъ это при помощи простыхъ соображеній, зная что кривая получается 2-го порядка и сообразаясь со сказаннымъ въ § 62.

а) *Типъ параболы*. Если плоскость параллельна одной изъ образующихъ конуса, то она пересѣкаетъ на конечномъ разстояніи только одну изъ полостей конуса, сходящихся въ вершинѣ. Но сѣченіе при этомъ не получается распространяющееся въ безконечность. Итакъ кривая получается



Фиг. 91.



Фиг. 92.



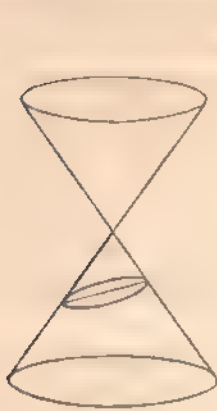
Фиг. 93.

съ одною безконечно-ра пространяющеюся въгнѣву. Притомъ, по доказанному выше, она 2-го порядка. Следовательно, это *парабола* (фиг. 91).

Въ частномъ случаѣ, когда разстояніе между плоскостью и параллельною ей образующею уменьшено до нуля, получимъ *пару совпадающихъ прямыхъ*, идущихъ по этой образующей. Мы говоримъ *пару прямыхъ*, по-

тому что, если приближаем плоскости к образующей, то стороны параболы OA и OB (фиг. 92) сближаются и выпрямляются. Это вытекает из взи анализа так как парабола $y^2 = 2px$ при $p \rightarrow 0$ обращается в $y^2 = 0$, а это уравнение разбивается на два $+y = 0$ и $-y = 0$.

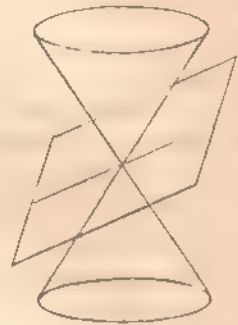
в) *Тип гиперболы* Как только выведем сдвигающую плоскость из положения, параллельна к какой бы то ни было образующей, так она либо



Фиг. 94.



Фиг. 95.



Фиг. 96.

пересечь её в плоскости (фиг. 93), либо только одну, но уже на конечном расстоянии (фиг. 94).

В первом случае (фиг. 93) получим кривую с двумя ветвями, то есть *гиперболу*.

В частном случае (фиг. 95), если плоскость пройдет через вершину, получим *пару пересекающихся прямых m и n*.

в) *Тип эллиса*. Если плоскость пересекать одну только половину конуса на конечном расстоянии, то получим замкнутую кривую 2-го порядка, то есть *эллипс* (фиг. 94).

В частном случае, если плоскость перпендикулярна оси конуса, получим (также известно из элементарной геометрии) *окружность*.

Если плоскость пройдет через вершину, то получим в сечении конуса (фиг. 96) которая разрезывается как частный случай окружности именно как окружность, радиус которой равен нулю. В этом смысле говорить, например, что уравнение:

$$x^2 + y^2 = 0$$

выражает точку, то есть окружность

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

в которой радиус $R = 0$.

Часть II.

Основанія анализа бесконечно-малыхъ.

ГЛАВА I.

Дифференціальное исчисленіе.

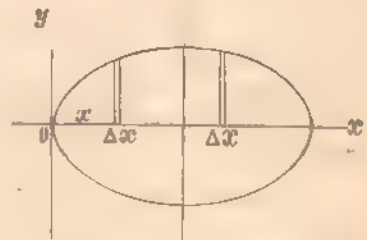
Функціи одного переменнаго.

Вступленіе.

§ 115. Математика занимается главною целью, брахмъ, и следовательно зависимою зависимою, существующею между различными величинами — изслѣдованіемъ того, какъ изменяется одна величина съ измененіемъ другой. Особенный интересъ въ этомъ отношеніи представляютъ функціи, непрерывно изменяющіяся при непрерывномъ измененіи независимыхъ переменныхъ. Такия функціи называются *непрерывными*.

Бесконечно-малой величиной называется переменная величина, безпрестанно уменьшающаяся и приближающаяся сколь угодно близко къ нулю, но никогда не достигившая нуля. Примеромъ бесконечно-малой величины можетъ служить разность между периметрами правильныхъ многоугольниковъ, описанныхъ и вписанныхъ въ кругъ, при увеличеніи числа сторонъ; эта разность безпрестанно приближается къ нулю и можетъ быть сдѣлана, помощью выбора достаточно большого числа сторонъ, меньше всякой данной величины, но, какъ бы много мы ни брали сторонъ, эта разность никогда не обратится въ нуль.

Непрерывною функціею одного переменнаго называется такая ея функція, которая при бесконечно-маломъ приращеніи переменнаго, получаетъ то же самое бесконечно-малое приращеніе. Примеромъ такой функціи можетъ служить вѣдательная ордината эллипса (фиг. 97), разсматриваемая какъ функція абсциссы. Эллипсъ при увеличеніи



Фиг. 97.

вазии x , начиная от нуля, на бесконечно-малые положительные приращения, которые мы будем обозначать так Δx (выговаривается дельта x). ордината сначала получает бесконечно-малые положительные приращения Δy , пока возрастает, а затем, когда x делается больше чем OA , ордината будет убывать, но всетаки всякому бесконечно-малому положительному приращению Δx будет соответствовать бесконечно-малое, хотя теперь уже и отрицательное, приращение Δy . Вместо слова «бесконечно-малый приращение» мы будем всегда употреблять слово бесконечно-малое отрицательное приращение.

Уловить смысл непрерывного изменения весьма часто не удавалось людям. Например, даже определение кривой, как последовательного ряда точек, не совсем понятно, так как в ряд точек предвзвешены промежутки, а в кривой их нет. Можно сказать, что мы переходим от одной точки кривой к соседней точке. Но что такое соседняя точка?

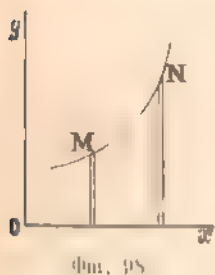
Если она стоит от первоначальной точки на каком-нибудь расстоянии, то является между этими точками разрыв; если же она не находится на расстоянии от первоначальной точки, то сливается с нею, и мы по такой дороге не выйдем из первоначальной точки. Подобным разуждением пришло к некоторым древних философов к отрицанию движения.

А между тем для понимания непрерывного изменения необходимо представить себе характер зависимости, существующей между бесконечно-малым приращением переменного и бесконечно-малым приращением функции.

Простого взгляда на кривую (фиг. 98) достаточно, чтобы предчувствовать, что при одинаковых бесконечно-малых приращениях Δx абсциссы x , ордината y получает не одинаковые приращения Δy в точках M и N , так как в N она круче, «быстрее» поднимается, чем в M . Но какова же связь между бесконечно-малыми приращениями функции и переменного, без знания которой, мы не можем понять самой сущности непрерывного изменения?

Отклик на этот вопрос был дан во второй половине XVII-го столетия одновременно Лейбницем и Ньютоном, изобретателями дифференциального и интегрального исчисления, основная идея которых заключается в том, что: 1) Отношение двух бесконечно-малых величин может быть величиною конечною (не бесконечно-малая) и 2) При данной зависимости между y и x может быть определен самый предельный, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближении бесконечно-малого приращения Δx к нулю.

Этот предельный называется *производною* от y по x . Сведения вопроса от неопределенных бесконечно-малых к определенным, конечным



ную величину и без особого труда определяемой производной и составляет неоценимую заслугу Ньютона и Лейбница предъ человечествомъ.

Дифференціальное исчисленіе есть наука, занимающаяся изученіемъ производныхъ и ихъ вычисленіемъ.

Познакомимся прежде всего поближе съ понятіемъ о производной.

Производная.

§ 116. Пусть зависимость, существующая между функцией y и независимымъ переменнымъ x дана уравненіемъ:

$$y = f(x) \dots \dots \dots (188)$$

гдѣ $f(x)$ есть какая-нибудь непрерывная функция отъ x .

Придадимъ ему безконечно малое приращеніе Δx . Тогда и y измѣнится и получимъ безконечно малое приращеніе Δy : такъ это получимъ

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \dots \dots \dots (189)$$

Отсюда опредѣлимъ Δy , получимъ:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y \dots \dots \dots (190)$$

Вставивъ вмѣсто y въ (190) ея величину изъ (188), получимъ:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \dots \dots \dots (191)$$

Для обѣ части этого равенства на Δx , получимъ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \dots \dots \dots (192)$$

Пределъ какой-нибудь величины будемъ обозначать знакомъ *lim* (по латини предѣлъ — *limes*). Напримѣръ предѣлъ, къ которому приближается отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, при приближеніи Δx къ нулю, будемъ обозначать такъ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и выговаривать такъ предѣлъ, при Δx равномъ нулю, отъ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производною функции называется предѣлъ отношенія безконечно мало приращенія функции къ безконечно малому приращенію переменнаго, то есть именно: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Переходя отъ обѣихъ частей равенства (192) къ ихъ предѣламъ, получимъ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{производной отъ } f(x).$$

Производную отъ $f(x)$ по x обозначаютъ такъ $f'_x(x)$ или просто такъ (по Ньютону) $f'(x)$. Лейбницъ, называя $f(x)$ одною буквою y , согласно съ уравненіемъ (188), обозначалъ производную отъ y по x такъ: $\frac{dy}{dx}$, посредствомъ маленькаго бузвѣ d (см. § 125). Обозначаютъ ее и такъ y' .

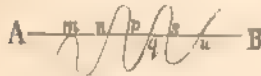
Положив производная от $f(x)$ определяется следующими уравнениями, связывающими и различными ее обозначения

$$f'(x) = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = f_x(x) \dots (197)$$

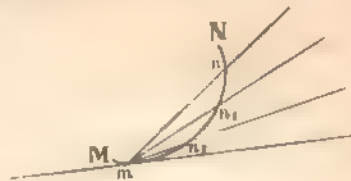
Эта основная формула всего анализа, но ей были выведены, как мы увидим ниже, производные.

Геометрическое значение производной.

§ 117. В настоящем параграфе мы докажем, что при помощи действительно представлять собой величину, равную. Рассмотрим для этого прямую линию касательную к кривой в некоторой ее точке. В элементарной геометрии касательная — прямая, имеющая одну общую точку с окружностью. Так же определена касательная к любой кривой приложимо. Например, прямая AB на чертеже (фиг. 99) касательна



Фиг. 99.



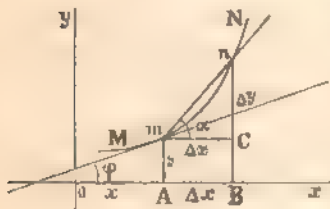
Фиг. 100.

к кривой в точке m , но касательная кривая в точке m имеет с кривой еще общие точки: n, p, q, s, u .

Как же правильно было бы определить, что такое касательная? Представим себе кривую MN (фиг. 100), и на ней точку m . Возьмем на кривой другую точку n и станем ее приближать к m , проводя всякий раз через точки m и n секущую. Когда точка n соприкоснется с m , то секущая обратится в касательную дуги MN в точке m . Иная

касательная есть предельное положение секущей при сближении точек пересечения.

Теперь обратимся к геометрическому значению производной (фиг. 101). Возьмем на кривой MN точку m , координаты которой пусть будут (x, y) . Дадим абсциссе x приращение Δx равное AB ; тогда ордината получит приращение Δy равное Cn (обозначая чрез α угол наклонения отку-



Фиг. 101.

ще mn к оси x , получим из прямоугольного треугольника mnC .

$$\Delta y = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots (198)$$

Проводящая точка n до совпадения с точкою m , уменьшим Δx до нуля и отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ до его предела. При этом знаменатель превратится в касательную. Поэтому, обозначая угол наклона касательной къ оси x чрез φ , видим, что при совпадении точки n с точкою m , равенство (194) обратится въ:

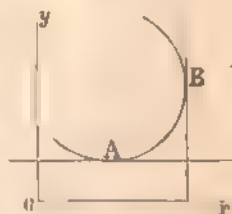
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi (195)$$

Но, по предыдущему, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и есть производная. Следовательно,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \varphi (196)$$

Итак: производная выражается геометрически тангенсом угла наклона касательной къ оси x .

Неосомненно однако, что на кривой MN касательная въ каждой ея точкѣ составляетъ величину, определенный уголъ съ осью x и что только въ исключительныхъ случаяхъ свирепствуетъ въ точкахъ A и B (фиг. 102) тангенсъ этого угла 0 или безконечность, вообще же $\operatorname{tg} \varphi$, а следовательно и $f'(x)$, суть величины конечныя и великѣ определенныя.



Фиг. 102

Примѣръ вычисленія производной.

§ 118. Вслѣдствіи мы подробно займемся вычисленіемъ производныхъ отъ различныхъ функций: теперь же покажемъ на простомъ примѣрѣ, что формула (193) даетъ возможность находить произв. (или $f'(x)$) по данной $f(x)$.

Пусть, на примѣръ, $f(x) = ax + c$ a есть постоянная величина. Давая приращеніе Δx переменному x , получимъ по формулѣ (193):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x) + c - ax - c}{\Delta x} (197)$$

Здѣсь мы по (193) должны были составить первый членъ числителя выраженія $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, то есть процѣлать надъ $x + \Delta x$ ту самую операцію, которая процѣлана въ данной функции надъ x самимъ, именно умноженіе на a . Потомъ вычлестъ отсюда самую функцию, то есть ax , полученную разность разделить на Δx , а отъ полученнаго частнаго взять предѣлъ. Пока въ (197) переходъ къ предѣлу только еще обозначимъ, произведемъ его на дѣль. Получимъ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x) + c - ax - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax + a\Delta x + c - ax - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a) = a. \end{aligned}$$

Последнее равенство $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (a) = a$ вполне очевидно, потому что каково бы ни было Δx предел от a всегда есть a , если a постоянная величина.

Итак мы определили производную от ax . Она оказывается, что если $y = ax$, то $\frac{dy}{dx} = a$. Иначе можно этот результат написать такъ

$$\frac{d(ax)}{dx} = a \dots \dots \dots (198)$$

и повторить такъ, производная от ax равна a

Производные конечно, вполне понятны, даже могут быть вычисляемы, а между темъ они въ самомъ дѣлѣ определяютъ зависимость между безконечно малыми приращеніями функции и переменнаго, именно — самый пределъ отношения этихъ безконечно малыхъ величинъ. Не мудрено ожидать отъ идеи производной большой силы въ изслѣдованіи функций, кривыхъ, поверхностей, и такъ далѣе. Эта идея производной вполнѣ вноситъ съ собою ясность и простоту, а вовсе не сложность и запутанность, какую предполагаютъ въ дифференціальномъ исчисленіи незнакомыя съ нею. Сложность можетъ явиться, и является, впоследствии отъ того, что математики, поднявшись помощью простаго понятія о производной надъ прежнимъ горизонтомъ знанія — захотѣли конечно еще болѣе раздвинуть представляющую имъ картину и вотъ на границахъ новыхъ подлежащихъ новому изслѣдованію, областей, конечно являются опять сложность и затрудненія. Но отъ понятія о производной и при помощи его, мы пройдемъ еще очень длинный путь безъ особыхъ затрудненій.

Увеличивается или уменьшается функція начиная отъ даннаго значенія переменнаго.

§ 119. Замѣтимъ, что измѣняемъ независимо переменнаго мы разлагаемся по нашему произволу, а функция при этомъ измѣняется смотря по тому, какую формулку она связана съ независимымъ переменнымъ. Мы будемъ считать приращенія Δx независимо переменнаго всегда положительными.

Изъ выраженія (193):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \dots \dots \dots (194)$$

видно, что если начиная отъ даннаго значенія переменнаго, при дальнѣйшемъ его увеличеніи, функция *увеличивается*, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ и следовательно (при принятіи положительности Δx) *производная положительна*.

Наоборотъ, если функция *убываетъ*, то *производная отрицательна*; потому что тогда $f(x + \Delta x) < f(x)$.

Но знаку производной можно, наоборотъ, уже судить о ходѣ функций. Если при данномъ значеніи x *производная положительна*, то *функция*,

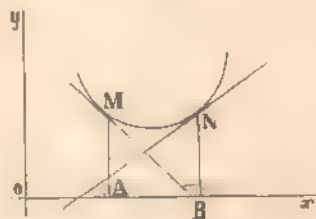
начиная от величины соответствующей этому значению переменнаго, *возрастает*.

Если *производная отрицательна*, то функция убывает. Поднимается въ данномъ мѣстѣ кривая или опускается, узнаемъ по знаку производной при данной величинѣ x .

Это видно и изъ геометрическаго значенія производной: изъ того, что она равна тангенсу угла наклоненія касательной кривой $y = f(x)$. Дѣйствительно: въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ какъ въ точкѣ M (фиг. 103), ордината кривой уменьшается съ увеличеніемъ x ,

уголъ φ тупой, и $tq \varphi$, а слѣдовательно и производная, отрицательны. Гдѣ, какъ въ N ордината увеличивается при увеличеніи x , уголъ φ острый, и $tq \varphi$, а слѣдовательно и производная, положительны. Если бы вычислили по уравненію $y = f(x)$ данной кривой производную $f'(x)$ и подождали бы въ ней $x = a = OA$ (фиг. 103), то вычисленная величина и получилась бы отрицательною.

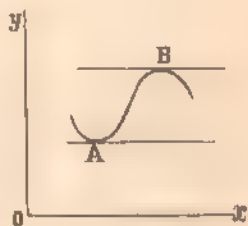
Подождавъ же въ $f'(x)$, что $x = b = OB$, получили бы величину положительную. Отрицательность производной при $x = a$ и положительность ея при $x = b$ показали бы, что въ точкѣ M , соответствующей $x = a$, кривая понижается. Положительность производной при $x = b$ показала бы, что въ точкѣ N , соответствующей $x = b$, кривая повышается.



Фиг. 103.

Въ какихъ случаяхъ $f'(x) = 0$.

§ 120. Если производная равна нулю только при определенномъ значеніи переменнаго, то значить касательная къ кривой $y = f(x)$ въ точкѣ, соответствующей этому значенію переменнаго, параллельна оси x . Это можетъ быть или въ томъ случаѣ, если близлежащія точки кривой имѣютъ большія ординаты, чѣмъ точка A (фиг. 104), соответствующая данному значенію переменнаго. Тогда говорятъ, что ордината (функции) имѣетъ минимальное (наименьшее) значеніе при данномъ значеніи переменнаго. Или же параллельность касательной, напримеръ въ B , можетъ случиться, когда ордината данной точки больше ординатъ ближайшихъ къ ней точекъ. Тогда говорятъ, что ордината имѣетъ въ этомъ мѣстѣ максимальное (наибольшее) значеніе.



Фиг. 104.

Отсюда видно, что производная служитъ сильнымъ орудіемъ для отысканія наибольшихъ и наименьшихъ величинъ. Вслѣдствіи (§ 178) мы съ этимъ весьма важнымъ вопросомъ и знакомимся ближе.

Если производная, при всякихъ значеніяхъ x , равна нулю, значить

$tg \varphi$ по всей длине кривой — 0. Значитъ имѣемъ то же же не съ кривою съ прямою параллельною къ оси x въ какой-либо точкѣ которой касательная этой прямой (совпадающая съ нею) параллельна оси x . Следовательно и ордината есть величина постоянная.

Итакъ, если производная при какомъ значеніи x равна нулю, то функция равна постоянной величинѣ.

Производная постоянной величины

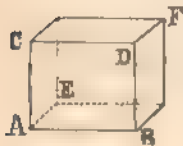
§ 121. Изобразить, следовательно, производная постоянной величины равна нулю. Это мы выразимъ такъ:

$$f'(a) = 0; \quad \frac{da}{dx} = 0 \dots \dots \dots (199)$$

Покажемъ на первыхъ же порахъ знакомству съ производною мощь этого орудія, вѣдая, что чѣмъ перешли къ общему способу вычисления производныхъ, въ знакомимся еще съ правилами основными вычисления дифференциала, о которыхъ. Прокремъ всего надо говорить къ шуму теоремамъ о безконечно малыхъ.

Различные порядки безконечно большихъ величинъ

§ 122. Прямозинный отрезокъ AB (фиг. 105) содержитъ въ себѣ безконечно большое число точекъ. Но первому, нашему, взгляду кажется, что не можетъ быть больше безконечно большаго числа.



Фиг. 105

Но однако мы видимъ, что квадратъ $ABCD$ содержитъ безконечно о много число самыхъ отрезковъ AB (прямыхъ). На немъ можно поместить безконечно-большое число такихъ прямыхъ. Следовательно квадратъ содержитъ въ себѣ безконечно-большее число безконечно-большихъ чиселъ точекъ. Принято выражаться процѣ число точекъ въ отрезкѣ равно безконечности первого порядка (безконечность первого

порядка обозначаютъ такъ ∞). Число точекъ въ квадратѣ равно безконечности 2-го порядка — ∞^2 . Не трудно видѣть, что самымъ то квадратомъ находится безконечное число въ кубѣ (фиг. 105). Говорятъ: число точекъ въ кубѣ равно безконечности 3-го порядка.

Итакъ безконечности-го самыя бываютъ разныхъ порядковъ и безконечность $(m+1)$ -го порядка больше безконечности m -го порядка въ безконечное число разъ, то есть:

$$\frac{(\infty)^{m+1}}{(\infty)^m} = \infty \dots \dots \dots (200)$$

Различные порядки безконечно малыхъ величинъ.

§ 123. Возьмемъ какое-нибудь конечное число, напримеръ 7 и будемъ составлять дроби съ числителемъ 7, а знаменатель все будемъ увеличи-

вать; получимъ такіа дробн:

$$\frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \dots, \frac{7}{1000}, \dots, \frac{7}{1000000}, \dots, \frac{7}{1000000000}, \dots$$

Чѣмъ больше знаменатель, тѣмъ меньше дробь. При такомъ увеличеніи знаменатели дробь съ числителемъ 7 совершенно подходитъ подъ обозначеніе безконечно малой величины. Поэтому безконечно малую величину можно представить въ видѣ $\frac{7}{\infty}$, гдѣ ∞ какаго угодно вѣличина, или такъ $\frac{1}{\infty}$.

Но мы видели въ § 122, что безконечности бываютъ различныхъ порядковъ. Следовательно и безконечно малыя величины бываютъ различныхъ порядковъ: $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots, \frac{1}{x^n}$.

Основныя теоремы о безконечно малыхъ.

§ 124. Теорема I. При вычисленіи прѣдела отношенія двухъ безконечно малыхъ величинъ α и β , можно вмѣнять, не вліяя на результатъ, эти безконечно малыя такими другими α' и β' прѣдела отношенія которыхъ къ прежнимъ равны единицѣ.

Предположить, что если $\lim \frac{\alpha}{x} = 1$, $\lim \frac{\beta}{y} = 1$, то $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$.

Доказательство. Следующее тождество очевидно:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta} \dots \dots \dots (201)$$

откуда $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\beta} \dots \dots \dots (202)$

Но по предположенію предположимъ $\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = 1$, $\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = 1$. Следовательно:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$$

что и требовалось доказать.

Теорема II. При вычисленіи имѣющей конечный прѣделъ суммы безконечно большаго числа безконечно малыхъ величинъ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$ можно эти безконечно малыя, не вліяя на результатъ, замѣнить такими другими $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ прѣдела отношенія которыхъ къ прежнимъ равны единицамъ.

Надо показать, что, если $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1$, $\lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1$, $\lim \frac{\alpha_3}{\beta_3} = 1$

$$\text{то } \lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots) = \lim (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots),$$

если $\lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots)$ конеченъ.

Доказательство. Если $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1$, $\lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1$, $\lim \frac{\alpha_3}{\beta_3} = 1 \dots$, то, до перехода къ прѣделу, отношенія новыхъ безконечно малыхъ къ преж-

нимъ будутъ отличаться отъ 1 на бесконечно малыя величины $\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3 \dots$ того же порядка какъ данныя, то есть будемъ имѣть

$$\frac{\beta'_1}{\alpha'_1} = 1 + \varepsilon_1; \quad \frac{\beta'_2}{\alpha'_2} = 1 + \varepsilon_2; \quad \frac{\beta'_3}{\alpha'_3} = 1 + \varepsilon_3 \dots \dots \dots (203)$$

откуда: $\beta = \alpha' + \alpha'\varepsilon_1; \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_2\varepsilon_2; \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_3\varepsilon_3 \dots$

Складывая почленно эти равенства получимъ

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \dots$$

откуда:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots) = \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \dots (204)$$

Назовемъ чрезъ δ самую большую по абсолютной величинѣ изъ величинъ $\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3 \dots$ Очевидно, что:

$$\delta (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots) > \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 + \dots \dots \dots (205)$$

по абсолютной величинѣ и следовательно при существованіи равенства (204):

$$\lim (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots) - \lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots) < \lim \delta (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots)$$

по абсолютной величинѣ.

Но, по сдѣланному въ теоремѣ предположенію $\lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots)$ величина конечная, произведемъ же этой конечной величины на бесконечно малую δ въ предѣлѣ равно нулю. Следовательно:

$$\lim (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots) - \lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots) = 0$$

или $\lim (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots) = \lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots)$.

Обѣ эти теоремы могутъ быть выражены одною такою *преставленіемъ отношеній* $\lim \frac{\alpha}{\alpha'}$ *суть бесконечно малыя величины или преставленіемъ* $\lim (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots)$ *суммы бесконечно малыя величины не изменяется отъ замены этихъ бесконечно малыя величины другими, отличающимися отъ нихъ на бесконечно малую величину высшаго порядка, потому что наприкладъ, условіе* $\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1$ *равносильно условію* $\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 + \varepsilon$, *гдѣ* ε *есть бесконечно малая величина того же порядка какъ* α *и* α' . Но послѣднее условіе равносильно $\alpha = \alpha' + \alpha'\varepsilon_1$, *итакъ* α *отличается отъ* α' *на величину 2-го порядка малости* $\alpha'\varepsilon_1$.

Иначе, и въ нашѣмъ удобной для приложенія формѣ, это можно выразить такими правилами:

Правило 1-е. *Когда имеемъ преставленіе отношеній двухъ величинъ, представляющихъ собою суммы бесконечно малыя различныя порядковъ, то можно, безъ малѣйшей погрѣшности, оставлять въ знаменателѣ сумму только бесконечно малыя величины наименьшаго порядка.*

Напримеръ, будутъ совершенно вѣрными следующие равенства:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin^2 x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Здѣсь въ числительъ преобразуемъ безконечно малую величину 2-го порядка передъ безконечно малую 1-го порядка, а въ знаменательъ безконечно малую величину 3-го порядка передъ безконечно малую 1-го порядка. Такое, точно выраженное правиломъ 1-мъ, преобразование въ некоторыхъ величинахъ не исключаетъ вычисления лишь тригонометрическимъ. Вычисленіе остается совершенно точнымъ, потому что такія упрощенія основаны на строго доказанныхъ теоремахъ I и II.

Правило 2-е. Когда ищемъ предѣлъ суммы безконечно малыхъ, то можемъ, остъ малѣйшей дѣлительности, оставить въ суммѣ только безконечно малыя наименьшаго порядка.

Дифференціалъ.

§ 125. Разсмотримъ опять уравненіе

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

опредѣляющее производную. Только до взятія предѣла, то есть при доведеніи Δx къ нулю, дробь $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ обращается точно въ $f'(x)$. Но до взятія предѣла, эта дробь отличается отъ $f'(x)$ на некоторую безконечно малую величину, которую мы назовемъ чрезъ ε , такъ что до взятія предѣла:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

откуда:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x \dots \dots \dots (206)$$

Итакъ безконечно малое приращеніе Δy функции состоитъ изъ двухъ величинъ $f'(x) \cdot \Delta x$, которая называется *дифференціаломъ* функции и величины $\varepsilon \cdot \Delta x$, которая, какъ произведеніе безконечно малыхъ величинъ ε и Δx , есть безконечно малая 2-го порядка сравнительно съ безконечно малой перваго порядка $f'(x) \cdot \Delta x$. Этою величиною $\varepsilon \cdot \Delta x$ можно, безъ погрѣшности, согласно со сказаннымъ въ § 123, пренебрегать при вычисленіи предѣловъ отношеній или суммъ. Дифференціалъ функции, равный $f'(x) \cdot \Delta x$, обозначается знакомъ d , поставленнымъ передъ функциею такъ:

$$f'(x) \cdot \Delta x = df(x) \dots \dots \dots (207)$$

Дифференціалъ независимаго переменнаго равенъ Δx . Действительно, если функция равна самому независимому переменному, то производная будетъ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

и уравнение (207) обратится въ

$$\Delta x = dx.$$

Вследствие этого для всякой функции уравнение (207) можно представить такъ:

$$f'(x) \cdot dx = d f(x) \dots \dots \dots (208)$$

Если $y = f(x)$, то получимъ:

$$f'(x) \cdot dx = dy \dots \dots \dots (209)$$

откуда

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \dots \dots \dots (210)$$

Формула (210) показываетъ, что производная есть отношенiе дифференциала функции къ дифференциалу переменнаго.

Какъ бы то ни было научимся находить производныя, такъ найдемъ и дифференциалы функций. Потому что по (209) слѣдуетъ только помножить производную на dx , чтобы получить дифференциалъ функции. Независимымъ переменнымъ мы распоряжаемся сами, а потому придемъ ему постоянно одинаковыя приращенiя и потому dx есть величина постоянная, если x есть *независимое* переменное.

Взйдемся теперь вычислить производныя — дифференцировать функцию — значить найти ея производную.

Простыя функции.

§ 126. Простыми функциями независимаго переменнаго x называются такыя ея функции, которыя происходятъ отъ одного какого нибудь дѣйствiя надъ x . Таковы:

функции алгебраическiя:

- функция сложения съ постояннымъ количествомъ $c + a$
- функция умноженiя на постоянное количество ax
- степень съ постояннымъ показателемъ: x^m

Вычитанiе, дѣленiе, вытѣченiе корня суть дѣйствiя обратныя сложению, умноженiю и возведенiю въ степень, и могутъ быть приведены къ этимъ простымъ дѣйствiямъ такимъ образомъ $a - x = a + (-x)$,

$\frac{x}{a} = x \cdot \frac{1}{a}$; $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$, какъ это извѣстно изъ элементарной алгебры. Затѣмъ идутъ функции, называемыя *трансцендентными* а именно

- показательная функция: a^x .
- логарифмъ: $\lg x$,
- тригонометрическiя $\sin x, \cos x, \lg x$.
- и круговыя: $\arcsin x, \arccos x, \text{arctg } x$.

Существуютъ еще весьма трансцендентныя функции эллиптическiя, ультраэллиптическiя и проч., но о нихъ мы не будемъ говорить.

Изъ простыхъ функций составляется безграничное число *сложныхъ*

функций. Например, из корня, суммы и синуса можно составить функцию $\sqrt{a+x+\sin x}$; функции $\operatorname{tg} x$, $\sqrt{\lg \sin x}$ составлены из тангенса, произведения, корня, логарифма и синуса, и так далее. Вследствие мы увидим, что, зная дифференцировать простые функции, или лучше сказать, зная название производных простых функций, не трудно дифференцировать и сложные функции. Итак, прежде всего найдем производные простых функций. Мы будем писать результаты в виде дифференциалов, но которые легко можно считать простыми делением на dx производная (см. (209)).

Производная отъ $(u + x)$.

§ 127. Пусть $f(x) = y = a + x$. По (193) имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a+x+\Delta x) - (a+x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \end{aligned}$$

Этот результат можно написать иначе так $\frac{dy}{dx} = \frac{d(a+x)}{dx} = 1$ и по (209) получить дифференциал данной функции

$$d(a+x) = dx \dots \dots \dots (211)$$

Производная отъ $(u + v + w + \dots)$.

§ 128. Этот результат есть частный случай дифференцирования безразмерной функции сложения — пусть u, v, w, \dots суть какие-нибудь функции отъ x ; найдем производную отъ $(u + v + w + \dots)$

По (193), обозначая приращения слагаемых чрез $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w + \dots) - (u + v + w + \dots)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v + \Delta w + \dots}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x} + \dots \right) = \\ &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \dots \end{aligned}$$

Итак: $\frac{d(u+v+w+\dots)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$ производная суммы равна сумме производных. Помножая на dx , по (209), получим

$$d(u+v+w+\dots) = du + dv + dw + \dots \dots \dots (212)$$

дифференциал суммы равен сумме дифференциалов.

Формула (211) выводится как частный случай формулы (212) сд

дующимъ образомъ:

$$d(a + x) = da + dx \dots \dots \dots (213)$$

Но по (199) производная отъ постоянной равна нулю $\frac{da}{dx} = 0$. Следовательно и $da = 0$. Следовательно (213) обращается въ $d(a + x) = dx$, что и выражено формулою 211.

Запомнимъ вѣсти вытекающее изъ (199) правило, *дифференциалъ постояннаго равенъ нулю*:

$$da = 0 \dots \dots \dots (214)$$

Производная отъ ax.

§ 129. Чтобы найти $\frac{d ax}{dx}$, воспользуемся опять формулою (193), зная, что въ данномъ случаѣ $f(x) = ax$. Получимъ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x) - ax}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax + a\Delta x - ax}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a = a. \end{aligned} \quad \text{Итакъ, } \frac{d(ax)}{dx} = a;$$

или: $d(ax) = adx \dots \dots \dots (215)$

Значитъ, *постоянный множитель выносится изъ знака дифференциала*.

Производная отъ uv.

§ 130. Продифференцируемъ болѣе общее произведение $u \cdot v$, гдѣ u и v суть двѣ какия нибудь функции отъ x . По (193) имѣемъ:

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{d(uv)}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} \end{aligned}$$

Последній членъ $\Delta u \cdot \Delta v$ числителя здѣсь 2-го порядка, тогда какъ первые два члена числителя 1-го порядка безконечно малы потому, по указанному въ § 123, членомъ $\Delta u \cdot \Delta v$ можно, безъ малѣйшей погрѣбности, пренебречь; получимъ:

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Отсюда: $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du \dots \dots \dots (216)$

Отсюда: $d(uvw) = uvdw + w \cdot d(uv) = uvdw + uvdw + vudw$.

Производная степени.

§ 131. Продифференцируем $f(x) = x^m$. По (193) имеем:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^m - x^m}{\Delta x}.$$

Разлагая здесь $(x + \Delta x)^m$ по биному Ньютона, известному из элементарной алгебры, получим:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^m + mx^{m-1} \cdot \Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^m - x^m}{\Delta x}.$$

Здесь первая и последний члены числителя взаимно уничтожаются. Для каждой из остальных членов в Δx , выделенного для деления всей суммы на Δx , получим:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \cdot \Delta x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} \cdot (\Delta x)^2 + \dots \right].$$

Здесь все члены, стоящие в скобках, кроме первого, заключают множитель Δx в различных степенях, и следовательно они суть величины бесконечно малы, а потому по § 124-му можно эти члены превратить в сравнении с конечной величиной членом mx^{m-1} . Получим:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (mx^{m-1}) = mx^{m-1}. \quad \text{Итак } \frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}$$

откуда: $d(x^m) = m \cdot x^{m-1} \cdot dx \dots \dots \dots (217)$

Например, $d(x^5) = 5x^4 dx$ и следовательно $\frac{d(x^5)}{dx} = 5x^4$; выговоривается это так: *производная от x^5 равна $5x^4$.*

§ 132. При дифференцировании тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ понадобится знание предела от $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$. Хотя он дается в руководствах по тригонометрии, но мы здесь его выведем.

Не трудно видеть, что:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Откуда:

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Умножая на $\sin x$, получим:

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}.$$

или

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \dots \dots \dots (218)$$

Когда x приближается к нулю, то $\cos x$ приближается к 1, и потому становятся более тесными границы 1 и $\cos x$, между которыми в (218) заключена величина $\frac{\sin x}{x}$. При $x = 0$ получимъ следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \dots \dots \dots (219)$$

Производная отъ $\sin x$.

§ 133. Продифференцируемъ теперь $f(x) = \sin x$. По (193) имѣемъ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

По формулѣ синуса суммы получимъ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}.$$

При $\Delta x = 0$ мы знаемъ, что $\cos \Delta x = \cos 0 = 1$. Поэтому:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

Но по (219)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Слѣдовательно:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos x = \cos x.$$

Итакъ:

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x.$$

Откуда:

$$d(\sin x) = \cos x \cdot dx \dots \dots \dots (220)$$

Производная отъ $\cos x$.

§ 134. Продифференцируемъ $f(x) = \cos x$. По (193) имѣемъ,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos \Delta x - \sin x \cdot \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x \cdot \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\sin x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right].$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\sin x) = -\sin x.$$

Отсюда:

$$d \left(\frac{\cos x}{dx} \right) = - \sin x,$$

или

$$d \cos x = - \sin x \cdot dx \dots \dots \dots (221)$$

Производная отъ $\frac{u}{v}$.

§ 135. Продифференцируемъ дробь $\frac{u}{v}$, числитель и знаменатель которой суть какая-нибудь функции отъ x . По (193) имѣемъ:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{(v + v \cdot \Delta v) \Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}. \end{aligned}$$

Помножая на dx получимъ.

$$d \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2} \dots \dots \dots (222)$$

Производная отъ $tg x$.

§ 136. Формула (222), сама по себѣ очень полезная, поможетъ намъ вывести производную отъ $tg x$ по производнымъ отъ $\sin x$ и $\cos x$, которые выведены были въ § 133 и 134. Имѣемъ:

$$d (tg x) = d \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right),$$

дальше по (222) получимъ:

$$\begin{aligned} d \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) &= \frac{\cos x \cdot d \sin x - \sin x \cdot d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x \cdot dx + \sin^2 x \cdot dx}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Итакъ:

$$d tg x = \frac{dx}{\cos^2 x} \dots \dots \dots (223)$$

Отсюда, по (209) получимъ:

$$\frac{d (tg x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Производная отъ $\arcsin x$.

§ 137. Дуга y , синусъ которой равенъ x , обозначается такъ $\arcsin x$ и является такъ *арксинусомъ* x . По этому $\arcsin x$ есть функция x синуса, такъ что если $x = \sin y$ то $y = \arcsin x$.

Продифференцируемъ $\arcsin x$. Имѣемъ:

$$y = \arcsin x; \dots \dots \dots (224)$$

отсюда:

$$x = \sin y \dots \dots \dots (225)$$

Дифференцируя обѣ части этого равенства и пользуясь формулою (220), имѣемъ:

$$dx = \cos y \, dy.$$

Отсюда

$$dy = \frac{dx}{\cos y}.$$

Замѣнивъ здѣсь $\cos y$ его величиною, выводимую изъ (225) именно, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, получимъ:

$$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\pm \sqrt{1 - x^2}} \dots \dots \dots (226)$$

Производная отъ $\arccos x$.

§ 138. Функция обратная косинусу называется *архъ-косинусъ* и обозначается такъ: $\arccos x$. Продифференцируемъ ее. Если $y = \arccos x$, то

$$x = \cos y \dots \dots \dots (227)$$

Дифференцируя обѣ части этого равенства и пользуясь формулою (221), имѣемъ:

$$dx = -\sin y \, dy.$$

Отсюда:

$$dy = -\frac{dx}{\sin y}.$$

Но, согласно съ (227), имѣемъ $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

Итакъ:

$$d(\arccos x) = \frac{-dx}{\pm \sqrt{1 - x^2}} \dots \dots \dots (228)$$

Производная отъ $\arctg x$.

§ 139. Функция обратная тангенсу называется *архъ-тангенсъ* и обозначается такъ: $\arctg x$. Продифференцируемъ ее.

$$y = \arctg x,$$

$$x = \operatorname{tg} y \dots \dots \dots (229)$$

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y}$$

Отсюда:

$$dy = \cos^2 y \cdot dx.$$

Но

$$\cos y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Итак:

$$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2} \dots \dots \dots (230)$$

Дифференцирование сложных функций.

§ 140. Из простых функций мы не дифференцировали только a^x и $\lg x$ (кроме высших transcendентных). По дифференцирование a^x и $\lg x$ требует предварительных соображений, и потому мы отложим пока их дифференцирование до § 148-го, а теперь заметим дифференцирование сложных функций. Если дифференциал простых функций, весьма легко дифференцировать и сложные: вычисление ведется *последовательно* так, как это всего лучше выясняется из следующих примеров.

Пример 1-ый. Продифференцировать $\sin^3 x$. Значит дано $y = \sin^3 x$.

Принимаем здесь сперва за независимое переменное несь $\sin x$. Видим, что онъ возведенъ въ третью степень. Поэтому прилагаемъ формулу (217) дифференциала степени: $dx^m = m x^{m-1} dx$. Получимъ:

$$dy = d(\sin^3 x) = 3 \cdot \sin^2 x \cdot d \sin x.$$

Здесь нужно еще взять $d \sin x$ — дифференциалъ синуса. Дляъ это по формулѣ (220), получимъ:

$$dy = 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx.$$

Задача рѣшена. Если хотимъ получить производную, то остается только разделить на dx какъ это слѣдуетъ изъ сопоставления формулъ (209) и (210), при чемъ получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin^3 x)}{dx} = 3 \sin^2 x \cdot \cos x.$$

Примеръ 2-ой. $y = \sin(x^2)$. Принимаемъ здесь сперва за независимое переменное x^2 . Видимъ, что отъ него берется синусъ. Поэтому прилагаемъ формулу (220) дифференциала синуса: $d(\sin x) = \cos x dx$. Получимъ:

$$dy = d \sin(x^2) = \cos(x^2) dx^2.$$

Здесь осталось еще взять дифференциалъ dx^2 . Беремъ его по формулѣ (217) и получаемъ:

$$dy = d \sin(x^2) = \cos(x^2) \cdot 2x \cdot dx.$$

Примеръ 3-ий. $y = (x^2 + x^3)^5$. Принимаемъ здесь сперва за независимое переменное всю стоящую въ скобкахъ величину $x^2 + x^3$. Видимъ что она возведена въ 5-ую степень. Поэтому прилагаемъ формулу (217) дифференциала степени. Получимъ:

$$dy = 5(x^2 + x^3)^4 d(x^2 + x^3).$$

Здесь еще осталось взять $d(x^2 + x^3)$. Прилагая формулу (212), получимъ:

$$dy = 5(x^2 + x^3)^4 (dx^2 + dx^3).$$

Здѣсь еще осталось взять dx^2 и dx^3 . Сдѣлавъ это опять по формулѣ (217), получимъ:

$$dy = 5(x^2 + x^3)^4 (2x dx + 3x^2 dx).$$

Вынося dx за скобку, получимъ:

$$dy = 5(x^2 + x^3)^4 (2x + 3x^2) \cdot dx.$$

Вообще dx всегда должно оказаться въ видѣ множителя.

Дифференцирование сложныхъ функций производится последовательнымъ применениемъ формулъ дифференціаловъ простыхъ функций до тѣхъ поръ, пока знакъ d не окажется стоящимъ только надъ x . Прослѣдимъ ходъ дѣйствій въ настоящемъ примѣрѣ на слѣдующемъ рядѣ равенствъ:

$$\begin{aligned} dy &= d(x^2 + x^3)^5 = 5(x^2 + x^3)^4 \cdot d(x^2 + x^3) = 5(x^2 + x^3)^4 (dx^2 + dx^3) = \\ &= 5(x^2 + x^3)^4 (2x dx + 3x^2 dx). \end{aligned}$$

Въ результатѣ надъ знакомъ d остался только x .

При небольшомъ навыкѣ послѣдній результатъ, безъ затрудненія, можно написать прямо по заданію $d(x^2 + x^3)$, проѣлавъ промежуточные вычисленія въ умѣ.

Примѣръ 4-ый. $y = \frac{x^3 + a}{x^2 + b}$. Дана дробь, поэтому дифференцируемъ ея по формулѣ (222), полагая $u = x^3 + a$, $v = x^2 + b$. Получимъ:

$$dy = \frac{v du - u dv}{v^2} = \frac{(x^2 + b) \cdot d(x^3 + a) - (x^3 + a) \cdot d(x^2 + b)}{(x^2 + b)^2}.$$

Остается взять еще въ числитель $d(x^3 + a)$ и $d(x^2 + b)$. Дѣлаемъ это по формулѣ (212). Получимъ:

$$dy = \frac{(x^2 + b) \cdot (dx^3 + da) - (x^3 + a) \cdot (dx^2 + db)}{(x^2 + b)^2}.$$

Здѣсь беремъ dx^2 и dx^3 по формулѣ (217), дифференціалы же da и db по (214) равны нулю. Итакъ:

$$dy = \frac{(x^2 + b)(3x^2 dx) - (x^3 + a)(2x dx)}{(x^2 + b)^2}.$$

Выводя, наконецъ, dx за скобки, получимъ:

$$dy = \frac{(x^2 + b) 3x^2 - (x^3 + a) 2x}{(x^2 + b)^2} dx = \frac{3x^2(x^2 + b) - 2x^2(x^3 + a)}{(x^2 + b)^2} dx.$$

Прежде чѣмъ идти далѣе, совѣтуемъ прѣдлать последовательно задачи: 87—109, въ числѣ приложенныхъ въ концѣ нашей книги.

Дифференцированіе радикаловъ.

§ 141. Пока еще не приобрѣтенъ навыкъ, удобнѣе дифференцировать радикалы (напримѣръ \sqrt{x}), преобразуя ихъ предварительно въ дробиныя

степени по известной, из элементарной алгебры, формулѣ:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \dots \dots \dots (231)$$

Примеръ 1-ый. $y = \sqrt{x}$. По (231) получимъ: $y = x^{\frac{1}{2}}$. По формулѣ (217) получимъ:

$$dy = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

И по известной формулѣ алгебры $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$. Следовательно: $dy = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$.

Переходя опять отъ дробной степени къ радикалу, получимъ: $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Примеръ 2-ой. $y = \sqrt{x^3}$. Надѣмся, что теперь будетъ понятно уже и безъ объясненій.

$$dy = d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{3}{2} \sqrt{x} dx.$$

Примеръ 3-ий. $y = \sqrt{\sin x}$.

$$dy = d(\sin x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\sin x)^{\frac{1}{2}-1} d \sin x = \frac{1}{2} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x dx = \frac{\cos x dx}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Понятіе о рядахъ.

§ 142. Безконечнымъ рядомъ называется сумма безконечнаго числа членовъ, составленныхъ по какому-нибудь определенному закону. Сумму n членовъ мы будемъ обозначать такъ S_n . Положимъ, что имѣемъ слѣдующій рядъ, состоящій изъ n членовъ:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n \dots \dots \dots (232)$$

Если, съ возрастаніемъ числа членовъ n , рядъ (232) приближается къ какому-нибудь определенному предѣлу, то онъ называется *сходящимся*. Напримеръ, известная изъ алгебры безконечно-убывающая геометрическая прогрессія

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \frac{a}{1-q} \dots \dots \dots (233)$$

есть рядъ сходящійся, потому что, при безконечномъ числѣ членовъ, этотъ рядъ равенъ $\frac{a}{1-q}$, и чѣмъ большее число членовъ мы возьмемъ, тѣмъ ближе къ суммѣ пойдетъ къ этому предѣлу $\frac{a}{1-q}$.

Сумму n членовъ мы условились изображать чрезъ S_n . Будемъ изображать чрезъ S (безъ значка) сумму безконечнаго числа членовъ. Разность $S - S_n$ называется *остаткомъ* или остаточнымъ членомъ ряда и изображается чрезъ R_n . Остатки будутъ различныя, смотря по тому, на какомъ членѣ мы обрываемъ рядъ. Значекъ n въ обозначеніи R_n показываетъ, что мы обрвали рядъ на n -омъ членѣ (что мы ограничиваемся разсмотрѣніемъ суммы n первыхъ членовъ).

Если, съ увеличением n до безконечности, ряд S_n не приближается ни къ какому определенному предѣлу, то такой ряд называется *расходящимся*.

Признаки сходимости рядовъ.

§ 143. Чрезвычайно важно бываетъ знать, сходящийся ли данный рядъ или нѣтъ. Для этого сравниваютъ данный рядъ съ какимъ-нибудь другимъ въ сходимости котораго увѣрены, и если члены данного ряда не превышаютъ членовъ того, сходимости котораго уже раньше была доказана, то заключаютъ, что и данный рядъ сходящийся. Очень удобно, напримеръ, сравнивать данный рядъ съ безконечно-убывающею геометрическою прогрессіею, которая, какъ извѣстно, имѣетъ определенную сумму $\frac{a}{1-q}$ и потому представляетъ собою рядъ сходящийся. Докажемъ слѣдующее

Теорема. *Рядъ, все члены котораго положительны, оказывается сходящимся въ томъ случаѣ, если, начиная съ какого-нибудь члена, отношеніе всякаго послѣдующаго члена къ предъидущему $\frac{U_{m+1}}{U_m}$ менше какой-нибудь правильной дроби k .*

Доказательство. Пусть это условіе выполняется, начиная съ члена U_m . Возьмемъ какое-нибудь число m , большее чѣмъ n . Согласно предположенію будемъ имѣть: $\frac{U_{m+1}}{U_m} < k, \frac{U_{m+2}}{U_{m+1}} < k \dots$ Откуда

$$\begin{aligned} U_{m+1} &< kU_m \\ U_{m+2} &< kU_{m+1} \\ &\dots \dots \dots \\ U_{m+p} &< k^p U_m \end{aligned}$$

а слѣдовательно и поदानно:

$$\begin{aligned} U_{m+1} &< kU_m \\ U_{m+2} &< k^2U_m \\ U_{m+3} &< k^3U_m \\ &\dots \dots \dots \\ U_{m+p} &< k^pU_m \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получимъ:

$$(U_{m+1} + U_{m+2} + U_{m+3} + \dots + U_{m+p}) < (k + k^2 + k^3 + k^4 + \dots + k^p) U_m. \quad (234)$$

Но сумма прогрессии $k + k^2 + k^3 + \dots + k^p$, число членовъ которой p , равно, какъ извѣстно изъ элементарной алгебры: $\frac{k - k^{p+1}}{1 - k}$. Следовательно, изъ (234) получаемъ:

$$U_{m+1} + U_{m+2} + U_{m+3} + \dots + U_{m+p} < \frac{k - k^{p+1}}{1 - k} \cdot U_m. \quad (235)$$

По предположенію $k < 1$, какъ правильная дробь. Следовательно, величина $\frac{k - k^{p+1}}{1 - k}$ конечная, какъ бы ни было велико p . Величина U_m можетъ быть сдѣлана чѣмъ-вѣскою данной величины, если возьмемъ доста

точно большее m , потому что, согласно предположению, $U_m < k^{m-n} U_n$, так как было условлено, что отношение следующего члена к предыдущему $< k$, а таких отношений существует между членами U_n и U_m всего $m - n$. Если же $U_m < k^{m-n} U_n$, то всегда можно взять такое большее m , что $(m - n)$ -ая степень от правильной дроби k будет достаточно мала (и ϵ), чтобы величина $k^{m-n} U_n$ стала меньше величин данной величины. Итак, неравенство (235) доказывает, что остаток

$$R_m = U_{m+1} + U_{m+2} + \dots + U_{m+p}$$

может быть сделан, впрочем, достаточно большого m меньше всякой данной величины как бы велико ни был p . Следовательно, при высказанных в теореме условиях, ряд оказывается сходящимся. Теорема доказана.

Ипритивь того, если $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, то ряд окажется расходящимся, потому что тогда члены, начиная с U_n , будут возрастать.

П р и м е р ы.

§ 144. Ряд:

$$1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots + \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot (n+1)} + \dots \dots \dots (236)$$

сходящийся, потому что:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(\frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots n \cdot (n+1)} \right) : \left(\frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} \right) = \frac{x}{n+1}$$

но $(n+1)$ все увеличивается и, начиная с некоторого n , величина $\frac{x}{n+1}$ делается меньше правильной дроби k . Следовательно, по теореме § 143-го, ряд (236) сходящийся.

Ч и с л о e.

§ 145. Если в ряд (236) сделаем $x = 1$, то получим ряд:

$$2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots \dots \dots (237)$$

Это ряд сходящийся, потому что представляет собою частный случай ряда (236). Предель, которого он достигнет при безконечном числе членов, представляет собою неизмеримое число, называемое буквою e и играющее в анализе весьма важную роль (это есть основание Неперовских логарифмов). Число e , как не трудно видеть, больше чем 2 и меньше чем три. Действительно оно больше чем 2, потому что, для его составления, нужно, по формуле (237), к 2 прибавить еще безконечное число членов. Что оно меньше трех можно видеть из сравнения ряда (237) с рядом:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \dots \dots (238)$$

Ряд (238) есть бесконечно-убывающая геометрическая прогрессия.

сумма которой равна $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Поэтому:

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 3, \dots (239)$$

а по (237):

$$2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots = e, \dots (240)$$

Какъ видно изъ сравнения (239) съ (240), члены ряда (240) соответственно меньше членовъ ряда (239). Следовательно, $e < 3$.

§ 146. Теорема. Число e есть преломъ величины $(1 + \frac{1}{m})^m$ при возрастании m до бесконечности.

Доказательство. Разложимъ $(1 + \frac{1}{m})^m$ по биному Ньютона. Получимъ:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= 1 + m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{m^2} \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{m^3} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{1}{m^n} + \dots \end{aligned}$$

Это равенство можно написать въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{m} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \\ &+ \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots \dots \dots (241) \end{aligned}$$

При $m = \infty$ дроби $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{n-1}{m}$ обращаются въ нули, и рядъ (241) обратится въ рядъ (237), равный e . Итакъ:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e, \dots \dots \dots (242)$$

Числовая величина e .

§ 147. Подобно тому какъ Архимедово число π можно вычислить только приблизительно, точно такъ же и e можно вычислить только приближенно. Вычисляя e оно помощью ряда (240), ограничиваясь какимъ-нибудь конечнымъ числомъ его членовъ. Чтобы знать, какую ошибку мы при

этомъ дѣлаемъ, разсмотримъ остатокъ R_n ряда (240). Имѣемъ:

$$R_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot (n+1)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)(n+2)} + \dots$$

Очевидно, что:

$$R_n < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right).$$

Но стоящая въ скобкахъ величина есть геометрическая прогрессія суммы которой по правиламъ элементарной алгебры

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{(n+1)(n+1-1)} = \frac{1}{n}.$$

Итакъ:

$$R_n < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Значитъ, если ограничимся, напримеръ, только четырьмя членами ряда (240), то сдѣлаемъ ошибку

$$R_4 < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{4}$$

меньшую чѣмъ $\frac{1}{96}$.

При 5 членахъ ошибка будетъ меньше $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{5}$, то есть меньше $\frac{1}{600}$. Значитъ рядъ (240) быстро сходящійся. Такимъ образомъ, если вычислимъ e съ ошибкою меньшею, чѣмъ 0,0000001, то найдемъ:

$$e = 2,7182818. \dots \dots \dots (243)$$

Производная отъ логарисма.

§ 148. Найдемъ производную отъ $\log_a x$, взятаго при основаніи, равномъ a . Имѣемъ: $y = \log_a x$. Это значитъ (см. элементарную алгебру), что $x = a^y$. Имѣемъ: $y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$, откуда:

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Полагая $\frac{x}{\Delta x} = m$, получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{m}{x} \log_a \left(1 + \frac{1}{m} \right) \\ &= \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \dots \dots \dots (244) \end{aligned}$$

При уменьшеніи Δx до нуля, $m = \frac{x}{\Delta x}$ возрастаетъ до безконечности.

Но, по (242), $\lim_{m \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{m}^m = e$. Следовательно, равенство (244) дает:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a e,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e \cdot dx. \dots \dots \dots (245)$$

Если же логарифмъ брали бы въ такой системѣ, въ которой основа нѣмъ было бы не a , но e , то $\log_a e = 1$ и (245) обратилось бы въ:

$$d \lg x = \frac{dx}{x} \dots \dots \dots (246)$$

Неравнѣно большая простота формулы (246) сравнительно съ формулою (245) заставляетъ предпочесть въ анализѣ употребленіе Неперовскихъ логарифмовъ, имѣющихъ основаніе e . Переходъ же отъ логарифмовъ, взятыхъ при основаніи 10, къ Неперовскимъ дѣлается по известнымъ изъ алгебры формуламъ:

$$\log_{10} x = \lg x \cdot \log_{10} e,$$

гдѣ $\log_{10} e = 0,4342945$.

Неперовские логарифмы будемъ обозначать двумя только буквами \lg .

Производная отъ a^x .

§ 149. Продифференцируемъ показательную функцію a^x . Дано $y = a^x$. Логарифмируем, получимъ: $\lg y = x \lg a$. Дифференцируя обѣ части этого равенства и пользуясь формулою (246), получимъ

$$\frac{dy}{y} = \lg a \cdot dx,$$

откуда:

$$dy = y \cdot \lg a \cdot dx.$$

Подставляя вмѣсто y его величину a^x , получимъ:

$$dy = d(a^x) = a^x \cdot \lg a \cdot dx. \dots \dots \dots (247)$$

По этой формулѣ получимъ:

$$d(e^x) = e^x dx. \dots \dots \dots (248)$$

Для насъ dx , получимъ, какъ известно по (209) и (210), производную

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x. \dots \dots \dots (249)$$

Это замѣчательное свойство функціи e^x , что ея производная равна ей же самой.

Употребление логарифмирования при дифференцировании некоторых функций.

§ 150. Весьма часто бывает удобнее сначала прологарифмировать данную функцию, а потом уже дифференцировать. Например, пусть нам дано $y = x^x$. Она и не показательная и не степень с постоянным показателем. Но нам нечего и входить в разбор того, каковы ее отличия от этих функций, а мы просто берем логарисмы от обеих частей равенства $y = x^x$. Получим: $\lg y = x \lg x$. Дифференцируя здесь обе части равенства, и пользуясь формулами (216) и (246), получим:

$$\frac{dy}{y} = \frac{x dx}{x} + \lg x \cdot dx = (1 + \lg x) dx.$$

откуда $dy = y(1 + \lg x) dx = x^x(1 + \lg x) dx$.

Частные производные функций многих переменных.

§ 151. Если функция зависит от нескольких независимых переменных, например $f(x, y, z)$, то можно изменять в ней одно какое-нибудь переменное, не изменяя остальных. Произвольная вытая от такой функции по одному из переменных в предположении, что другие переменные не изменяются, называется *частною производною*. Например, от $f(x, y, z)$ можно взять частную производную по x , предположив, что y и z остаются постоянными. Эта частная производная обозначается такъ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ или такъ $f'_x(x, y, z)$. От той же $f(x, y, z)$ можно взять частную производную по y в предположении, что только y изменяется, а x и z остаются постоянными, эта производная обозначается такъ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ или такъ $f'_y(x, y, z)$. В такомъ же смысле можно взять частную производную по z , обозначаемую такъ $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ или такъ $f'_z(x, y, z)$. При обозначении частных производныхъ, пользуются не прямыми d , а круглыми ∂ , для указания на то, что стоящая в числителе частная производная величина $\partial f(x, y, z)$ не одна и та же, такъ какъ и самое дифференцирование производится при разныхъ предположеніяхъ: въ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ одно x предполагается изменяющимся, въ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ одно y изменяется, и такъ т.д.

Примѣръ 1-ый. Опредѣлимъ частныя производныя отъ $f(x, y, z) = xyz^2$. Полагая y и z постоянными, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz^2.$$

Полагая x и z постоянными, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz^2.$$

Полагая x и y постоянными, получимъ:

$$\frac{df}{dz} = xy \cdot 2z = 2xyz.$$

Примеръ 2-ой. Определить частныя производныя отъ

$$f(x, y, z) = x \cdot \lg y + z.$$

Получимъ:

$$\frac{df}{dx} = \lg y; \quad \frac{df}{dy} = \frac{x}{y}; \quad \frac{df}{dz} = 1.$$

Замѣчаніе. Здѣсь уже нельзя разсматривать частную производную какъ отношеніе одного и того же df къ dx , къ dy и къ dz , потому что въ каждой частной производной df берется при особыхъ предположеніяхъ о постоянности остальныхъ переменныхъ.

Полный дифференціалъ.

§ 152. Посмотримъ теперь, каково будетъ приращеніе функции, если всѣ переменныя будутъ измѣняться — если всѣ онѣ получатъ приращеніе. Для простоты разсмотримъ функцию z отъ двухъ переменныхъ x и y , такъ что $z = f(x, y)$. Если x получить приращеніе Δx , а y — приращеніе Δy , то z получить приращеніе Δz :

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (250)$$

Вычтемъ и приложимъ сюда $f(x + \Delta x, y)$. Получимъ:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \quad (251)$$

Здѣсь разность $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)$ можно разсматривать какъ приращеніе, полученное функциею при постоянномъ значеніи аргумента $x + \Delta x$ и при измѣненіи одного аргумента. Примѣняя къ этому приращенію формулу (207) и пользуясь понятіемъ о *частной производной* $f'_y(x + h, y)$, получимъ:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) = f'_y(x + \Delta x, y) \cdot \Delta y. \quad (252)$$

Точно такъ же:

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = f'_x(x, y) \cdot \Delta x. \quad (253)$$

Складывая почленно (252) и (253) и сравнивая эту сумму съ (251), получимъ:

$$\Delta z = f'_y(x + \Delta x, y) \Delta y + f'_x(x, y) \Delta x. \quad (254)$$

Но $f'_y(x + \Delta x, y)$ отличается отъ $f'_y(x, y)$ на безконечно-малую величину и следовательно, $f'_y(x + \Delta x, y) \Delta y$ отличается отъ $f'_y(x, y) \Delta y$ на безконечно-малую величину 2-го порядка, которую можно пренебречь при сравненіи съ безконечно-малой $f'_x(x, y) \cdot \Delta x$ 1-го порядка. Поэтому въ (254) можно вместо $f'_y(x + \Delta x, y) \Delta y$ поставить $f'_y(x, y) \Delta y$. Тогда получимъ:

$$\Delta z = f'_y(x, y) \cdot \Delta y + f'_x(x, y) \cdot \Delta x. \quad (255)$$

Эту величину называют полным дифференциалом функции $f(x, y)$; обозначают ее так: dz или $df(x, y)$. Производная, полученная от такого дифференцирования $f(x, y)$ по x , при котором y принимается за постоянное, обозначается круглыми o так: $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y)$. Производная, полученная от $f(x, y)$ при дифференцировании ее по y принимая x за постоянное обозначается так: $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$. Эти производные называются

$\frac{\partial z}{\partial x}$ — частная производная от z по x
 $\frac{\partial z}{\partial y}$ — частная производная от z по y

Вводя эти обозначения в (255), получим:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \dots \dots \dots (256)$$

Примеры. Найти полный дифференциал от $x^2y = z$. Вычисляем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad dz = 2xy dx + x^2 dy.$$

Въ подробныхъ курсахъ доказывается, что для $u = f(x, y, z, u \dots v)$ полный дифференциалъ равенъ:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial u} du + \dots + \frac{\partial w}{\partial v} dv \dots (257)$$

Производная сложныхъ функций.

§ 153. Если u и v суть функции x и y , и изъ нихъ еще составлено $f(u, v) = y$, то по (256):

$$dy = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv,$$

откуда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dx} \dots \dots (258)$$

Примеры:

$$y = u \cdot v \cdot w.$$

Вычисляемъ:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = vw; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = uw; \quad \frac{\partial y}{\partial w} = uv.$$

Следовательно:

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot w \frac{du}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + uv \frac{dw}{dx} \dots \dots \dots (259)$$

Производная неявныхъ функций.

§ 154. Бываетъ иногда нужнo вычислить $\frac{dy}{dx}$, при томъ, что y не выражено чрезъ x , но дано уравненiе

$$f(x, y) = 0 \dots \dots \dots (260)$$

которое мы не хотим, или не умеем, решить относительно y . Можно, и не определяя из него y , вычислить $\frac{dy}{dx}$. А именно, по (256) имеем:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

откуда:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \dots \dots \dots (261)$$

Въ этомъ случаѣ говорить, что y есть неявная функция x иса.

Примѣръ: Опредѣлить $\frac{dy}{dx}$, если дано $x^5 - \sin^2 y = 0$. Мы не умеемъ, решить это уравненіе, но вычислимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3 \sin^2 y \cos y,$$

по формулѣ (261) пишемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4}{3 \sin^2 y \cos y}.$$

Если имеемъ $f(x, y, u, v)$, гдѣ x, y независимая переменная u, v ихъ функции, то по (258) получимъ:

$$\frac{df(x, y, u, v)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Но $\frac{dx}{dx} = 1; \quad \frac{dy}{dx} = 0.$

Поэтому:

$$\frac{df(x, y, u, v)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx} \dots \dots \dots (262)$$

полная производная отъ $f(x, y, u, v)$ по x получается следовательно дифференцируя ее по x , но сколько онъ явно въ нее входитъ, дифференцируя ее кромѣ по x принимая въ расчетъ зависимости функций u и v отъ x , и складывая результаты.

Примѣръ:

$$\frac{d \left[\frac{x^2 + \psi(x)}{\varphi(x)} \right]}{dx}$$

Здѣсь $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{2x}{2x}; \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{x^2}{\varphi(x)^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 1$

$$\frac{d \left[\frac{x^2 + \psi(x)}{\varphi(x)} \right]}{dx} = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{2x}{2x} + \frac{\psi'(x)}{\varphi(x)^2} + \frac{x^2}{[\varphi(x)]^2} \frac{1}{\varphi(x)}$$

Производная высшихъ порядковъ.

§ 155. Первую производную можно опять дифференцировать. Получимъ вторую производную отъ первой производной, называемую *второю* производною, и такъ далѣе. Приняты для высшихъ производныхъ слѣдующія обозначенія:

$$y = f(x); \quad y' = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \text{первая производная.}$$

$$y'' = \frac{df'(x)}{dx} = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \text{вторая производная.}$$

$$y''' = \frac{df''(x)}{dx} = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \text{третья производная.}$$

$$y^{(n)} = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \text{n-ая производная.}$$

Примеръ 1-й. $y = x^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 6; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

Примеръ 2-й. $y = x^m$.

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n} \quad (263)$$

Въ случаѣ функции многихъ переменныхъ можно такую функцию дифференцировать сначала по x , потомъ по y .

Если $z = f(x, y)$, то можно вычислить

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Примеръ

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 \sin y) = \frac{\partial}{\partial y} (2x \sin y) = x^2 \cos y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial (2x \sin y)}{\partial y} = 2x \cos y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial (x^2 \cos y)}{\partial x} = 2x \cos y$$

Мы видимъ, что здѣсь

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Эта независимость второй производной отъ порядка дифференцирования всегда существуетъ, и доказывается въ подробныхъ курсахъ для всякихъ функций. Поэтому принято такимъ производнымъ давать общее обозначеніе $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Такъ что:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} \dots \dots (264)$$

Дифференциалы отъ функций многихъ переменныхъ тоже можно опять дифференцировать. Такъ если данъ:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

то, дифференцируя его, получимъ:

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} (dy)^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy^2. \dots \dots (265) \end{aligned}$$

Весьма похоже на $a^2 + 2ab + b^2$. Дифференцируя еще разъ, получили бы величину сходную съ $(a + b)^3$. Вообще, если $u = f(x, y, z)$, то:

$$d^2u = \left[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right]^{(n)} \dots \dots (266)$$

Здѣсь n поставленъ во второй части въ скобкѣ, потому что, процѣлавъ вычисленіе по биному Ньютона, надо въ правой части вездѣ замѣнить $(du)^n$ чрезъ $d^n u$, такъ что въ формулѣ (266) величина n и есть показатель.

Замѣна одного независимаго переменнаго другимъ.

§ 156. Когда мы принимаемъ за независимое переменное вмѣсто x какое-нибудь другое u , то уже разсматриваемъ du какъ постоянное, а dx дѣлается переменнымъ. При dx постоянномъ, $d^2x = 0$, при du постоянномъ $d^2u = 0$.

Итакъ, для замѣны независимаго переменнаго другимъ, нужно только помнить, что dx дѣлается переменнымъ, когда x перестаетъ быть независимымъ и потому дифференцировать $\frac{dy}{dx}$ приходится по (222) какъ дробь въ которой и числитель и знаменатель переменныя (зависимыя). Слѣдовательно, чтобы, зная первую производную $\frac{dy}{dx}$, получить изъ нея вторую при новомъ независимомъ переменномъ u , нужно взять дифференциалъ отъ $\frac{xd}{yd}$ какъ отъ дроби и полученный результатъ раздѣлить на dx . Вто-

рая производная получится следовательно въ видѣ:

$$\frac{dx \cdot d^2y}{(dx)^2} \cdot \frac{dy \cdot d^2x}{dx} \dots \dots \dots (267)$$

Будемъ отличать дифференціалы, взятые въ предположеніи, что независимымъ остается x , значками, такъ: d_x^2y . Дифференціалы же, взятые въ предположеніи, что за независимое переменное принято U , будемъ обозначать по прежнему. (Примежь только на время такое обозначеніе). Вторая производная (267) замѣняется $\frac{d_x^2y}{dx^2}$. Следовательно:

$$\frac{d_x^2y}{dx^2} \text{ замѣняется выраженіемъ } \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{dx^2 \cdot dx} \dots \dots (268)$$

Умноживъ на dx^2 , получимъ:

$$d_x^2y = \frac{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}{dx} \dots \dots \dots (269)$$

Примѣръ. Пусть, напримѣръ, въ выраженіи.

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \dots \dots \dots (270)$$

$$\frac{d_x^2y}{dx^2}$$

Нужно замѣнить прямоугольныя координаты x, y полярными r, φ , связанными съ прежними переменными равенствами $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. (Именно такое преобразование формулы (270) намъ потомъ понадобится). Прямо подставить, вмѣсто x, y , ихъ выраженія въ (270) мы не имѣемъ права, потому что замѣняется независимое переменное. Необходимо сначала замѣнить въ (270) вторую производную $\frac{d_x^2y}{dx^2}$ на выраженіемъ по формулѣ (267). Получимъ:

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{d_x^2y}{dx^2} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x} = \frac{\left[dx^2 + dy^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x} \dots \dots (271)$$

Теперь изъ данныхъ соотношеній, $x = r \cdot \cos \varphi, y = r \cdot \sin \varphi$ вычисляемъ (не столь важно предѣлать эти вычисления самому, какъ понять смыслъ перехода отъ x, y къ r, φ):

$$\left. \begin{aligned} dx &= \cos \varphi \cdot dr - r \sin \varphi \cdot d\varphi; & dy &= \sin \varphi \cdot dr + r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \\ d^2x &= \cos \varphi \cdot d^2r - 2 \sin \varphi \cdot dr \cdot d\varphi - r \cos \varphi \cdot d\varphi^2 \\ d^2y &= \sin \varphi \cdot d^2r + 2 \cos \varphi \cdot dr \cdot d\varphi + r \sin \varphi \cdot d\varphi^2 \end{aligned} \right\} \dots (272)$$

Вставляя эти величины въ (271), получимъ:

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{[dr^2 + r^2 d\varphi^2]^2}{r^2 d\varphi^4 + 2ur^3 d\varphi^2 - r d^2 r \cdot d\varphi} = \frac{\left[r + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^2}{r^3 + 2 \frac{dr}{d\varphi^3} - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2}}$$

Опять повторимъ, что продолжать и въ вычисленія въ этомъ примѣрѣ было бы слишкомъ долго, но главное надѣясь следующее. Въ параграфѣ 1*2-мъ мы увидимъ, что формула (270) имѣетъ весьма важно геометрическое значеніе. Эта формула выводится сравнительно просто въ координатахъ (x, y) , является необходимо получить ее и въ полярныхъ координатахъ (r, φ) , при чемъ, не смотря на довольно длинное вычисленіе для перехода въ (270) дифференціаловъ (272), всетаки этотъ путь много удобнѣе непосредственнаго вывода формулы въ полярныхъ координатахъ. Въ тѣхъ именно въ такихъ-то случаяхъ и необходимо формула (267).

Соединивъ механизмъ дифференціального исчисленія, въ пределахъ данныхъ цѣлей, уже достаточно выведенъ. Рекомендуемъ прѣдлать читателю.

Памъ прѣдстоитъ теперь отдѣлаться съ приложеніемъ дифференціального исчисленія къ теоріи рядовъ, изслѣдованію фундам. и симметр. свойствъ и обнаруженію вся сила этого метода.

Аналитическія приложенія дифференціального исчисленія.

1) Ряды.

Рядъ Тейлора для цѣлой рациональной алгебраической функціи.

§ 157. Напомнимъ себѣ одинъ рядъ, имѣющимъ первостепенное значеніе въ математикѣ и являющимся среднимъ изслѣдованію другихъ рядовъ, функцій, главнѣйшимъ оружіемъ приближенныхъ вычисленій и красочнымъ камнемъ теоріи функцій. Это такъ и зываемая рядъ Тейлора.

Возьмемъ съмысл. алгебраическую рациональную цѣлую функцію m -го порядка самаго общаго вида:

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \dots + A_{m-3} x^3 + A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A_0 \quad (273)$$

и посмотримъ, во что обратится эта функція, если мы дадимъ ей какое-нибудь приращеніе h . Другими словами по данной формулѣ (273) функція $f(x)$, опредѣлимъ $f(x+h)$.

Вставляя въ (273) вмѣсто x величину $x+h$, получимъ:

$$f(x+h) = A_0 (x+h)^m + A_1 (x+h)^{m-1} + A_2 (x+h)^{m-2} + A_3 (x+h)^{m-3} + \dots + A_{m-2} (x+h)^2 + A_{m-1} (x+h) + A_0 \quad (274)$$

Разложим, теперь, находящийся в правой части, степени двучлена $(x + h)$ по биному Ньютона. Получимъ:

$$\begin{aligned}
 f'(x+h) = & A_0 \left[x^m + mx^{m-1} \cdot h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \cdot h^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 h^{m-3} + mxh^{m-1} + h^m \right] \\
 & + A_1 \left[x^{m-1} + (m-1)x^{m-2} \cdot h \right. \\
 & \left. + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} x^{m-3} \cdot h^2 + \dots \right. \\
 & \left. + \frac{m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} x^2 h^{m-3} + (m-1) \cdot x \cdot h^{m-2} + h^{m-1} \right] \\
 & + A_2 \left[x^{m-2} + (m-2)x^{m-3} \cdot h \right. \\
 & \left. + \frac{(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} x^{m-4} \cdot h^2 + \dots \right. \\
 & \left. + \frac{(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} x^2 \cdot h^{m-4} + (m-2)x \cdot h^{m-3} + h^{m-2} \right] \\
 & + \dots \dots \dots \\
 & + A_{m-2} [x^2 + 2 \cdot xh + h^2] \\
 & + A_{m-1} [x + h] \\
 & + A_m
 \end{aligned} \quad \dots (275)$$

Отбравъ первые члены этихъ строкъ, получимъ, какъ видимъ, самую $f(x)$

$$\begin{aligned}
 & A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-2} x^2 + \\
 & + A_{m-2} x^2 + A_{m-1} x + A_m = f(x).
 \end{aligned}$$

Отбравъ въ (275) члены, вмѣсто множителя h , получимъ

$$\begin{aligned}
 h [A_0 mx^{m-1} + A_1 (m-1)x^{m-2} + A_2 (m-2)x^{m-3} + \dots + \\
 + A_{m-2} \cdot 3 \cdot x^2 + A_{m-2} \cdot 2x + A_{m-1}] = hf'(x).
 \end{aligned}$$

Если бы мы взяли въ (275) произвольную, то получили бы эту самую строку. Мы и написали, что она $= f'(x)$.

Отбравъ члены, содержаще одинаковыя степени h , получимъ слѣдующія строки, которыя окажутся равными тѣмъ величинамъ, которымъ они и показаны приравненными:

$$\begin{aligned}
 \frac{h^2}{1 \cdot 2} [A_0 m(m-1)x^{m-2} + A_1 (m-1)(m-2)x^{m-3} + \dots + 2A_{m-2}] \\
 = \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(x)
 \end{aligned}$$

$$\frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} [A_0 m(m-1)(m-2)x^{m-2} + A_1(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-3} + \dots] \\ = \frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x)$$

$$\dots \\ \frac{h^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} [A_0 m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x + (m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot A_1] = \\ = \frac{h^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots (m-1)} f^{(m-1)}(x)$$

$$\frac{h^m}{1 \cdot 2 \dots (m-1) \cdot m} A_0 m(m-1)(m-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \\ = \frac{h^m}{1 \cdot 2 \dots m} f^{(m)}(x)$$

Итакъ:

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) \\ + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) + \dots + \frac{h^m}{1 \cdot 2 \dots m} f^{(m)}(x) \dots \dots (276)$$

Вотъ какое замѣчательное соотношеніе существуетъ между $f(x+h)$ и производными отъ $f(x)$ въ томъ случаѣ, если $f(x)$ есть алгебраическая, рациональная, цѣлая функция вида (273). Вопросъ о томъ, во что обратится $f(x)$, если x получить приращеніе h , разрѣшается формулою (276) для функций вида (273). Этотъ рядъ (276) и есть рядъ Тейлора для алгебраическихъ, рациональныхъ, цѣлыхъ функций. Ниже увидимъ, что онъ применимъ, съ нѣкоторыми измѣненіями, и къ трансцендентнымъ функциямъ; главная разница окажется въ томъ, что для алгебраической функции вида (273) этотъ рядъ имѣть конечное число членовъ, именно $(m+1)$, для трансцендентныхъ же функций онъ имѣть безконечно большое число членовъ.

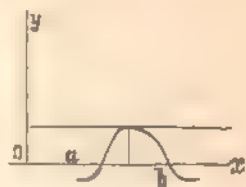
Рядъ Тейлора для какой-либо $f(x)$.

§ 158. *Лемма*: (вспомогательная теорема). Если непрерывная функция $f(x)$ обращается въ нуль при $x = a$ и при $x = b$ и производная $f'(x)$ непрерывна при измѣненіи x въ промежуткѣ отъ a до b , то эта производная обращается въ нуль по крайней мѣрѣ при одномъ изъ значеній x , заключающихся между a и b .

Доказательство. Если бы $f'(x)$ не обращалась въ нуль ни при какомъ значеніи x , лежащемъ между a и b (то есть большею одного изъ нихъ и меньшею другого), то $f'(x)$ оставалась бы или положительною или отрицательною при измѣненіи x отъ a до b . Но тогда $f(x)$, при измѣненіи x отъ a до b , или все время возрастала бы (см. § 119) или бы все время уменьшалась; тогда она не могла бы быть равною нулю при обоихъ предѣлахъ: при $x = a$ и при $x = b$, такъ какъ, возрастая

отъ нуля, она не могла бы опять дойти до нуля и, уменьшаясь отъ нуля, не могла бы опять дойти до нуля. Лемма доказана.

Геометрическое значение этой леммы таково: если кривая $y = f(x)$ пересекаетъ ось абсциссъ при $x = a$ и при $x = b$, то при какомъ-нибудь промежуточномъ значенн x (фиг. 106) касательная должна сдѣлаться параллельною оси абсциссъ.



Фиг. 106.

Разсмотримъ теперь формулу:

$$f(X) = f(x) + \frac{X-x}{1} \cdot f'(x) + \frac{(X-x)^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(x) + \dots + R \dots (277)$$

въ которой X и x суть какия-нибудь два числа. Постараемся найти такую величину R , которая сдѣлала бы эту формулу вѣрною. Замѣнимъ число x переменною величиною z и перенесемъ все члены равенства (277) въ одну сторону. Получимъ:

$$f(X) - f(z) - (X-z) f'(z) - \frac{(X-z)^2}{1 \cdot 2} f''(z) - \dots - \frac{(X-z)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(z) - R = 0 \dots \dots \dots (278)$$

Вмѣсто того, чтобы искать R , сдѣлаемъ равенство (277) вѣрнымъ, будемъ искать величину P , удовлетворяющую этому условию и находящуюся съ R въ такомъ соотношенн

$$R = \frac{(X-x)^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots n (n+1)} P \dots \dots \dots (279)$$

Подставляя въ (278) вмѣсто R эту величину изъ (279), замѣнимъ, что лѣвая часть равенства (278) обратится въ:

$$f(X) - f(z) - (X-z) f'(z) - \frac{(X-z)^2}{1 \cdot 2} f''(z) - \dots - \frac{(X-z)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(z) + \frac{(X-z)^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} P \dots \dots \dots (280)$$

Если равенство (277) было бы вѣрно, то величина (280) обратилась бы въ нуль при $z = X$. Она кромѣ того, очевидно обращается въ нуль при $z = x$. Поэтому, согласно леммѣ, доказанной въ началѣ настоящаго параграфа, производная по z отъ величины (280) должна обратиться въ нуль при какомъ-нибудь значенн z , заключающемся между числами x и X . Возьмемъ производную отъ (280). Получимъ:

$$-f'(z) - (X-z) f''(z) + f'(z) - \frac{(X-z)}{1 \cdot 2} f'''(z) + (X-z) f'(z) \dots - \frac{(X-z)^n}{1 \cdot \dots n} f^{(n+1)}(z) + \frac{(X-z)^n}{1 \cdot 2 \dots n} P.$$

Здесь, как мы видим, все члены попарно уничтожаются кроме двух последних. Итак производная ст. (280) по z будет:

$$\frac{(X-z)^n}{1.2 \dots n} f^{(n+1)}(z) + \frac{(X-z)^n}{1.2 \dots n} P \dots \dots \dots (281)$$

Величина Z , при которой эта производная обращается в нуль, как заключающаяся между x и X , может быть представлена в видѣ:

$$x + \text{дробная часть от } (X-x) \dots \dots \dots (282)$$

Называя чрез θ дробь меньшую единицы (ближе мы не хотимъ определять значеніе θ) можно представить величину (282) такъ:

$$x + \theta (X-x) \dots \dots \dots (283)$$

По леммѣ слѣдуетъ, что существуетъ такое значеніе θ при которомъ, полагая $z = x + \theta (X-x)$ въ производной (281), обратимъ эту производную в нуль. Но производная эта равна по выноскъ общаго множителя $\frac{(X-z)^n}{1.2 \dots n}$ за скобки, величинѣ

$$\frac{(X-z)^n}{1.2 \dots n} [P - f^{(n+1)}(z)] \dots \dots \dots (284)$$

которая обращается в нуль, или при $z = X$ или при

$$P = f^{(n+1)}(z) \dots \dots \dots (285)$$

Но величина (283), обращающаяся в нуль производную (284), должна по леммѣ заключаться в промежуткѣ между X и x и не быть равною X . Следовательно возможно удовлетворится (285) при z равномъ величинѣ (283). Итакъ:

$$P = f^{(n+1)} [x + \theta (X-x)].$$

Подставляя эту величину вмѣсто P въ (279) получимъ:

$$R = \frac{(X-z)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n+1)}(z) [x + \theta (X-x)] \dots \dots \dots (286)$$

Подставляя эту величину n въ (277) и полагая $X-z = h$, получимъ

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n+1)}(x + \theta h) \dots \dots \dots (287)$$

Если остатокъ этого ряда (последній членъ)

$$R = \frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n+1)}(x + \theta h) \dots \dots \dots (288)$$

обращается в нуль, при возрастаніи n до безконечности, то рядъ (287)

сходящийся и формула (287) верна при бесконечно большом числе членов ряда.

Ряд (287) и есть ряд Тейлора, годный не только для алгебраической, но и для transcendентных функций, лишь бы они не претерпевали перерыва. Остаточная членъ въ видѣ (288) будетъ определенъ Лагранжемъ.

Рядъ Макъ-Лорена.

§ 159. Вставляя въ рядъ (287) Тейлора a вмѣсто h , a вмѣсто x , получимъ рядъ Макъ-Лорена:

$$f(x) = f(a) + x f'(a) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(a) + \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+1)} f^{(n+1)}(bx) \dots \dots \dots (289)$$

Этимъ рядомъ удобнее всего пользоваться при разложеніи функций въ ряды. Для этого определяемъ последовательные $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, ... потому полагаемъ въ нихъ $x = 0$ и получимъ такимъ образомъ $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$. Вставляя затѣмъ эти величины въ (289), получимъ разложеніе данной функции въ рядъ, разложенный и восходящій степенямъ x .

Разложеніе функций e^x .

§ 160. Разложимъ e^x въ такой рядъ. По (249) вычисляемъ

$$f(x) = e^x; \quad f'(x) = e^x; \quad f''(x) = e^x \dots$$

Пологая въ нихъ $x = 0$ находимъ:

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 1$$

Вставляя въ (289) получимъ:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} + \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+1)} e^{bx} \dots (290)$$

Этотъ рядъ мы уже встрѣтили въ (236).

Разложеніе $\sin x$.

§ 161. Для $\sin x$ вычисляемъ:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x; & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x; & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x; & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x; & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x; & f^{(4)}(0) &= 1 \\ &\dots & & \dots \end{aligned}$$

Вставляя въ (289), получимъ:

$$\sin x = x \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \dots 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \dots 7} + \dots$$

$$= \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \cos(\theta x) \dots \dots \dots (291)$$

Разложение $\cos x$.

§ 162. Для $\cos x$ вычисляемъ:

$$f(x) = \cos x; f'(x) = -\sin x; f''(x) = -\cos x; f'''(x) = +\sin x;$$

$$f^{iv}(x) = \cos(x); f^{(5)}(x) = -\sin(x); f^{(6)}(x) = -\cos(x); f^{(7)}(x) = +\sin(x); f^{(8)}(x) = \cos(x);$$

Поэтому:

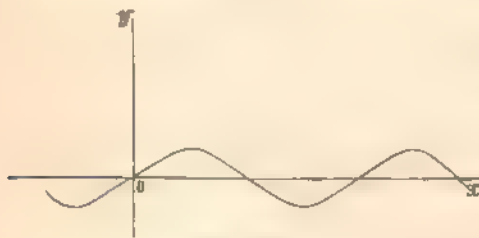
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \dots 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \dots 6} + \dots$$

$$= \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \cos(\theta x) \dots \dots \dots (292)$$

Аргументы тригонометрическихъ функций въ анализѣ.

§ 163. Величина x , стоящая подъ знакомъ \sin , \cos , \lg , называется *аргументомъ* этихъ функций. Въ тригонометриі аргументомъ служитъ уголъ, измѣряемый градусами. Въ анализѣ этотъ уголъ замѣняется дугою, его измѣряющею и описанною радиусомъ = 1; при чемъ дуга эта выражается въ частяхъ длины 2π . Напримѣръ:

$$\sin 30^\circ = \sin\left(\frac{2\pi}{12}\right); \cos 60^\circ = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right); \cos 17^\circ = \cos\left(\frac{2\pi \cdot 17}{360}\right).$$



Фиг. 107.

Такое опредѣленіе аргумента даетъ возможность разсматривать напримѣръ такую кривую *sinусоиду* (фиг. 107), уравненіе которой есть:

$$y = \sin x.$$

Здѣсь абсциссы x выражаются не градусами, но величинами линейными, выраженными въ частяхъ π .

Ряды (291) и (292) служатъ для составленія тригонометрическихъ таблицъ.

Разложение $\lg(1+x)$.

§ 164. Для $\lg(1+x)$ вычисляемъ:

$$f(x) = \lg(1+x); f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

$$f(x) = \lg 1 = 0; f'(x) = 1^{-1} = 1.$$

$$f''(x) = -1 \cdot (1+x)^{-2}; \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot (1+x)^{-3}; \quad f'''(0) = +2$$

.....

$$f^{(n+1)}(x) = \mp 1 \cdot 2 \dots n (1+x)^{-n-1}; \quad f^{(n+1)}(0) = \mp 1 \cdot 2 \dots n.$$

$$lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots \mp \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+6x)^{n+1}}. \quad (293)$$

Ряды Тейлора и Макъ-Лорена для функций многих переменныхъ.

§ 165. Въ случаѣ функции $u = f(x, y)$ двухъ переменныхъ опредѣлимъ $f(x+h, y+k)$. Для этого мы опредѣлимъ $f(x+ht, y+kt)$ и въ конечномъ выводѣ сдѣлаемъ $t = 1$. Введемъ сокращенныя обозначенія.

$$f(x+ht, y+kt) = \varphi(t) = U, \quad x+ht = p; \quad y+kt = q.$$

Такъ что:

$$U = f(p, q) = \varphi(t).$$

По формулѣ (289) имѣемъ:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t \cdot \varphi'(0) + \frac{t^2}{1 \cdot 1} \varphi''(0) + \dots + \frac{t^n}{1 \cdot 2 \dots n} \varphi^{(n)}(0) + R. \quad (294)$$

Но $\varphi(t) = U$ по условію. Слѣдовательно:

$$\varphi'(t) dt = \frac{\partial U}{\partial p} dp + \frac{\partial U}{\partial q} dq = \left(\frac{\partial U}{\partial p} h + \frac{\partial U}{\partial q} k \right) dt; \quad \text{ибо } dp = hdt; \quad dq = kdt$$

Слѣдовательно:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial U}{\partial p} h + \frac{\partial U}{\partial q} k.$$

$$\varphi''(t) = \frac{\partial^2 U}{\partial p^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial q} kh + \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} k^2.$$

Согласно введенному символическому обозначенію § 155 видимъ, что:

$$\varphi''(t) = \left[\frac{\partial U}{\partial p} h + \frac{\partial U}{\partial q} k \right]^{(2)}.$$

Точно такъ же увидѣли бы вообще что:

$$\varphi^{(n)}(t) = \left[\frac{\partial U}{\partial p} h + \frac{\partial U}{\partial q} k \right]^{(n)}.$$

При $t = 0$ получимъ: $p = x + h \cdot 0 = x; \quad q = y + k \cdot 0 = y; \quad U = u.$

Слѣдовательно:

$$f(0) = f(x, y) = u$$

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k$$

$$f''(0) = \left[\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k \right]^{(2)}.$$

Вставляя въ (294) получимъ:

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{1}{1 \cdot 2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k \right]^{(2)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left[\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k \right]^{(3)} + \dots \dots \dots (295)$$

Такой видъ принимаетъ рядъ Тейлора для $f(x, y)$

Рядъ Макъ Лорена для $f(x, y)$ будетъ (полагая $f(x, y) = u$)

$$f(x, y) = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 y + \frac{1}{1 \cdot 2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0^2 \right]^{(2)} + \dots \dots \dots (296)$$

Здѣсь значки 0 показываютъ, что въ глѣхъ величинахъ, при которыхъ они поставлены, надо сдѣлать $x = 0$; $y = 0$.

Подобныя же формулы существуютъ для функций большого числа переменныхъ.

Формула Эйлера для однородныхъ функций.

§ 166. Приведемъ формулу (296) къ выводу одной замѣчательной теоремы Эйлера объ однородныхъ функцияхъ. Однородною функциею m го порядка называется такая функция, которая, по умноженіи всѣхъ входящихъ въ нее переменныхъ на какую нибудь множитель t , равна произведенію первоначальнаго своего вида (сд. умноженіи переменныхъ на t) на t^m , такъ что $f(x, y, z)$ однородна, если $f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z)$.

Теорема Эйлера. Сумма произведеній частныхъ производныхъ однородной функции на соответственные переменныя = произведенію самой функции на показатель порядка однородности, такъ что:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z = m f(x).$$

Положимъ $t = 1 + \alpha$. Изъ уравненія $f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z)$ получимъ:

$$f(x + \alpha x, y + \alpha y, z + \alpha z) = (1 + \alpha)^m f(x, y, z).$$

По (296) имѣемъ:

$$f(x + \alpha x, y + \alpha y, z + \alpha z) = f + \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z \right) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z \right)^{(2)} + \dots$$

По биному Ньютона имѣемъ:

$$(1 + \alpha)^m f = f + m f' \cdot \alpha + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 f'' + \dots$$

Слѣдовательно имѣемъ тождество:

$$f + \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z \right) = f + m \alpha f' + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 f'' + \dots$$

Въ этомъ тождествѣ коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ α должны быть равны между собой. Слѣдовательно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z = m f' (x, y, z) \dots \dots \dots (297)$$

Эта теорема вѣрна для какого угодно числа переменныхъ.

Примѣръ:

$$f(x, y, z) = 4xyz + 2x^2y. \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 4yz + 4xy; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4xz + 2x^2; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4xy.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z &= (4yz + 4xy) x + (4xz + 2x^2) y + 4xy z \\ &= 12xyz + 6x^2y = 3(4xyz + 2x^2y). \end{aligned}$$

Слѣдовательно здѣсь:

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z = 3f(x, y, z)$$

2) Истинное значеніе величинъ, выраженныхъ въ неопредѣленной формѣ.

$$\text{Величина } \frac{0}{0}.$$

§ 167. Встрѣчаются такія дроби функции $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, которыя принимаютъ видъ $\frac{0}{0}$ при некоторомъ значеніи переменнаго x , напримеръ при $x = a$, если же x не сразу брать равнымъ a , но постепенно приближать къ a , то $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ приближается къ предѣлу определенному. Этотъ предѣлъ называется *истиннымъ* значеніемъ дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ при $x = a$. Дифференціальное исчисленіе даетъ общій способъ опредѣленія такихъ истинныхъ значеній по слѣдующимъ соображеніямъ.

Пусть данная дробь есть $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ и пусть x_0 есть то значеніе x , при которомъ:

$$\varphi(x_0) = 0; \quad f(x_0) = 0. \dots \dots \dots (294)$$

Пользуясь рядомъ Тейлора (287) и прерывая его на 1-омъ членѣ, мы должны сдѣлать въ остаточномъ членѣ $\theta = 0$. Получимъ:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + h) &= \varphi'(x_0 + \theta h); \\ f(x_0 + h) &= f'(x_0 + \theta h). \end{aligned}$$

Поэтому, приращая x въ данной дроби на h , получимъ:

$$\frac{\varphi(x_0 + h)}{f(x_0 + h)} = \frac{\varphi'(x_0 + \theta h)}{f'(x_0 + \theta h)}$$

Уменьшая здѣсь h постепенно до нуля, получимъ:

Истинное значеніе $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ при $x = x_0$ равно

$$\lim \frac{\varphi(x_0 + h)}{f(x_0 + h)} = \frac{\varphi'(x_0)}{f'(x_0)} \dots \dots \dots (295)$$

Если бы оказалось, что $\frac{\varphi'(x_0)}{f'(x_0)}$ тоже равно $\frac{0}{0}$, то искали бы истинное значеніе отъ $\frac{\varphi''(x_0)}{f''(x_0)}$; по (295) оно было бы равно $\frac{\varphi'''(x_0)}{f'''(x_0)}$. Вообще если $\varphi^{(n)}(x_0)$ и $f^{(n)}(x_0)$ суть производныя наименьшаго порядка изъ *необращающихся* въ 0, то истинное значеніе $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ равно:

$$\frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{f^{(n)}(x_0)} \dots \dots \dots (296)$$

Итакъ. Если дробь $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ имѣетъ видъ $\frac{0}{0}$ при $x = x_0$, то истинное значеніе этой дроби равно $\frac{\varphi'(x_0)}{f'(x_0)}$. Если $\frac{\varphi'(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{0}{0}$, то истиннымъ значеніемъ $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ можетъ быть $\frac{\varphi''(x_0)}{f''(x_0)}$, и такъ далѣе разсуждаемъ, пока не дойдемъ до такихъ производныхъ отъ $\varphi(x)$ и отъ $f(x)$, которыя, будучи одного и того же порядка, не равны нулю при $x = x_0$. Отношеніе этихъ производныхъ при $x = x_0$ и есть искомая истинная величина дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ при $x = x_0$.

Примѣръ 1-ый. Опредѣлить истинное значеніе дроби $\frac{\sin x}{x}$ при $x = 0$. Имѣемъ:

$$f''(\sin x) = \cos x; f''(x) = 1;$$

слѣдовательно, искомое значеніе будетъ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

Примѣръ 2-ой. Опредѣлить истинное значеніе дроби $\frac{x^2 - 1}{\sqrt{ax} - a}$ при $x = a$. Имѣемъ:

$$\varphi(x) = x^2 - 1; \quad \varphi'(x) = 2x;$$

$$f(x) = \sqrt{ax} - a; \quad f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax}};$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{x^2 - 1}{\sqrt{ax} - a} \right] = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)} = \frac{2a - 1}{\frac{a}{2\sqrt{a^2}}} = \frac{2a - 1}{1} = 2a - 1 = 3a.$$

Примеръ 3-й. Определить $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$.

$$\varphi(x) = x^2 - a^2; \quad f(x) = x - a;$$

$$\varphi'(x) = 2x; \quad f'(x) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x^2 - a^2}{x - a} \right) = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)} = \frac{2a}{1} = 2a.$$

Этотъ результатъ можно было бы получить и помощью элементарной алгебры слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a.$$

Полагая $x = a$ въ $x + a$, получимъ $2a$.

Примеръ 4-ый. Определить: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \right)$.

$$\varphi(x) = e^x - e^{-x} - 2x; \quad f(x) = x - \sin x;$$

$$\varphi'(x) = e^x + e^{-x} - 2; \quad f'(x) = 1 - \cos x.$$

Итакъ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \frac{e^0 + e^{-0} - 2}{1 - \cos 0} = \frac{0}{0}.$$

Значитъ надо брать отношеніе вторыхъ производныхъ; но и оно:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi''(x)}{f''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0}.$$

Беремъ отношеніе третьихъ производныхъ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'''(x)}{f'''(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Итакъ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \right) = 2.$$

Величины: $\frac{\infty}{\infty}$.

§ 168. Если въ дробь $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ и числитель и знаменатель обращаются въ безконечность при $x = a$, такъ что:

$$\varphi(a) = \infty; \quad f(a) = \infty; \quad \frac{\varphi(a)}{f(a)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

для опредѣленія $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{f(x)}$, преобразуемъ данную дробь въ такую $\frac{1}{\frac{f(x)}{\varphi(x)}}$ гдѣ равна данной, потому что для $\frac{1}{f(x)}$ на $\frac{1}{\varphi(x)}$ получимъ $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$.

Но если

$$f(a) = \infty; \varphi(a) = \infty, \text{ то } \frac{1}{f(a)} = 0; \frac{1}{\varphi(a)} = 0;$$

и дробь $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ принимает при $x = a$ значение в § 167 вида $\frac{0}{0}$.

Итак случай $\frac{x}{0}$ приводится к рассмотренному в предыдущем параграфе случаю $\frac{0}{0}$.

Величины: $\infty^0; 1^\infty; 0^0; 0 \cdot \infty$.

§ 169. Величины, обращающиеся при x к бесконечности значения береминного в $\infty^0, 1 - 0$ или $0 \cdot \infty$, могут быть определены посредством логарифмов (логарифмы их предварительно), имеющих вид $0 \cdot \infty$, который приводится к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, уже рассмотренным в § 167 и 168. Приведение же вида $0 \cdot \infty$ к виду $\frac{0}{0}$ является из формулы $\infty = \frac{1}{0}$ по которой

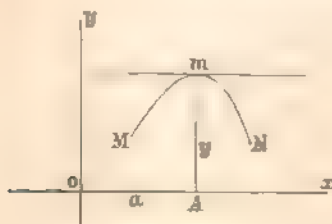
$$0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0}.$$

3) Наибольшія и наименьшія значенія функцій.

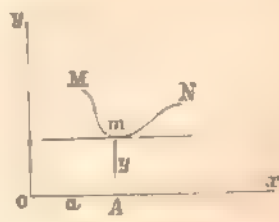
О максимумах и минимумах функцій одного переменнаго.

§ 170. Если $f(x)$, при $x = a$ получает наибольшую величину сравнительно с теми, каковы она имеет при бесконечно-близких к a значениях x , то $f(a)$ называется *наибольшим значением* функции $f(x)$ или ее *максимумом*. Напрямь на чертеже (фиг. 108) ордината Am кривой $y = f(x)$ есть *максимум* игрека или максимум $f(x)$.

Если $f(x)$ получает при $x = a$ наименьшую величину сравнительно с теми, каковы она имеет при бесконечно-близких к a значениях x , то



Фиг. 108.



Фиг. 109.

то $f(a)$ называется *наименьшим значением* $f(x)$ или ее *минимумом*. Напрямь на чертеже (фиг. 109) ордината Am кривой $y = f(x)$ есть *минимум* игрека или минимум $f(x)$.

Мы уже видели, в § 120, что при тех значениях $f'(x)$, при ко-

торыхъ она обращается въ нуль. $f(x)$ имѣть максимумъ или минимумъ. Необходимо этотъ результатъ пополнить.

Замѣтимъ прежде всего, что по самому опредѣленію того, что называется максимумомъ и минимумомъ $f(x)$, явствуетъ слѣдующее:

Правило I. Величина $f(a+h) - f(a)$ всегда отрицательна, если при $x = a$ функция $f(x)$ достигаетъ максимума, и положительна, если при $x = a$ функция $f(x)$ достигаетъ минимума, каковъ бы ни былъ знакъ приращенія h , то есть будетъ ли это приращеніе положительно или отрицательно.

По формуль (287) Тейлора имѣемъ:

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{(4)}(a) + \dots$$

Отсюда:

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{(4)}(a) + \dots \quad (297)$$

Величина h безконечно-мала. Поэтому высшія степени h весьма малы, сравнительно съ низшими. Следовательно, знакъ 2-ой части равенства (297) зависитъ отъ знака (положительности или отрицательности) величины h . По правилу I-ому этого параграфа, знакъ лѣвой части равенства (297) не долженъ зависетьъ отъ h . Чтобы это условіе соблюдалось, необходимо и достаточно, чтобы:

$$f'(a) = 0. \dots \dots \dots (298)$$

Тогда, благодаря положительности h^2 (четныя степени всегда положительны), знакъ лѣвой части таковъ, какъ знакъ $f''(a)$. Если же $f''(a) = 0$, то, для независимости знака лѣвой части отъ знака h нужно соблюденіе условія $f'''(a) = 0$. При соблюденіи же его, знакъ лѣвой части такой же, какъ у $f^{(4)}(a)$, и такъ далѣе. Эти разсужденія вмѣстѣ съ правиломъ I-мъ этого параграфа приводятъ къ слѣдующему.

Правило II. Для того, чтобы $f(x)$ была максимумомъ или минимумомъ при $x = a$, нужно чтобы $f'(a) = 0$ и чтобы въ ряду производныхъ: $f'(a)$; $f''(a)$; $f'''(a)$; $f^{(4)}(a)$. . . первая изъ нихъ, которая не обращается въ нуль, была бы четного порядка. Если та производная отрицательна, то имѣется максимумъ, если она положительна, то имѣется минимумъ.

Способъ нахождения максимумовъ и минимумовъ.

§ 171. Требуется найти максимумъ или минимумъ $f(x)$. Согласно съ правиломъ II предыдущаго параграфа поступаемъ такъ: вычисляемъ $f'(x)$:

приравнивая ее нулю, получимъ уравненіе

$$f'(x) = 0. \dots \dots \dots (299)$$

Изъ него определяемъ x . Положимъ, получили $x = a$. Если, при подста-
новкѣ этой величины въ $f'(x)$, она не обращается въ нуль, то $f(a)$ есть
или максимумъ или минимумъ — именно — минимумъ, если $f'(a)$ положи-
тельна; максимумъ, если $f'(a)$ отрицательна.

Если же $f''(a) = 0$ т. е. примемъ подставлять a въ другія произво-
лыя четныхъ порядковъ — т. е. $f''(x)$. Значь первой изъ нихъ, которая при
 $x = a$ не обращается въ нуль, покажетъ намъ, по правилу II-ому преды-
дущаго параграфа, есть ли $f'(a)$ максимумъ или минимумъ.

Примеръ 1-ый. Найти максимумъ или минимумъ функции

$$f(x) = y = x^3 - 12x^2 + 45x + 30$$

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45.$$

Приравнивая ее нулю, получимъ уравненіе

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 0,$$

Сокращая на 3, получимъ:

$$x^2 - 8x + 15 = 0,$$

откуда:

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1;$$

$$x_1 = 5; \quad x_2 = 3.$$

(Одинъ изъ этихъ корней принимаемъ за a)

$$f''(x) = 6x - 24.$$

Подставляя сюда 5, получимъ:

$$f''(5) = 6 \cdot 5 - 24 = 6.$$

Значитъ $f'(5)$ есть минимумъ данной функции. Для опредѣленія его подста-
ваемъ $x = 5$ въ самой $f(x)$. Находимъ:

$$\text{минимумъ } f(5) = 5^3 - 12 \cdot 5^2 + 45 \cdot 5 + 30 = 125 - 300 + 225 + 30 = 80$$

Подставимъ теперь въ $f''(x) = 6x - 24$ другой корень, 3, уравненія
 $f'(x) = 0$, получимъ:

$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 24 = -6.$$

Значитъ $f'(3)$ есть максимумъ данной $f(x)$. Для опредѣленія его подста-
ваемъ $x = 3$ въ самой $f(x)$. Находимъ:

$$\begin{aligned} \text{максимумъ } f(x = 3) &= 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 45 \cdot 3 + 30 = 27 - 108 \\ &+ 135 + 30 = 84. \end{aligned}$$

Примеръ 2-ой. $y = e^x + 2 \cos x + e^{-x} = f(x)$

$$f'(x) = e^x - 2 \sin x - e^{-x}$$

$$f'(0) = e^0 - 2 \cos 0 + e^{-0}$$

Положимъ $f'(x) = e^x - 2 \sin x - e^{-x} = 0$. Замѣчаемъ, что $x = 0$ удовлетворяетъ этому уравненію. Положивъ $x = 0$ въ $f(x)$, получимъ

$$f(0) = e^0 + 2 \cos 0 + e^0 = 4.$$

Чтобы узнать будетъ ли это максимумъ или минимумъ, полагаемъ $x = 0$ въ $f''(x)$; получимъ:

$$f''(0) = e^0 - 2 \cos 0 + e^0 = 0.$$

Значитъ надо пробовать слѣдующія производныя. Имѣемъ

$$f''(x) = e^x + 2 \sin x - e^{-x}; \quad f''(0) = e^0 + 2 \sin 0 - e^0 = 0,$$

$$f^{IV}(x) = e^x + 2 \cos x + e^x, \quad f^{IV}(0) = e^0 + 2 \cos 0 + e^0 = +4.$$

Первая изъ необратившихся въ нуль производныхъ оказалась $f^{IV}(0)$. Она оказалась положительною. Следовательно, $f(0) = 4$ есть минимумъ функции $f(x) = e^x + 2 \cos x + e^{-x}$.

Примеръ 3-ий. $y = \frac{x}{\lg x} = f(x).$

$$f'(x) = \frac{\lg x - 1}{(\lg x)^2} = 0.$$

Отсюда $\lg x = 1$ или $x = e$

$$f''(x) = \frac{(\lg x)^2 - (\lg x - 1) \cdot 2 \lg x}{(\lg x)^4} = \frac{2 \lg x}{x} - \frac{(\lg x)^2}{x} = \frac{2 - \lg x}{x (\lg x)^2}.$$

$$f''(e) = \frac{2 - 1}{e \cdot 1^2} = \frac{1}{e}$$

Положительность величины $f''(e)$ показываетъ, что $f(e) = \frac{e}{\lg e}$ есть минимумъ данной функции.

Максимумы и минимумы функций многихъ переменныхъ.

§ 172. Въ подробныхъ курсахъ дифференціального исчисленія доказывается, что $f(x, y, z)$ имѣетъ максимумъ или минимумъ при

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

то есть когда въ три частныя производныя отъ данной $f(x, y, z)$ одновременно равны нулю.

Геометрическія приложенія дифференціального исчисления.

1) Теорія касательныхъ.

Уравненіе касательной къ кривой $f(x, y) = 0$.

§ 173. Положимъ, что намъ дана въ плоскихъ координатахъ кривая

$$f(x, y) = 0. \dots \dots \dots (300)$$

Опредѣлимъ уравненіе касательной, проведенной въ точкѣ (x, y) этой кривой. Назовемъ координаты какой-либо точки касательной чрезъ (X, Y) . По формулѣ (15) уравненіе прямой, проходящей чрезъ точку (x, y) , таково:

$$Y - y = k(X - x), \dots \dots \dots (301)$$

гдѣ k есть тангенсъ угла наклоненія прямой къ оси x . По тангенсъ угла наклоненія касательной къ оси x равенъ, по § 117-ому, производной $\frac{dy}{dx}$. Слѣдовательно, уравненіе касательной таково:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \dots \dots \dots (302)$$

гдѣ (x, y) суть координаты точки касанія, X, Y координаты касательной.

Однако кривая задана у насъ уравненіемъ $f(x, y) = 0$. Здѣсь y есть неявная функція отъ x . По (261) имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \dots \dots \dots (261)$$

Поэтому, и по (302), уравненіе касательной можетъ быть представлено такъ:

$$Y - y = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}(x - X). \dots \dots \dots (303)$$

Если y выражено явно чрезъ x , то пользуется уравненіемъ (302); если дано уравненіе $f(x, y) = 0$, то пользуется уравненіемъ (303).

Примѣръ. Найти уравненіе касательной, проведенной къ окружности $x^2 + y^2 = 25$ въ ея точкѣ (3, 4). Имѣемъ:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Слѣдовательно, уравненіе касательной къ данной окружности въ точкѣ (x, y) будетъ:

$$Y - y = \frac{2x}{2y}(x - X).$$

Но дано, что точка (x, y) есть точка (3, 4). Слѣдовательно, уравнение касательной въ точкѣ (3, 4) будетъ:

$$Y - 4 = \frac{3}{4} (X - 3),$$

или: $3X + 4Y - 25 = 0.$

Уравненіе (303) удобно запомнить въ такой формѣ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial f}{\partial y} (Y - y) = 0.$$

Это уравненіе касательной получается умноженіемъ членовъ уравненія (303) на $\frac{\partial f}{\partial y}$ и перенесеніемъ всего въ лѣвую часть.

Уравненіе нормали.

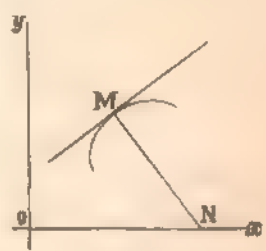
§ 174. Нормалью называется перпендикуляръ, возставленный къ касательной изъ точки касанія, напримеръ MN (фиг. 110).

Если k есть тангенсъ угла наклоненія касательной и k' тангенсъ угла наклоненія нормали, то, вследствие перпендикулярности этихъ прямыхъ, должно быть удовлетворено условіе (30), именно:

$$k' = \frac{1}{k}; \text{ но } k = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Слѣдовательно:

$$k' = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$



Фиг. 110.

Поэтому уравненіе нормали, проведенной чрезъ точку (x, y) кривой, будетъ:

$$Y - y = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} (X - x) \dots \dots \dots (304)$$

или

$$(Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} - (X - x) \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \dots \dots \dots (305)$$

Здѣсь X, Y суть координаты какой-либо точки нормали.

Длина подкасательной.

§ 175. Отрѣзокъ FP (фиг. 111) оси абсциссъ, между точкою F ея пересѣченія съ касательной и основаниемъ P ординаты y точки (x, y) , на-

зывается *подкасательною*. На ономъ углу наклоенія касательной къ оси x чрезъ φ гласятъ что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$. Изъ треугольничка FMP имѣемъ:

y



Фиг. 111.

$$FP = y \cdot \operatorname{tg} (90 - \varphi) \\ = y \cdot \operatorname{cotg} \varphi = \frac{y}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$$

Итакъ

$$FP = y \frac{dx}{dy} \dots \dots (306)$$

Длина поднормали.

§ 176. Отрѣзокъ PN оси x обнесенъ между точкою N съ пересѣченія съ x прямою и основаніемъ P ординаты точки M , называется *поднормалію*. Изъ треугольничка PMN имѣемъ $PN = y \operatorname{tg} \varphi$. Итакъ

$$PN = y \cdot \frac{dy}{dx} \dots \dots \dots (307)$$

Длина нормали.

§ 177. Длиною нормали называется отъ отрѣзка MN ось пересѣченія M съ кривою до пересѣченія N съ осью x . Изъ треугольничка MPN находимъ:

$$MN = \sqrt{y^2 + \left(y \frac{dy}{dx}\right)^2} = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \dots \dots (308)$$

Общность дифференціальныхъ формулъ.

§ 178. Выведенными нами дифференціальными уравненіями касательной, нормали и формулы подкасательной и проч., какъ и тѣ дифференціальныя уравненія и формулы касательной и нормали, относятся единственно къ случаю, когда бы ни былъ языкъ кривой, развѣ мы знаемъ ея уравненіе $f(x, y) = 0$, мы сейчасъ же можемъ по этимъ формуламъ найти касательную, нормаль и длины подкасательной и проч. для этой кривой.

Примѣръ. Определить величину поднормали параболы $y^2 = 2px$. Изъ этого уравненія параболы имѣемъ

$$y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p} x^{\frac{1}{2}}$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2p} x^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2} \sqrt{x}}$$

И ставляя сюда величину $y = \frac{dy}{dx} x$ из (287) получим:

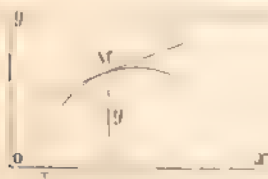
$$\text{поднормаль параболы} = y \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2px} \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{2} \sqrt{x}} = p$$

Итак (фиг. 113) — в какой бы точке данной параболы мы ни провели нормаль, длина PX поднормали всегда будет равна p .
Длина поднормали всякой параболы есть величина постоянная.

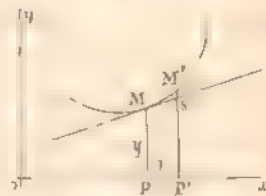
О вогнутости и выпуклости кривых.

§ 179 Если кривая (фиг. 113) — вогнутая, то вращаясь около x , то y увеличивается по ту же сторону x — ось абсцисс, как и ось x — ось ординат, то кривая вогнута. Если же кривая выпуклая, то ось x — ось ординат.

Если кривая (фиг. 114) — выпуклая, то ось x — ось ординат, то ось x — ось абсцисс, то кривая выпуклая.



Фиг. 113.



Фиг. 114.

Если кривая (фиг. 113) — вогнутая, то ось x — ось абсцисс, то ось x — ось ординат, то кривая выпуклая.

Итак, величина y и кривая выпуклая и вогнутая кривых. Придадим для этого вектор PP' (фиг. 114). По формуле (287) Тайлора получим:

$$PM = f(x+h) = y + h \frac{dy}{dx} + \dots + \frac{h^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} + R \dots \quad (309)$$

где R — остаточный член. Уравнение касательной по формуле (287) будет:

$$Y - y = \frac{dy}{dx} (X - x) \dots \dots \dots (302)$$

Применяя сюда точку S — ось x — ось ординат $X = x + h$, получим:

$$Y - y = \frac{dy}{dx} (x + h - x) = \frac{dy}{dx} h \dots \dots \dots (310)$$

Отсюда ордината Y точки S будет:

$$Y = y + \frac{dy}{dx} h = P'S \dots \dots \dots (311)$$

Слѣдовательно:

$$M'S = P'M' - P'S = y + h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2y}{dx^2} + R \quad y \frac{dy}{dx} h.$$

или

$$MS = \frac{h^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2y}{dx^2} + R \dots \dots \dots (312)$$

Вслѣдствіе малости содержащихся въ R высшихъ степеней h знакъ 2-ой части равенства (312) зависитъ отъ знака $\frac{d^2y}{dx^2}$ (такъ какъ h^2 положительно). Точка M' будетъ лежать по другую сторону касательной отъ оси x , если $M'S$ положительно и это независимо отъ знака h , но, по доказанному, $M'S$ положительно, если $\frac{d^2y}{dx^2}$ положительно. Итакъ, кривая выпукла, какъ на фиг. 114, если $\frac{d^2y}{dx^2}$ положительно; вогнута, какъ на фиг. 113, если $\frac{d^2y}{dx^2}$ отрицательно. При отрицательныхъ y дѣло будетъ происходить наоборотъ. Получаемъ правило:

Если знаки при y и при $\frac{d^2y}{dx^2}$ одинаковы, то кривая обращена выпуклостью къ оси x ; если знаки при y и при $\frac{d^2y}{dx^2}$ противоположны, то кривая обращена вогнутостью къ оси x .

Точки перегиба.

§ 180. Если нѣсколько разѣе точки M величина $\frac{d^2y}{dx^2}$ имѣетъ одинъ знакъ, а при переходѣ чрезъ точку M мѣняется свой знакъ, то точка M называется *точкою перегиба*. Такая точка (фиг. 115) отдѣляетъ выпуклую часть кривой отъ вогнутой. Переменить свой знакъ $\frac{d^2y}{dx^2}$ можетъ только перейдя чрезъ значеніе, равное нулю или безконечности. Итакъ, въ точкахъ перегиба $\frac{d^2y}{dx^2}$ равно нулю или безконечности. Касательная въ точкѣ перегиба пересѣкаетъ кривую.



Фиг. 115.

Направленіе элемента кривой.

§ 181. Кривую можно разсматривать какъ многоугольникъ съ безконечно-большимъ числомъ безконечно-малыхъ сторонъ. Безконечно-малая часть кривой называется ея *элементомъ*. По опредѣленію касательной, данному въ § 117-омъ, направленіе касательной совпадаетъ съ направленіемъ элемента кривой.

Элементъ кривой.

§ 182. Если придадимъ иксу приращеніе Δx , то y получитъ приращеніе Δy , и мы перейдемъ изъ точки M кривой съ координатами (x, y) въ точку M' съ координатами $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Чѣмъ меньше Δx , тѣмъ

большее право мы имеем разсматривать отрезок MM' кривой, как прямолинейный, как гипотенузу треугольника $MM'A$ (фиг. 116). Называя дугу MM' кривой чрез Δs , имеем по Пифагоровой теоремѣ:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Въ предѣлѣ получимъ:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (313)$$

Величина ds называется дифференциаломъ дуги кривой или элементомъ кривой.

Уголъ φ , составляемый элементомъ дуги съ осью x , равенъ углу, составляемому съ осью x касательною (§ 181), такъ что, согласно съ § 117:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Поэтому,

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dy}{ds}. \quad (314)$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds}. \quad (315)$$

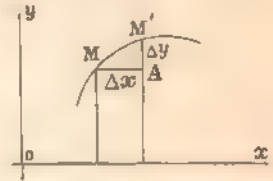
Параметры кривой.

§ 183. Въ уравненіи кривой кромѣ координатъ заключаются еще и различныя другія величины, которыя для данной кривой постоянны, напримеръ коэффициенты. Эти величины называются *параметрами* кривой. Напримеръ a и b суть параметры эллипса

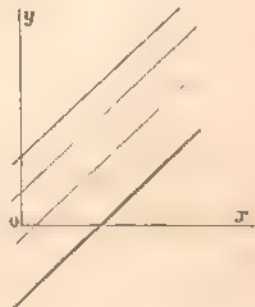
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если непрерывно измѣнять одинъ какой-нибудь параметръ кривой, то кривая непрерывно будетъ измѣнять или свой видъ, или свое положеніе, или и видъ и положеніе одновременно. Напримеръ, если въ уравненіи эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ будетъ измѣнять параметръ a , непрерывно его увеличивая, то эллипсъ будетъ вытягиваться. Если въ уравненіи прямой $y = kx + b$ будемъ измѣнять b , то прямая будетъ двигаться, оставаясь параллельной своему начальному положенію; получимъ рядъ прямыхъ, параллельныхъ одна другой (фиг. 117)

Итакъ: при измѣненіи одного какого-нибудь параметра кривой, она



Фиг. 116



Фиг. 117.

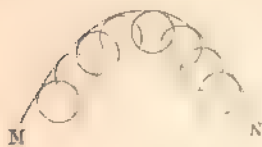
движется по плоскости, изменяя свою форму. Можно считать ж, что кривая будет только двигаться, не изменяя формы, это будет частный случай. Переменяемый параметр называется *переменным параметром*.

Огибающая.

§ 184. Если дана кривая

$$f(x, y, c) = 0 \dots \dots \dots (316)$$

с переменным параметром c , то кривая (316), если мы будем с принимать, как мы видели в § 183, различные значения



Фиг. 118

На чертеж (фиг. 118) представлено, например, семейство семейств окружностей, изменяющихся по величине и положению. Кривая MN (фиг. 118), касательная ко всем окружностям семейства, называется *огибающей* этой кривой. Движущаяся же кривая по отношению

к ней огибающей, называется *оглибаемой*.

Посмотрим, как по уравнению *оглибающей* или по уравнению *оглибаемой*

Пусть $f(x, y, c) = 0 \dots \dots \dots (317)$

получить уравнение *оглибаемой*, то считаем ее и с c — переменными параметрами. Нам даны c и Δc . Уравнение кривой (317), в точности такое же, как и прежде, будет:

$$f(x, y, c + \Delta c) = 0 \dots \dots \dots (318)$$

Координаты точек пересечения (317) и (318) будут удовлетворять уравнениям (317) и (318), следовательно уравнение

$$\frac{f(x, y, c + \Delta c) - f(x, y, c)}{\Delta c} = 0 \dots \dots \dots (319)$$

Точки пересечения двух кривых, по которым мы находим огибающую, удовлетворяют одновременно уравнению (319) и уравнению

$$\frac{df(x, y, c)}{dc} = 0 \dots \dots \dots (320)$$

Получая с изв (317) и (320), получим метрическое место точек пересечения всех кривых семейства, т. е. огибающую, до тех пор, пока не достигнем огибающей.

Таким образом, чтобы найти *оглибающую* кривой $f(x, y, c) = 0$, изменяющейся с c , изменяем параметр c , ижно удаляем c и в уравнении:

$$f(x, y, c) = 0 \dots \dots \dots (321)$$

$$\frac{df(x, y, c)}{dc} = 0, \dots \dots \dots (322)$$

исключены, но исключены с, уравнение будет искомым уравнением эллипсов.

Примеръ 1-ый. Пусть огибающую эллипсовъ, произведение полусей которых постоянно, направлением же осей совпадаютъ съ осями координатъ

Уравнение одного изъ такихъ эллипсовъ есть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию,

$$a \cdot b = m, \dots \dots \dots (323)$$

где m некоторое постоянное. Опредѣлимъ изъ (323) b и поставимъ найденное такимъ образомъ, выражение его въ уравнении (323) а, получимъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{m}{a}\right)^2} = 1$$

или:

$$f(x, y, a) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2 y^2}{m^2} - 1 = 0. \dots \dots \dots (324)$$

Примемъ здѣсь a за переменный параметръ и дифференцируя по a , получимъ:

$$\frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = -\frac{2x^2}{a^3} + \frac{2ay^2}{m^2} = 0 \dots \dots \dots (325)$$

По предыдущей теоремѣ надъ исключить изъ (324) и (325) параметръ a

Изъ (325) имѣемъ:

$$\frac{a^4 y^2}{m^2} = x^2$$

откуда:

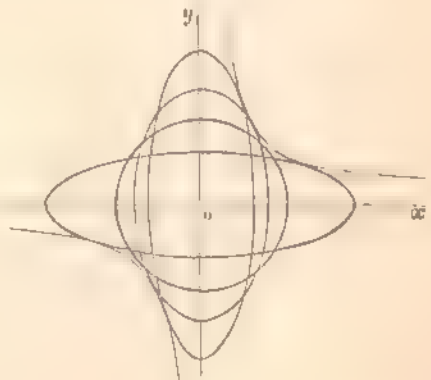
$$a = \pm \frac{\sqrt{x} \sqrt{m}}{\sqrt{y}}$$

Вставляя эту величину въ (324), получимъ:

$$\frac{x^2 y}{m x} + \frac{m x y^2}{m y} = 1$$

или:

$$xy = \frac{m}{2}$$



Фиг. 119.

Это уравнение гиперболы (см. § 60, формулу 96), для которой оси координатъ служатъ асимптотами (фиг. 119). При $a > b$ большія оси эллипсовъ направлены по оси x -ой, при $a < b$ большія оси эллипсовъ направлены по оси y . На чертежѣ (фиг. 119) изображены только четыре изъ бесконечнаго множества эллипсовъ, разсматриваемыхъ въ этой задачѣ. Съ измѣненіемъ параметра a въ уравненіи (323), эллипсы, представляемый этимъ уравненіемъ, измѣняютъ свой видъ и деформируются, оставаясь касательнымъ къ гиперболѣ $xy = \frac{m}{2}$

Въ подобнаго рода задачахъ надо поступать, какъ мы сдѣлали въ этомъ примѣрѣ: нельзя оставлять въ уравненіи двухъ переменныхъ параметровъ a и b . Мы исключили сначала b помощью условия $ab = m$, послѣ чего въ уравненіи (324) остался только одинъ *переменный* параметръ a ; величина же m по условию задачи остается постоянной.

Примѣръ 2-ой. Найти огибающую прямыхъ, отсѣкающихъ отъ осей координатъ такіе отрѣзки a и b , произведеніе которыхъ есть величина постоянная.

Уравненіе одной изъ такихъ прямыхъ будетъ по формулѣ (12) таково:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Исключимъ отсюда b при помощи условия $ab = m$. изъ коего слѣдуетъ:

$$b = \frac{m}{a}.$$

Получимъ:

$$f(x, y, a) = \frac{x}{a} + \frac{ya}{m} - 1 = 0. \dots \dots \dots (326)$$

$$\frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{y}{m} = 0. \dots \dots \dots (327)$$

Для опредѣленія огибающей надо изъ этихъ двухъ уравненій исключить переменный параметръ a . Опредѣляемъ a изъ (327)

$$a = \pm \frac{\sqrt{mx}}{\sqrt{y}}.$$

Вставляемъ въ (326). Получимъ:

$$\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{mx}} + \frac{ay\sqrt{mx}}{m\sqrt{y}} = 1,$$

откуда:

$$\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{m}} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{m}} = 1;$$

или

$$xy = \frac{m}{4}.$$

Опять получили гиперболу вида (96).

Примѣръ 3-ий. Найти огибающую прямыхъ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, если сумма отрѣзковъ a и b , отсѣкаемыхъ ими на осяхъ, равна постоянной величинѣ m .

По условию $a + b = m$. Отсюда $b = m - a$. Вставляя эту величину

вместо b въ уравненіи $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, получимъ:

$$f(x, y, a) = \frac{x}{a} + \frac{y}{m \frac{y}{a}} - 1 = 0 \dots \dots (328)$$

$$\frac{df(x, y, a)}{da} = -\frac{x}{a^2} + \frac{y}{(m \frac{y}{a})^2} = 0 \dots \dots (329)$$

Изъ (329) имѣемъ:

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{m-a}{a},$$

откуда:

$$a \sqrt{y} = m \sqrt{x} - a \sqrt{x},$$

откуда:

$$a = \frac{m \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Вставляя эту величину въ (328), получимъ:

$$\frac{x(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{m \sqrt{x}} + \frac{y}{m - \frac{m \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}} = 1,$$

откуда:

$$\frac{x(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{m \sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})y}{m \sqrt{y}} = 1$$

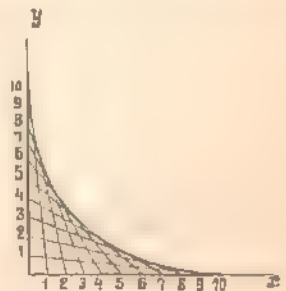
откуда:

$$x \sqrt{y} + xy + xy + y \sqrt{x} = m \sqrt{xy},$$

или:

$$2xy + x + y = m \dots \dots (330)$$

Это уравненіе 2-го порядка. По сказанному въ § 62-мъ, чтобы узнать, какую кривую представляетъ это уравненіе, надо посмотрѣть, какой знакъ окажется у выраженія $B^2 - 4AC$ — квадратъ коэффициента при xy безъ учетвереннаго произведенія коэффициентовъ при x^2 и при y^2 . Въ (330) не имѣется членовъ съ x^2 или y^2 , при xy стоитъ коэффициентъ 2. Слѣдовательно $A = 0$; $B = 2$; $C = 0$. Поэтому $B^2 - 4AC = 4 > 0$. Слѣдовательно (330) представляетъ собою гиперболу (фиг. 120). На этомъ чертежѣ гипербола даже и не начерчена но она вырисовывается сама собою какъ огибающая прямыхъ.



Фиг. 120.

Примѣръ 4-ый. Изъ точки F (фиг. 121), находящейся на оси x въ разстояніи m отъ начала, проводимъ прямыя и возставляемъ къ этимъ прямымъ, изъ точекъ пересеченія ихъ съ осью y , перпендикуляры. Найти огибающую этихъ перпендикуляровъ.

Сначала найдем уравнение одного из таких перпендикуляровъ. Обозначим тупой уголъ, составленный съ осью x прямою, проведенною изъ F' чрезъ φ . Расстояние b точки пересѣченія этой прямой съ осью y отъ начала будетъ $b = mtg(180^\circ - \varphi)$; $m = tg\varphi$; полагая, для краткости, $tg\varphi = k'$, получимъ: $b = -mk'$. Уравнение перпендикуляра, проведеннаго къ этой прямой изъ точки пересѣченія ея съ осью y , будетъ, по формулѣ (7):

$$y = k'x + b \dots (331)$$

гдѣ, какъ мы сейчасъ видѣли $b = -mk'$: что же касается до k' , то по условію (36) перпендикулярности $k' = -\frac{1}{k}$. Вставляя эти величины въ (33), получимъ искомое уравненіе перпендикуляра въ видѣ:

$$y = -\frac{x}{k} - mk,$$

или

$$f(x, y, k) = x + ky + mk^2 = 0 \dots (332)$$

Принимая k за переменный параметръ и дифференцируя, получимъ:

$$\frac{\partial f(x, y, k)}{\partial k} = y + 2mk = 0,$$

откуда:

$$k = -\frac{y}{2m};$$

вставляя въ (332) получимъ:

$$x - \frac{y^2}{2m} + \frac{my^2}{4m^2} = 0;$$

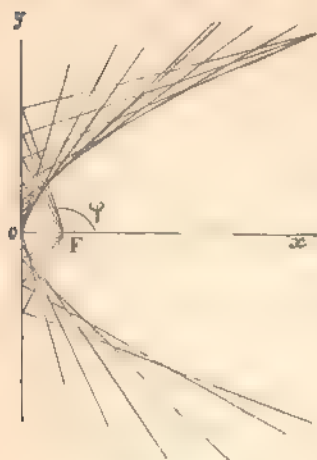
или

$$x - \frac{y^2}{2m} + \frac{y^2}{4m} = 0;$$

или $y^2 = 4mx$. Полагая здѣсь $m = \frac{p}{2}$, получимъ $y^2 = 2px$. Итакъ искомая кривая есть парабола съ фокусомъ въ F . На чертежѣ (фиг. 121) она не начерчена, но видна какъ огибающая.

Кривизна кривыхъ.

§ 185. Прежде чѣмъ дать точное опредѣленіе того, что называется въ математикѣ кривизною, замѣтимъ что въ общепринятій если говорить, одна линия кривѣе другой, то хотягь этимъ показать, что первая линия болѣе уклоняется отъ прямолинейнаго направленія чѣмъ вторая. Остановимся сначала на кривизнѣ окруж. стн. Окружность, описанная болѣеимъ



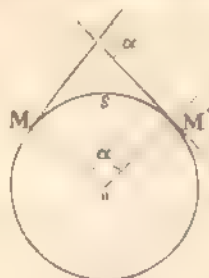
Фиг. 121.

радиусом не так круто сгибаются отъ прямой (фиг. 122), какъ окружность, описанная меньшимъ радиусомъ. Можно сказать, чѣмъ меньше радиусъ, тѣмъ острѣе искривлена окружность. — Тѣмъ больше ея кривизна. Въ математикѣ кривизною окружности радиуса R называется величина $\frac{1}{R}$ обратно пропорциональная радиусу. Кривизна кривыхъ предълагается, какъ выше увидимъ, по сравнению ихъ съ кругомъ того.

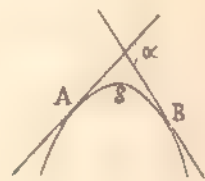
Кривизну окружности можно иначе изразить. Возьмемъ на окружности (фиг. 123) двѣ точки M и M' и обозначимъ чрезъ s дугу MM' ; чрезъ α уголъ $MO M'$. Углы съ взаимно перпендикулярными сторонами равны между собою; касательныя же перпендикулярны къ радиусамъ. Следова-



Фиг. 122.



Фиг. 123.



Фиг. 124.

тельно углы, составляемыя касательными, проведенными въ M и M' тоже равны α . Известно что дуга равна произведению радиуса на соответствующій центральный уголъ:

$$s = R \cdot \alpha \dots \dots \dots (333)$$

Следовательно кривизна $\frac{1}{R}$ кривизны равна

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha}{s} \dots \dots \dots (334)$$

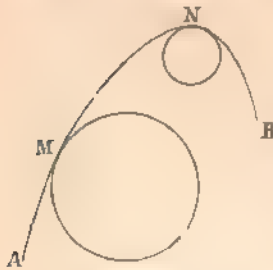
И наконецъ съ нами срекою кривизною дуги AB какой бы то ни было кривой (фиг. 124) называемъ отношеніе

$$\frac{\alpha}{s} \dots \dots \dots (335)$$

угла, составляемаго крайними касательными къ длине дуги. Отсюда уже переходить къ опредѣленію кривизны кривой въ данной ея точкѣ кривизною кривой въ данной ея точкѣ, называемою срекою кривизна элемента кривой начинающагося въ данной точкѣ.

Изъ этого опредѣленія и изъ сдѣланнаго выше (формула 334) слѣдуетъ, что кривизна кривой въ данной ея точкѣ равна отношенію угла составляемаго взаимными въ данной элементѣ касательными, къ длине элемента кривой. Этотъ уголъ называеца угломъ смежности. Углы смежности и элементъ кривой обыкновенно мѣряютъ по отношенію ихъ, выражающему кривизну, можетъ быть конечною величиною.

Для каждой точки кривой можно подыскивать такую окружность, кривизна которой равнялась бы кривизнѣ кривой въ этой точкѣ. Радиусъ такой окружности называется *радиусомъ кривизны*.



Фиг. 125

Мы будемъ его обозначать греческою буквою ρ (произносится ро). По самому опредѣленію радиуса кривизны, и изъ того что кривизна окружности равна $\frac{1}{R}$, слѣдуетъ, что кривизна кривой въ данной ея точкѣ равна $\frac{1}{\rho}$.

Окружность, описанная радиусомъ кривизны (фиг. 125), называется *кругомъ кривизны*. На (фиг. 125) начерчены въ точкахъ M и N кривой AB круги кривизны.

Итакъ если по уравненію кривой найдемъ величину радиуса кривизны въ ея точкѣ (x, y) , то $\frac{1}{\rho}$ будетъ кривизна кривой въ этой точкѣ.

Величина радиуса кривизны.

§ 186. Опредѣлимъ величину радиуса ρ кривизны.

Пусть α есть уголъ наклоненія касательной къ оси x . По (196) имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} \dots \dots \dots (336)$$

Потому:

$$\alpha = \operatorname{artg} \left(\frac{dy}{dx} \right) \dots \dots \dots (337)$$

Безконечно малое приращеніе этого угла и есть то, что мы въ предыдущемъ параграфѣ назвали угломъ смежности. Поэтому уголъ смежности, по (337) и по (230), равенъ

$$d\alpha = d \left[\operatorname{artg} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] = \frac{d \left(\frac{dy}{dx} \right)}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2} dx}{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \dots \dots (338)$$

Но въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что кривизна равна отношенію угла смежности къ элементу кривой. Элементъ ds кривой по (313) равенъ:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Итакъ кривизна $\frac{1}{\rho}$ равна:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2} dx}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Но, вынося dx из-под корня, можно написать

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Следовательно:

$$\rho = \frac{d^2y \cdot dx}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \text{кривизна}. \quad (339)$$

Из этой формулы выводим:

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (340)$$

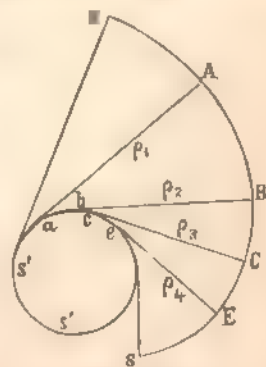
Это чрезвычайно важная формула, потому что, в приложениях о кривизне пользуются обыкновенно не самою кривизною, но радиусом кривизны, определяемым этою формулою (340).

Если желаем, при определении радиуса кривизны, принимать за независимое переменное не x , но какуюнибудь другую величину, то необходимо произвести преобразование формулы (340) для замены независимого переменнаго. Но такое преобразование нами уже произведено было в примѣрѣ данномъ въ § 176-омъ. Но выведенной тамъ формулы (274) заключаемъ, что радиусъ кривизны можетъ быть выраженъ такъ:

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}. \quad (341)$$

Развертки и развертывающія.

§ 187. Если s' такова, что касательныя ея служатъ нормальми другой кривой s (фиг. 126), то кривая s' называется *разверткою* кривой. Кривая же s называется *развертывающею кривою* *касательная развертки есть нормали развертывающей*. Наоборотъ: *нормали развертывающей суть касательныя развертки*. Изъ этого определения вытекаетъ, что *развертка s' кривой s есть геометрическое мѣсто пересѣченія двухъ бесконечно близкихъ нормалей кривой s* . Отсюда слѣдуетъ, что *развертка есть геометрическое мѣсто центровъ кривизны* (центровъ круговъ кривизны) *развертывающей*. Такъ на чертежѣ (фиг. 126) a, b, c, e суть центры кривизны *развертывающей s* . При чемъ же $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ суть радиусы кривизны соответствующіе точкамъ A, B, C, E , *развертывающей*.



Фиг. 126

Из чертежа (фиг. 126) усматривается (а въ подробныхъ курсахъ строго доказывается), что по данной *развертке* легко начертить развертывающуюся слѣдующимъ способомъ. Приготовимъ кусокъ изъ твердаго материала: краю этого куска дадимъ видъ развертки s' ; закрѣпимъ нить aA (фиг. 126) въ точкѣ a , будемъ наматывать ее на развертку, оставляя ее натянутою: тогда конецъ A начертитъ развертывающуюся s . Обратное: *если нить, изъ положенія $abcdE$, будемъ развѣрживать съ развертки, то конецъ ея a опишетъ развертывающуюся s* . Отсюда и название: «развертывающая». Развертывающую называютъ иногда *вольгантною*, а развертку *вольгантою*.

По данному уравненію развертывающей найти уравненіе развертки.

§ 188. Согласно данному въ § 187 опредѣленію развертки, можно сказать, что она есть огибающая (см. § 181) нормалей развертывающей. Пусть t и u суть координаты какой либо точки нормали данной кривой (развертывающей). По (304) уравненіе нормали будетъ

$$(y - t) + (y - u) \frac{dy}{dx} = 0 \dots \dots \dots (342)$$

Изъ уравненія $f(x, y) = 0$, опредѣляемъ y и $\frac{dy}{dx}$ въ видѣ и некоторыхъ функций x и вставляемъ ихъ въ (342). После этого въ (342) останется одинъ только x (кроме t и u). Разсматриваемъ x какъ переменный параметръ. Развертка кривой, какъ мы видѣли, есть огибающая нормалей (342). Чтобы найти огибающую, нужно (см. § 184) исключить переменный параметръ x изъ уравненія нормали (342) и изъ того которое изъ него получили дифференцированиемъ по переменному параметру x ; такое уравненіе будетъ:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - u) \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \dots \dots \dots (343)$$

Это исключеніе и предварительная замѣна y и $\frac{dy}{dx}$ чрезъ функции x , все вмѣстѣ сводится къ исключенію x и u изъ уравненій (342), (343) и даннаго:

$$f(x, y) = 0 \dots \dots \dots (344)$$

Итакъ:

Правило 1-ое. Чтобы найти развертку кривой $f(x, y) = 0$, нужно исключить x и u изъ уравненій (342), (343) и (344). Сдѣлать это можно только въ томъ случаѣ, если $f(x, y)$ дана явно, какъ въ помѣщенномъ ниже примѣрѣ. Въ результатѣ получимъ уравненіе развертки въ координатахъ t, u .

Развертки имѣютъ важное значеніе, какъ геометрическія мѣста центровъ кривизны.

Правило 2-ое. Координаты центра кривизны получаются, если опре-

отнимем из уравнений (342) и (343) t и u , потому что центр кривизны есть пересечение двух бесконечно близких нормалей.

Примеръ. Определить развертку и радиус кривизны параболы:

$$y^2 = 2x.$$

параметръ p которой равенъ единицѣ.

Вычисляемъ:

$$y = \sqrt{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{(2x)^3}} = \frac{1}{y^3}$$

Слѣдовательно уравнения (342) и (343) будутъ въ данномъ случаѣ:

$$y^2 = 2x \quad \bullet$$

$$(x - t) + (y - u) \frac{1}{y} = 0$$

$$1 + \frac{1}{y^2} (y - u) \frac{1}{y^2} = 0$$

или

$$y^2 = 2x$$

$$(x - t) + 1 - \frac{u}{y} = 0$$

$$1 + \frac{u}{y^2} = 0$$

Изъ двухъ послѣднихъ уравненій имѣемъ

$$x = t + 1 + \frac{u}{y} \tag{345}$$

$$y^2 = -u \tag{346}$$

Для уравненія (346) поделено на y , и сообразаясь съ даннымъ уравненіемъ $y^2 = 2x$, получимъ:

$$\frac{u}{y} = -y^2 = -2x$$

Вставляя эту величину вмѣсто $\frac{u}{y}$ въ (345), получимъ $x = t + 1 - 2x$, откуда:

$$x = \frac{t + 1}{3}.$$

Подставляемъ, вмѣсто x , въ данное уравненіе параболы эту величину, получимъ:

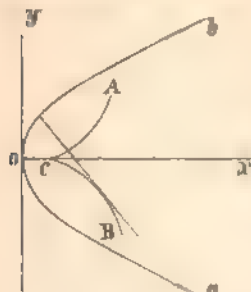
$$y^2 = \frac{t + 1}{3}.$$

Возведемъ обѣ части этого уравненія въ кубъ, получимъ:

$$y^6 = \frac{(t-1)^3}{27}.$$

Подставляя сюда, вмѣсто y^3 , его величину изъ (346), получимъ наконецъ:

$$u^2 = \frac{(t-1)^2}{27}.$$



Фиг. 127.

Это уравненіе 3-го порядка и есть искомое уравненіе развертки параболы. Видъ этой развертки ACB показанъ на чертежѣ (фиг. 127). Это кривая съ двумя вѣтвями простирающимися въ безконечность. Вѣтвь AC служитъ разверткою части oa параболы, вѣтвь BC служитъ разверткою части ob параболы.

Вставляя найденныя выше величины производныхъ $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ въ формулу (310), получимъ радиусъ кривизны параболы $y^2 = 2x$ въ видѣ:

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{y^3}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{1} y^3 = (y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}.$$

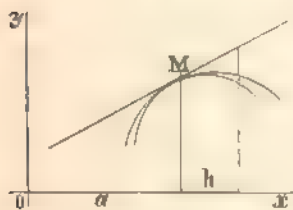
Порядокъ сопряженія двухъ кривыхъ.

§ 189. Двѣ кривыя (фиг. 128) взаимно касаются въ точкѣ M въ томъ случаѣ, если онѣ имѣютъ въ этой точкѣ общую касательную.

Пусть

$$y = f(x)$$

$$y = \varphi(x)$$



Фиг. 128.

будутъ уравненія двухъ кривыхъ. Назовемъ чрезъ a абсциссу ихъ точки сопряженія M . Эта точка принадлежитъ обѣимъ кривымъ, и потому $f(a) = \varphi(a)$. Ординаты обѣихъ кривыхъ въ точкѣ M одинаковы, но измѣняя абсциссу a на безконечно малое приращеніе h , получимъ разныя ординаты для кривыхъ. Опредѣлимъ помощью ряда Гейлера разность $f(a+h) - \varphi(a+h)$ этихъ ординатъ, чтобы судить о томъ, сколько бы стро удаляется одна кривая отъ другой выходя изъ общей точки сопряженія. По формулѣ (287) имѣемъ:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(a + \theta h)$$

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \varphi^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} \varphi^{(n)}(a + \theta h).$$

Вследствие этих соотношений и равенства ординат $\varphi(a)$ и $f'(a)$ в точке M , получим, что искомая разность будет:

$$f'(a+h) - \varphi(a+h) = hf'(a) - \varphi'(a)h + \frac{h^2}{1 \cdot 2} (f''(a) - \varphi''(a))h + \dots$$

Если $f'(a) = \varphi'(a)$, то первый член 2-ой части этого равенства уничтожается и вся 2-ая часть, и следовательно и искомая разность, будет содержать h в степенях больших единицы и потому будет 2-го порядка малости. Говорят, что в этом случае имется *соприкосновение 1-го порядка* данных кривых. Если и $f''(a) = \varphi''(a)$, то соприкосновение называется *соприкосновением 2-го порядка*. Вообще, если при $x = a$ все производные начиная от 1-ой и до n -ой одинаковы для $\varphi(x)$ и $f(x)$, то говорят, что кривые $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ имеют *соприкосновение n -го порядка*.

Если $f'(a) \neq \varphi'(a)$, то при $x = a$ кривые не касаются одна другой, потому что они в этом случае не могут иметь *общей* касательной, так как $f'(a)$ и $\varphi'(a)$ суть тангенсы угла наклона касательных обеих кривых при $x = a$.

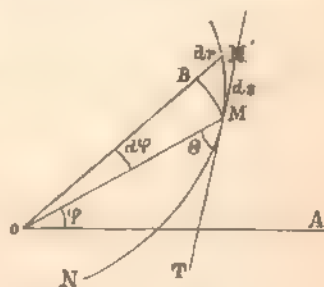
Из выложенного в настоящем параграфе видно, что кривые тем ближе соприкасаются одна с другою и соседны с точкою прикосновения части их тем менее уклоняются одна от другой, чем выше порядок соприкосновения кривых.

Дифференциал дуги в полярных координатах.

§ 190. В § 51-ом и последующих мы уже познакомились с полярными координатами на плоскости. Выведем некоторые, особенно важные, дифференциальные формулы в полярных координатах.

Положим, что кривая MN (фиг. 129) отнесена к таким полярным координатам, в которых O есть полюс, OA полярная ось. Пусть r есть радиус-вектор некоторой точки m данной кривой и следовательно, $moA =$ полярному углу φ . Кривая, положим, задана уравнением

$$f(r, \varphi) = 0. \quad (347)$$



Фиг. 129.

Определим дифференциал ds дуги кривой. Для этого дадим углу φ бесконечно-малое приращение $d\varphi$: вследствие этого r получит прираще-

не dr и точка перейдетъ въ положеніе m безконечно-близкое къ m . Дуга mm' и будетъ ds . Опíšемъ изъ O радиусомъ OM дугу окружн. сн и назовемъ чрезъ B точку ея пересѣченія съ OM (фиг. 129). Чѣмъ меньше $d\varphi$, тѣмъ болѣе треугольникъ $BM'M$ приближается къ прямолинейному и кромѣ того онъ, въ силу перпендикулярности радиуса OB къ окружности BM , прямоуголенъ при B . По сдѣланнымъ предположеніямъ имѣемъ $BM' = dr$, $MM' = ds$, $BM = r$, $d\varphi$ (дуга — произвольн. радиуса на уголь). Изъ безконечно-малаго прямоугольнаго треугольника $BM'M$ имѣемъ:

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2} \dots \dots \dots (348)$$

Такова формула дифференціала (или элемента) дуги.

Уголъ, составляемый радиусомъ-векторомъ съ касательною.

§ 191. Когда M' приближается безконечно-близко къ M , то уголъ $MM'M$ обращается въ предѣлѣ въ уголъ OMT , составляемый радиусомъ-векторомъ съ касательною. Поэтому изъ безконечно-малаго треугольника $BM'M$ имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r d\varphi}{dr}; \dots \dots \dots (349)$$

$$\sin \theta = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 (d\varphi)^2}}; \dots \dots \dots (350)$$

$$\cos \theta = \frac{r d\varphi}{ds} = \frac{r d\varphi}{\sqrt{dr^2 + r^2 (d\varphi)^2}} \dots \dots \dots (351)$$

Формулы (348), (349), (350) и (351) даваются болѣе строго въ подробныхъ курсахъ; представленія безконечно-малаго треугольника $BM'M$ со сторонами dr , ds и $r d\varphi$ помогаютъ запоминать эти формулы.

Выраженіе радиуса кривизны въ полярныхъ координатахъ.

§ 192. Чтобы получить выраженіе радиуса кривизны въ полярныхъ координатахъ, можно подставить въ формулу (310) вмѣсто x , y , новыя переменныя, связанныя съ ними (§ 52) уравненіями

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi.$$

Такая подстановка уже сдѣлана была нами въ «примѣрѣ» § 156-го, причемъ мы получили формулу, по сравненіи которой съ (340), получимъ:

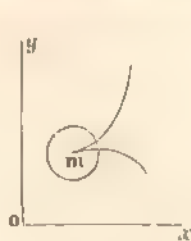
$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{r + 2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2}} \dots \dots \dots (352)$$

Особые точки кривыхъ.

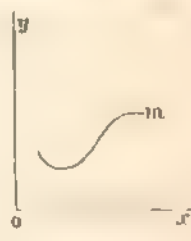
§ 193. Окружность, описанная изъ какой-нибудь точки кривой безконечно-малымъ радиусомъ, пересекаетъ кривую, вообще говоря, въ двухъ точкахъ (фиг. 130). При этомъ радиусы, проведенные изъ центра безконечно-малой окружности къ ея точкамъ пересечения съ кривой, составляютъ между собою уголъ безконечно-малъ, отличающийся отъ 180° . Если описанная изъ точки кривой, какъ изъ центра, безконечно-малая окружность не пересекаетъ кривую въ двухъ точкахъ, или радиусы, проведенные изъ точки пересечения, составляютъ уголъ, отличающійся на бесконечную



Фиг. 130.



Фиг. 131.



Фиг. 132.

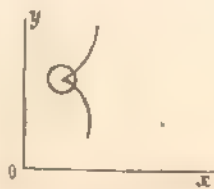
величину отъ угла въ 180° то точка кривой называется *особой*. Наиболее важныя особыя точки суть слѣдующія:

1) *Точка возврата m* (фиг. 131) такая, въ которой радиусы, проведенные изъ нея въ точки пересечения кривой съ безконечно-малой окружностью, имѣющею центръ въ *m*, составляютъ безконечно-малый уголъ. (На чертежѣ нельзя нарисовать безконечно-малую окружность, потому что она представляеть собой, что будетъ, если та окружность, которая нарисована, сдѣлается безконечно-малой. Но, впрочемъ, характеръ особыхъ точекъ ясенъ изъ вида начерченной кривой).

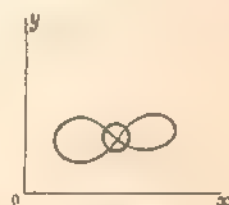
2) *Точка остановки* (фиг. 132) Въ такой точкѣ *m* кривая не идетъ дальше. Безконечно-малая окружность, описанная изъ точки остановки, пересекаетъ кривую только въ одной (а не въ двухъ) точкѣхъ.

3) *Угловая точка m* (фиг. 133). Радиусы, проведенные изъ этой точки въ точки пересечения кривой съ безконечно-малой окружностью, составляютъ уголъ, отличный отъ 180° .

4) *Кратная точка m* (фиг. 134) такая, въ которой кривая сама себя пересекаетъ. Безконечно-малая окружность, описанная изъ такой точки, пересекаетъ кривую болѣе чѣмъ въ двухъ точкахъ.



Фиг. 133.



Фиг. 134.

3) *Отдельная точка m* (фиг. 135). Случается такъ, что данному уравненію удовлетворяють не только координаты кривой *AB*, но и координаты некоторой точки *m*, расположенной совершенно отдельно. Безконечно малая окружность, описанная изъ такой *отдельной* точки, вовсе не пересѣкаетъ кривую.



Фиг. 135.

Разсмотримъ несколько подробнѣ особыя точки и пояснимъ сказанное на примѣрахъ.

Точка возврата.

§ 104. Въ точкѣ возврата (фиг. 131) касательная касается обѣихъ ветвей кривой, обѣ вѣтви имѣють одну общую касательную и потому *два значенія величины* $\frac{dy}{dx}$ (тангенса угла наклоненія касательной), имѣющіяся для другихъ значеній *x*, *сплоются рримиыми между собою* для того значенія $x = a$, при которомъ имѣется точка возврата.

Кромѣ того каждая изъ вѣтвей, сходящихся въ точкѣ возврата, въ ней обрывается, а потому *значенія знака, при переходѣ *x* черезъ значеніе $x = a$, или изъ положительныхъ сплываются минимыми или изъ минимыхъ стѣ становятся отрицательными.*

Примѣръ. Разсмотримъ кривую (фиг. 136)

$$y^2 = (x - a)^3. \quad \dots \dots \dots (353)$$

Отсюда

$$y = \pm \sqrt{(x - a)^3} = \pm (x - a)^{\frac{3}{2}}.$$

Каждому положительному значенію *x* соответствуетъ равное, но противоположное по знаку, отрицательное значеніе *y*. Слѣдовательно, кривая симметрична относительно оси *x*. Последнее, написанное выше уравненіе, разбивается на два:



Фиг. 136

$$\left. \begin{aligned} y &= + (x - a)^{\frac{3}{2}} = + \sqrt{(x - a)^3} \\ y &= - (x - a)^{\frac{3}{2}} = - \sqrt{(x - a)^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (354)$$

представляющихъ двѣ части кривой, идущія по обѣимъ сторонамъ оси *x*. Возьмемъ производныя отъ обѣихъ этихъ уравненій:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= + \frac{3}{2} (x - a)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{dy}{dx} &= - \frac{3}{2} (x - a)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Эти производныя, дѣлаясь при $x = a$ равными нулю, становятся равными между собою. При этомъ значеніи $x = a$, и обѣ величины *y* дѣ-

даются равными между собою. Значитъ, при $x = a$, обѣ части сливаются въ одной точкѣ и имѣютъ въ ней общую касательную. Остается испытать только, не будутъ ли обѣ величины y переходить изъ мнимыхъ въ действительные при переходѣ крива черезъ $x = a$. Въ самомъ дѣлѣ уравненія (351) показываютъ, что для $x < a$ ирреалы имѣютъ мнимое, а для $x > a$ действительное значение. Итакъ, кривая $y^2 = (x - a)^2$, (фиг. 136), имѣетъ точку возврата при $x = a$.

Точка остановки.

§ 195. Рассмотримъ кривую:

$$y = e^x.$$

При $x = 0$ ирреаль $y = 1$. Если будемъ x увеличивать отъ 0 до ∞ , то y будетъ уменьшаться отъ ∞ до e^{∞} , то есть до e^0 равнаго 1. Итакъ, при положительныхъ x имѣемъ вѣтвь AB (фиг. 137), и только ее, потому что для каждаго значения крива изъ данного уравненія получается по одному только значенію ирреала. Будемъ теперь разсматривать отрицательныя значенія крива. Положимъ для этого

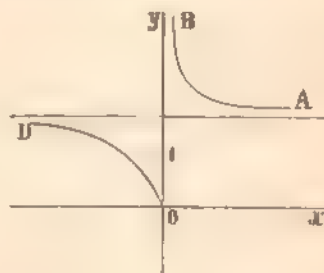
$x = -m$. Тогда

$$y = e^{-m} = \frac{1}{e^m}$$

гдѣ m есть абсолютная величина крива.

При $m = 0$; получимъ:

$$y = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$



Фиг. 137.

Слѣдовательно, кривая имѣетъ точку въ началѣ (0, 0). Съ возрастаніемъ абсолютной величины m крива знаменатель дроби $\frac{1}{e^m}$ уменьшается, и потому $y = \frac{1}{e^m}$ увеличивается. Итакъ, кромѣ вѣтви AB , имѣется еще вѣтвь OD , обрывающаяся въ началѣ координатъ, такъ какъ мы видѣли, что при положительныхъ x получается только вѣтвь AB . Итакъ вѣтвь OD имѣетъ точку остановки въ началѣ координатъ.

Угловые точки.

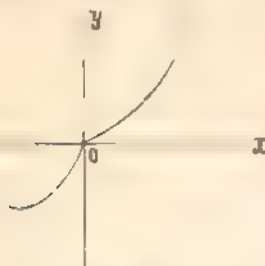
§ 196. Примѣръ угловой точки видимъ въ кривой (фиг. 138)

$$y = \frac{x}{1 + e^x}$$

При $x = 0$ получимъ: $y = \frac{0}{1 + \infty} = 0$. Значитъ кривая проходитъ

через начало (0, 0). Разделив обе части уравнения кривой на x , получим, $y = \frac{1}{1 + e^x}$. Имеем, $\frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}$ в точках, весьма близких

к началу, потому что в них y и x бесконечно-малы, так как кривая проходит через начало. Итак



Фиг. 138.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + \infty} = 0.$$

Значит, при положительных x получается часть кривой, проходящая через начало. Касательная к этой части в начале координат совпадает с осью x , так как, при $x = 0$, производная $\frac{dy}{dx} = 0$.

Рассмотрим отрицательные значения x . Для этого назовем абсолютные значения x через m во второй части уравнения кривой так, что $m = -x$, и

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{m}}}$$

При $x = -m = 0$, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{m}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e}} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Итак для $x < 0$, кривая в области отрицательных x имеет, $\frac{dy}{dx} = 1$, но эта ветвь тоже проходит через начало. Значит в начале кривая имеет две касательных к двум сходящимся здесь ветвям; одна из касательных направлена по оси x , другая же наклонена к оси x под углом φ , для которого $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = 1$, то есть $\varphi = 45^\circ$. Кривая имеет вид, изображенный на (фиг. 138), с *плоскою* точкою в начале.

Кратные точки.

§ 197. Как пример кривой, имеющей кратную точку рассмотрим кривую (фиг. 139)

$$y^2 = (x - a)(x - b)^2,$$

в которой $a < b$.

Из уравнения кривой находим:

$$y = \pm \sqrt{(x - a)(x - b)^2} = (x - a)^{\frac{1}{2}}(x - b). \quad (355)$$

Это уравнение показывает следующее: ордината y имеет 2 значения для каждого x ; следовательно, кривая симметрична относительно оси x . При $x < a$ для y получаются мнимые значения. При $x = a$ ордината $y = 0$.

Значитъ, кривая начинается отъ точки, для которой $x = a$ (фиг. 139) и идетъ отъ этой точки двумя ветвями по обѣимъ сторонамъ оси x . При измененіи угла отъ $x = a$ до $x = b$ кривая идетъ по обѣ стороны отъ a . При $x = b$ оба значенія угла обращаются въ нуль. Такимъ образомъ получается овалъ. При дальнейшемъ увеличеніи x , то есть при $x > b$ множитель $(x - b)$ въ уравненіи (355), делается отрицательнымъ, вследствие чего знакъ второй части уравненія (355) изъ \pm обращается въ \mp и значитъ ветви овалъ переходятъ, каждая, съ одной стороны оси x на другую и здѣсь y все увеличивается, но дѣлаетъ минимумъ. Видъ кривой уже опредѣленъ нами и изображенъ. Ну еще изобразовать, какъ издугъ касательныя въ точкѣ B при $x = b$.

Дифференцируя уравненіе (355), получимъ

$$\frac{dy}{dx} = (x - a)^{\frac{1}{2}} + \frac{(x - b)(x - a) - \frac{1}{2}}{2}$$

При $x = b$ второй членъ правой части уничтожается и остается:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{x - a}.$$

То есть въ точкѣ B (при $x = b$) производная $\frac{dy}{dx}$ (равная тангенсу угла наклоненія касательной) имѣетъ 2 значенія:

$$\frac{dy}{dx} = + \sqrt{b - a}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \sqrt{b - a}.$$

Итакъ въ точкѣ B имѣются двѣ отличныя одна отъ другой касательныя. Кривая представляетъ фигуру (фиг. 139) съ кратною точкою въ B .

Отдѣльная точка.

§ 198. Существованіе отдѣльной точки мы покажемъ на кривой.

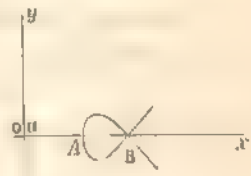
$$y^2 = (x - a)^2 (x - c).$$

въ которой $a < c$.

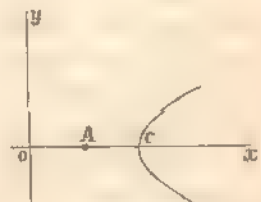
Изъ уравненія кривой находимъ:

$$y = \pm (x - a) \sqrt{x - c}. \quad (356)$$

Изъ этого уравненія видимъ слѣдующее: для каждаго x получается по два значенія угла, следовательно, кривая симметрична относительно оси x . При $x < c$ кривая не имѣетъ действительныхъ точекъ, кромѣ той, которая получается на оси x при $x = a$. При $x = c$ кривая имѣетъ на оси x точку c и при дальнейшемъ увеличеніи угла расходуется изъ c по



Фиг. 139



Фиг. 140.

объемъ сторонамъ оси x . Итакъ кривая имѣеть вѣтвь MN (фиг. 140) и совершенно *отдѣльную* точку A , для которой $x = a$; $y = 0$.

Вліяніе параметровъ.

§ 199. Въ настоящемъ параграфѣ мы покажемъ вліяніе величины параметровъ на такомъ примѣрѣ, который охватываетъ примѣры, данные въ §§ 194, 197 и 198; а именно, рассмотримъ строеніе кривой:

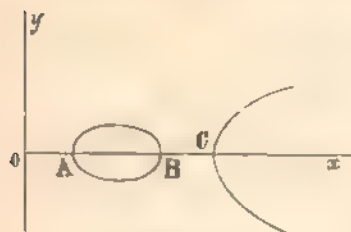
$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c),$$

въ которой $a < b < c$. Изъ уравненія кривой имѣемъ.

$$y = \pm \sqrt{(x - a)(x - b)(x - c)}. \quad (357)$$

Два знака передъ радикаломъ показываютъ, что для каждаго иска ордината y имѣеть два равныхъ и противоположныхъ значенія; следовательно,

кривая симметрична относительно оси x . Ордината y обращается въ нуль, всякій разъ, какъ стоящій въ правой части уравненія (357) радикалъ, обращается въ нуль, то есть: при $x = a$, при $x = b$, при $x = c$. Значитъ, кривая пересѣкаетъ ось x въ точкахъ A, B, C (фиг. 141). При $x < a$ для y получаются мнимыя значенія, потому что всѣ три множителя $(x - a)$,



Фиг. 141

$(x - b)$, $(x - c)$ при $x < a$ и при $a < b < c$ отрицательны, а следовательно и произведение, стоящее подъ радикаломъ, отрицательно; значитъ кривая не имѣеть точекъ при $x < a$. При $x = a$ она, какъ сказано выше, имѣеть точку A на оси x . При $a < x < b$ кривая распространяется по обѣ стороны оси x и замыкается въ точкѣ B , лежащей на оси x ; значитъ кривая имѣеть овалъ AB . При $b < x < c$ множители $(x - a)$, $(x - b)$ положительны, но множитель $(x - c)$ отрицателенъ; значитъ кривая отъ $x = b$ до $x = c$ опять не имѣеть точекъ. При $x = c$ она, какъ сказано выше, имѣеть точку c на оси x . Съ дальнѣйшимъ возрастаніемъ иска y все время имѣеть два равныхъ и противоположныхъ действительныхъ значенія; следовательно, начиная отъ C , кривая распространяется по обѣ стороны оси x частями, симметрично-расположенными относительно оси x .

Если въ уравненіи нашей кривой положить $b = c$, то получимъ уравненіе $y^2 = (x - a)(x - b)^2$, изслѣдованіе котораго въ § 197 показало существованіе кратной точки (фиг. 139). Здѣсь точки B и C фигуры 141-ой слились.

Если въ уравненіи (357) положить $b = a$, то получимъ уравненіе

$$y^2 = (x - a)^2(x - b),$$

изслѣдованіе котораго въ § 198 показало существованіе отдѣльной точки (фиг. 140). Здѣсь овалъ AB фигуры 141 слился въ одну точку A .

Если въ уравненіи (357) положить $a = b = c$, то получимъ уравненіе:

$$y^2 = (x - a)^2,$$

изслѣдованіе котораго въ § 194 показало существованіе точки возврата (фиг. 136). Здѣсь овалъ AB фигуры 141-ой слился въ одну точку A , и съ этою точкою слилась точка C .

Такъ изъ одной фигуры 141-ой получаются ея разновидности, благодаря только измененію параметровъ a , b и c .

Изслѣдованіе свойствъ нѣкоторыхъ кривыхъ.

Вступленіе.

§ 200. Съ тѣмъ мы свѣдѣній, полученныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, приступимъ къ изслѣдованію нѣкоторыхъ кривыхъ: это послужитъ къ расширенію нашихъ геометрическихъ свѣдѣній и будетъ, съ другой стороны, упражненіемъ въ примѣненіи изъясненной теоріи.

Сначала поговоримъ о геометріи коническихъ сѣченій, изложенную въ 1-ой части.

Касательная эллипса.

§ 201. Приложимъ дифференціальное исчисленіе къ эллипсу:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 = f(x, y).$$

По (263) имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{x'}{y'}.$$

Изъ уравненія эллипса получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}.$$

Слѣдовательно, по (261):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

По § 173-му уравненіе касательной таково:

$$\frac{\partial f}{\partial x} (X - x) + \frac{\partial f}{\partial y} (Y - y) = 0.$$

Вставивъ сюда полученные выше величины частныхъ производныхъ, получимъ:

$$\frac{2x}{a^2} (X - x) + \frac{2y}{b^2} (Y - y) = 0$$

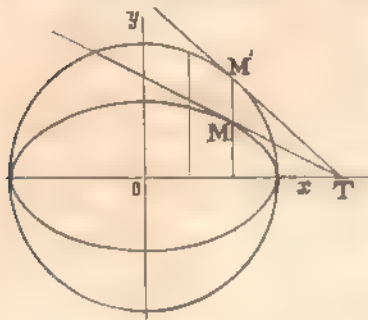
или

$$\frac{2Xx}{a} + \frac{2Yy}{b} - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2}.$$

Сокращая на 2 и зная из уравнения эллипса, что $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, получим уравнение касательной къ эллипу въ такой формѣ:

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1. \dots \dots \dots (358)$$

Если въ этомъ уравнении сдѣлать $Y = 0$, то получимъ $X = \frac{a^2}{x}$ величину, независящую ни отъ y , ни отъ b . Значитъ касательныя (фиг. 141), проведенныя при одномъ и томъ же x къ эллипсамъ, имѣющимъ то же направленіе осей и ту же большую ось a ,

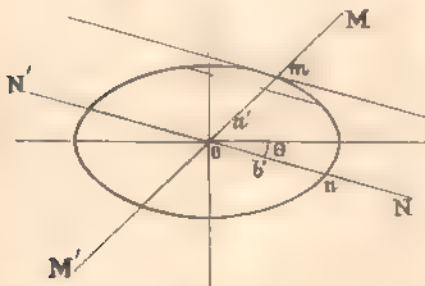


Фиг. 142

пересекаютъ ось x въ одной и той же точкѣ. Къ такимъ эллипсамъ принадлежитъ и окружность, описанная изъ центра эллипса радиусомъ a . Отсюда вытекаетъ такое *настроеніе касательной къ эллипу въ данной его точкѣ m* (фиг. 142) проводимъ чрезъ точку M перпендикуляръ къ оси x ; въ точкѣ M' его пересѣченія съ упомянутою окружностью, проводимъ, по извѣстному правилу, касательную къ этой окружности; прямая TM , соединяющая точку пересѣченія касательной къ окружности и оси x съ точкою M и будетъ искомая касательная.

Сопряженные диаметры эллипса.

§ 202. Мы видѣли въ § 37-омъ, что каждый диаметр (или хорда) параллельная сопряженному съ нимъ диаметру пополамъ. Касательныя, проведенныя въ концѣ диаметра MM' , есть предѣлы такихъ хордъ и потому тоже параллельна диаметру NN' , сопряженному съ MM'



Фиг. 143

(фиг. 143). Пусть (x', y') суть координаты конца m диаметра MM' . Уравненіе касательной по (358) будетъ:

$$\frac{Xx'}{a^2} + \frac{Yy'}{b^2} = 1.$$

Уравненіе сопряженнаго съ MM' диаметра NN' , какъ уравненіе прямой, параллельной къ касательной $\frac{Xx}{a} + \frac{Yy'}{b} = 1$, будетъ по условію $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ параллельности (формула (35)) таково:

$$\frac{Xx'}{a'} + \frac{Yy'}{b'} = 0. \dots \dots \dots (359)$$

оно отличается от уравнения касательной в точке m только отсутствием постоянного члена. И проведем через θ угол наклона этого диаметра NN' к оси x . Из его уравнения следует:

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$$

Уравнение диаметра MM' по (3) таково:

$$y' = x' \cdot \operatorname{tg} \theta'$$

где θ' есть угол наклона MM к оси x . Отсюда

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{y'}{x'}$$

Найдем по данным координатам (x', y') конца m диаметра MM' координаты (x'', y'') конца n сопряженного ему диаметра NN' . Точка n есть пересечение линий:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ эллипса,}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \text{ сопряженный диаметр по формуле (359).}$$

Решая совместно эти два уравнения, получим:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= \pm \frac{ay'}{b} \\ y'' &= \pm \frac{bx'}{a} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (360)$$

1-ая теорема Аполлонія.

§ 203. По формуле (21) разности om (фиг. 143), которое мы назовем через a' , будет удовлетворять равенству $a'^2 = x'^2 + y'^2$. Точка (x', y') лежит на эллипсе; поэтому:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

откуда:

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x'^2).$$

Вставляя эту величину y'^2 в найденное уравнение

$$a'^2 = x'^2 + y'^2,$$

получим:

$$a'^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'^2 = b^2 + e^2 x'^2, \dots \dots \dots (361)$$

где эксцентриситет $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$. Подобным же образом определяем разности on , которое назовем через b' . Именно

$$b'^2 = x''^2 + y''^2.$$

Вставляя сюда вместо (x, y) их величины из (360), получим:

$$b'^2 = \frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2 - (a^2 - x'^2) + \frac{b^2}{a^2} x'^2 - a^2$$

$$\frac{a^2}{a^2} b^2 x'^2 - a^2 = e^2 r^2 \dots \dots \dots (362)$$

Складывая (361) с (362) получим теорему Аполлония:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

Сумма квадратов сопряженных полуосей одинакова для всякой пары сопряженных полуосей и равна сумме квадратов полуросей эллипса.

Расстояние центра эллипса от касательной.

§ 204. Уравнение (358) касательной к эллипсу из точки (x', y') таково:

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} = 1$$

Координаты центра суть $(0, 0)$. Для определения расстояния центра $(0, 0)$ эллипса от касательной следует положить в (15):

$$A = \frac{x'}{a^2}; \quad B = \frac{y'}{b^2}; \quad C = -1$$

Получим:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}} \dots \dots (363)$$

Знак берем $+$ потому, что расстояние считаем положительным (фиг. 144).

144). Умножив числитель и знаменатель второй части уравнения (363) на ab , получим:

$$p = \frac{ab}{\sqrt{b^2 x'^2 + a^2 y'^2}}$$

Но, по (362), стоящая под радикалом величина $b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = b'^2$. Следовательно:

$$p = \frac{ab}{b'} \dots \dots \dots (364)$$

Угол φ , составляемый двумя сопряженными диаметрами эллипса.

§ 205. Определим угол φ , заключенный между сопряженными диаметрами a' и b' (фиг. 145).

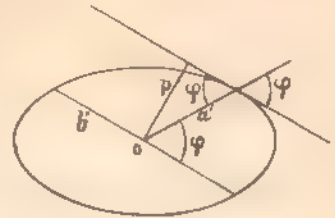
Этот угол равен углу, составленному касательной, проведенной

въ концѣ a' съ a' . Опустивъ (фиг. 145) изъ центра перпендикуляръ на эту касательную, получимъ изъ образуемаго при этомъ прямоугольнаго треугольника:

$$\sin \varphi = \frac{p}{a'}$$

Вставляя сюда величину p изъ (364), получимъ:

$$\sin \varphi = \frac{ab}{a'b'} \quad (365)$$



Фиг. 145.

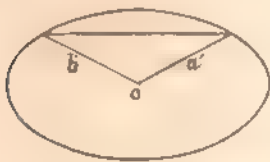
2-ая теорема Аполлонія.

§ 206. Изъ (365) непосредственно получимъ 2-ую теорему Аполлонія:

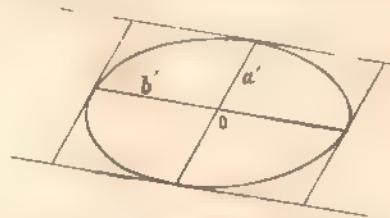
$$a'b' \cdot \sin \varphi = ab \quad (366)$$

Площадь треугольника, образованнаго двумя сопряженными полуосями эллипса и хордою, сплывающею изъ концы, одинакова для всякаго пары сопряженныхъ диаметровъ и равна $\frac{ab}{2}$ (фиг. 146).

Эта теорема можетъ быть выражена и такъ: площадь параллелограмма, построеннаго на паре какихъ бы то ни было сопряженныхъ диаметровъ есть, для даннаго эллипса, величина постоянная и равна площади прямоугольника, построеннаго на осяхъ, потому что эти параллелограммы слагаются изъ треугольниковъ, о которыхъ говорится въ первой редакціи этой теоремы (фиг. 147).



Фиг. 146.



Фиг. 147

Знаменитый греческій геометръ Аполлоній жившій въ началѣ III-го столѣтія по Р. Х. въ Александріи, доказалъ обѣ теоремы § 203, 206 элементарнымъ путемъ.

Разстоянія касательной эллипса отъ фокусовъ.

§ 207. По формулѣ (15) получимъ для разстоянія отъ фокуса эллипса (с. с') до касательной $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ слѣдующее выраженіе:

$$1 - \frac{cx'}{a^2} \\ \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}$$

Но по (363):

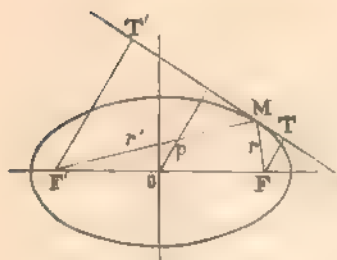
$$\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = p.$$

и по (364):

$$p = \frac{ab}{b'}.$$

Следовательно искомое расстояние =

$$\left(1 - \frac{ex'}{a^2}\right) \frac{ab}{b'} = \frac{b}{b'} \left(a - \frac{c}{a} r'\right) = \frac{b}{b'} (a - ex').$$



Фиг. 148.

По (81) формуль, называя радиусъ-векторъ чрезъ r , имеемъ: $a - ex' = r$. Итакъ искомое расстояние = $\frac{b}{b'} r = FT$ (фиг. 148) или:

$$FT = \frac{b}{b'} FM = \frac{b}{b'} (a - ex'). \quad (367)$$

Точно такъ же найдемъ:

$$F'T' = \frac{b}{b'} (a + ex') = \frac{b}{b'} \cdot r' = \frac{b}{b'} F'M. \quad (368)$$

Перемножая, получимъ:

$$FT \cdot F'T' = \frac{b^2}{b'^2} (a + ex')(a - ex') = \frac{b^2}{b'^2} (a^2 - e^2 x'^2).$$

Но по (362):

$$a^2 - e^2 x'^2 = b'^2.$$

Следовательно:

$$FT \cdot F'T' = b^2$$

произведение расстояний фокусовъ эллипса отъ касательной равно квадрату малой полуоси.

Равенство угловъ, составляемыхъ касательною эллипса съ радиусами-векторами точки касанія.

§ 208. Прямоугольные треугольнички FTM и $F'T'M$ (фиг. 148) и формулы (367) и (368) даютъ:

$$\sin FMT = \frac{FT}{r} = \frac{b}{b'}$$

$$\sin F'MT' = \frac{F'T'}{r'} = \frac{b}{b'}$$

Следовательно:

$$\sin FMT = \sin F'MT'$$

Итакъ: углы, образуемыя касательною съ радиусами-векторами, равны между собою.

Радиусъ кривизны эллипса.

§ 209. Изъ уравненія эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, получаемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

Вставляя найденныя величины $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ въ (340), получимъ:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{b^4}{a^2 y^3}} = \frac{\{b^4 x^2 + a^4 y^2\}^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^4}$$

Координаты центра кривизны эллипса.

§ 210. По правилу 2-ому § 188-го для нахождения координатъ t и u центра кривизны нужно определить t и u изъ уравнений:

$$(x - t) + (y - u) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \dots \dots \dots (342)$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (y - u) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (343)$$

Внося сюда определенныя въ предыдущемъ 209-мъ параграфѣ величины $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2 y}{dx^2}$, получимъ изъ уравненія (343):

$$1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2} - (y - u) \frac{b^4}{a^2 y^3}$$

откуда:

$$y - u = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2) y}{a^2 b^4}$$

Замѣняя здѣсь x^2 по формулѣ

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2),$$

и въ помощь изъ уравненія эллипса, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, получимъ:

$$y - u = \frac{[a^4 y^2 + b^4 \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2)] y}{a^2 b^4} = \frac{(a^2 - b^2) y^2 + b^4}{b^4} \cdot y$$

Полагая $a^2 - b^2 = c^2$, получимъ:

$$y \quad u = y + \frac{c^2 y^3}{b^4},$$

откуда:

$$u = -\frac{c^3 y^3}{b^4}; \dots \dots \dots (369)$$

вогь ордината центра кривизны эллипса. Найдемъ теперь абсциссу. Для этого, благодаря симметрии уравненія эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, достаточно замѣнить въ (369): a чрезъ b , b чрезъ a , x чрезъ y , y чрезъ x , помня только, что тогда вмѣсто $c^2 = a^2 - b^2$ придется поставить $c^2 = b^2 - a^2$. Получимъ:

$$t = \frac{c^2 x^3}{a^4} \dots \dots \dots (370)$$

Такова абсцисса центра кривизны эллипса.

Развертка эллипса.

§ 211. Въ (369) и (370) даны координаты центра кривизны эллипса, соответствующаго его точкѣ (x, y) . Исключая x, y изъ этихъ уравненій (369) и (370) и изъ уравненія эллипса, получимъ геометрическое мѣсто всѣхъ его центровъ кривизны. Для такого исключенія достаточно ввести въ уравненіе эллипса величины x и y , опредѣляемыя изъ (369) и (370). Получимъ сначала эти величины:

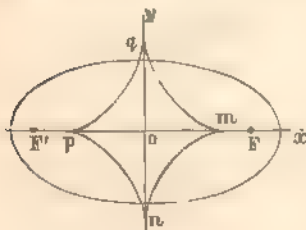
$$y = -\left(\frac{b^4}{c^4} u\right)^{\frac{1}{3}}; \quad x = \left(\frac{a^4}{c^4} t\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Внося ихъ въ уравненіе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, получимъ:

$$\frac{\left(\frac{a^4}{c^4}\right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}}}{a^2} + \frac{\left(\frac{b^4}{c^4}\right)^{\frac{2}{3}} u^{\frac{2}{3}}}{b^2} = 1$$

Для упрощенія выразимъ постоянныя части одною буквою. Получимъ:

$$At^{\frac{2}{3}} + Bu^{\frac{2}{3}} = 1.$$



Фиг. 149

Исключая это уравненіе развертки эллипса, можно было бы замѣтить, что она имѣетъ видъ *mnpq* (фиг. 149). Съ каждой ея четверти развертывается четверть (квадрантъ) эллипса.

Мы нашли уравненіе развертки подстановкою въ уравненіе эллипса величинъ x, y , опредѣленныхъ изъ (369) и (370). Но не трудно видѣть, что этотъ способъ тождественъ съ общимъ способомъ исключенія x, y , предложен-

нымъ въ § 188. Мы здѣсь опредѣлили x и y изъ (369) и (370), но для этого пользовались уравненіями (342) и (343), а затѣмъ подставили x , y въ данное уравненіе, въ § 188 мы исключали x , y изъ уравненій (312), (343) и даннаго. Очевидно это одно и тоже.

Касательная гиперболы.

§ 212. Изъ уравненія: $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ гиперболы вычисляемъ:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{2y}{b^2}.$$

Слѣдовательно по (261):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = +\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Вставляя эту величину въ общее уравненіе (302) касательной.

$$(Y - y) = \frac{dy}{dx} (X - x),$$

получимъ:

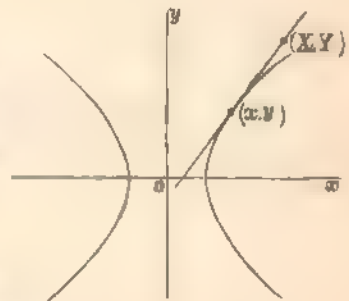
$$Y - y = \frac{b^2 x}{a^2 y} (X - x), \quad \text{или} \quad (Y - y) a^2 y = b^2 x (X - x),$$

$$\text{или} \quad \frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Но по уравненію гиперболы величина, стоящая здѣсь, во второй части $= 1$. Слѣдовательно, уравненіе касательной гиперболы таково:

$$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1.$$

Здѣсь X , Y суть текуція координаты касательной, x , y координаты точки касанія (фиг. 150).



Фиг. 150.

Асимптоты гиперболы.

§ 213. Выведенное нами уравненіе $\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1$ касательной къ гиперболѣ показываетъ слѣдующее: касательная можетъ быть проведена и чрезъ центръ гиперболы (0, 0), если только положить координаты точки касанія (x , y) равными безконечности. Дѣйствительно, если касательная проходить чрезъ начало координатъ (взятое въ центрѣ), то уравненіе касательной должно быть удовлетворено при $X=0$; $Y=0$. Тогда оно будетъ:

$$\frac{0 \cdot x}{a^2} - \frac{0 \cdot y}{b^2} = 1.$$

Это может быть только в томъ случаѣ, если $a = \infty$; $b = \infty$, потому что тогда получимъ: $\frac{0 \cdot \infty}{a^2} = \frac{0 \cdot \infty}{b^2} = 1$, что, по неопредѣленности выраженій $0 \cdot \infty$, можетъ быть вѣрнымъ. Но мы видѣли уже въ § 15-омъ, что прямыя, наклоненныя подъ угломъ φ , для котораго $\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{b}{a}$, встрѣчаютъ гиперболу въ безконечности и что онѣ называются асимптотами: теперь мы видимъ, что асимптоты касаются гиперболы въ безконечности. Уравненія асимптотъ будутъ таковы:

$$Y = + \frac{b}{a} X,$$

$$Y = - \frac{b}{a} X,$$

потому что онѣ проходятъ чрезъ начало и $\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{b}{a}$.

Переносъ члены этихъ уравненій въ одну сторону, получимъ:

$$\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0; \quad \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0,$$

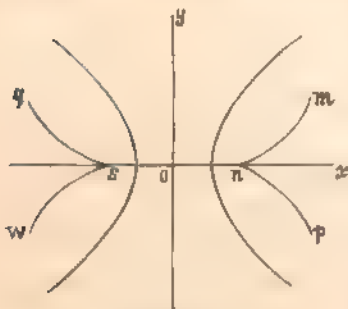
перемножая ихъ, получимъ:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0.$$

Это уравненіе представитъ собою совокупность обѣихъ асимптотъ, оно получается, если отбросимъ постоянный членъ въ уравненіи гиперболы: $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$.

Радиусъ кривизны и развертка гиперболы.

§ 214. Поступая совершенно такъ съ уравненіемъ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболы, какъ мы дѣлали съ уравненіемъ эллипса въ §§ 209—211, получимъ для гиперболы:



Фиг. 151.

$$\rho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} \text{ — радиусъ кривизны;}$$

$$At^{\frac{3}{2}} - Bu^{\frac{3}{2}} = 1 \text{ уравненіе развертки.}$$

Развертка гиперболы состоитъ изъ вѣтвей mnp и qsw (фиг. 151), распространяющихся въ безконечность.

Касательная параболы.

§ 215. Найдемъ уравненіе касательной параболы: $y^2 = 2px$. Напишемъ его такъ:

$$f(x, y) = y^2 - 2px = 0.$$

Вычисляем:

$$\frac{df}{dx} = 2p; \quad \frac{df}{dy} = 2y; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

Вставляя эту величину в общее уравнение касательной (302), получим:

$$Y - y = \frac{p}{y} (X - x);$$

или: $Yy - y^2 = pX - px.$

Подставляя сюда вместо px его выражение $\frac{y^2}{2}$, взятое из уравнения параболы, получим:

$$Yy - y^2 = pX - \frac{y^2}{2},$$

или:

$$Y = \frac{p}{y} X + \frac{y}{2}.$$

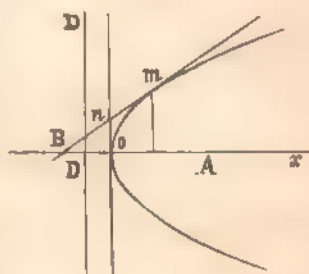
(Сравнивая это уравнение касательной параболы с уравнением

$$y = kx + b$$

прямой, пересекающей ось y на расстоянии b от начала (7), заключаем, что касательная параболы отсекает от оси y отрезок $\frac{y}{2}$ вдвое меньший ординаты точки касания (фиг. 152), именно:

$on = \frac{Am}{2}$. Из треугольников onB и AmB , оказавшихся при этом подобными, следует, что $OA = OB$. Итак: касательная параболы пересекает ось x на расстоянии от начала равном абсциссе точки касания.

Отсюда вытекает простой способ построения касательной к параболѣ въ точкѣ m . Для такого построения надо опустить из m перпендикулъ, отложить въ сторону отрицательнаго знака такую же абсциссу $OB = OA$ и соединить точку B съ m прямою, которая и будетъ касаться параболы въ точкѣ m .



Фиг. 152.

Равенство угловъ, составляемыхъ нормалью параболы съ радіусомъ-векторомъ и съ прямыми, параллельными ей оси.

§ 216. Мы видели, что для параболы $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$; такая величина тангенса угла наклона касательной. Тангенсъ угла наклона нормали будетъ, по условию (36) перпендикулярности, таковъ: $tg \phi = \frac{y}{p}$, гдѣ ϕ — уголъ наклона нормали mn (фиг. 153). Такой же тангенсъ будетъ у угла $\psi = (180^\circ - \phi)$ составляемаго нормалью съ прямою mA параллельною осей параболы. Найдѣмъ теперь $tg(Fmn)$, гдѣ Fmn — углу, состав-

ляемому нормальною съ радиусомъ-векторомъ Fm , проведеннымъ въ точку m изъ фокуса F . Координаты m суть (x, y) , координаты F суть $(\frac{p}{2}, 0)$. Слѣдовательно, уравненіе радиуса-вектора Fm по формулѣ (18):

$$y = \frac{(y_1 - y_2)}{x_1 - x_2} x + \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

будетъ:

$$y = \frac{y^2}{x - \frac{p}{2}} \dots \dots \dots (371)$$

Извѣстно изъ (36), что здѣсь коэффициентъ при x есть тангенсъ угла наклоенія прямой, выражаемый этимъ уравненіемъ (371). Итакъ:

$$tg(mFn) = \frac{y}{x - \frac{p}{2}}$$

исключивъ отсюда при помощи уравненія параболы x , получимъ:

$$tg(mFn) = \frac{2y}{y^2 - p^2} = \frac{2py}{y^2 - p^2}$$

— тангенсъ наклоенія вектора Fm . Зная тангенсъ наклоенія нормали $tg\psi = \frac{y}{p}$ и тангенсъ наклоенія вектора $tg(mFn) = \frac{2py}{y^2 - p^2}$, получимъ по формулѣ:

$$k - k' = 1 - kk' \dots \dots \dots (28)$$

$tg(Fmn)$ угла, составляемаго нормальною съ векторомъ

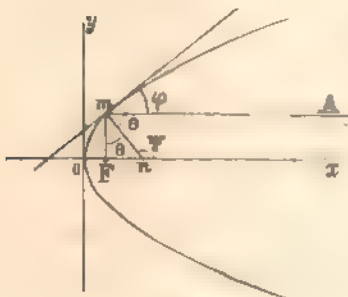
$$tg(Fmn) = \frac{\frac{2py}{y^2 - p^2} + \frac{y}{p}}{1 - \frac{2py}{y^2 - p^2} \cdot \frac{y}{p}} = \frac{2p^2y + y^3 - p^2y}{p(y^2 - p^2 - 2y^2)} = \frac{y(y^2 + p^2)}{-p(y^2 + p^2)} = -\frac{y}{p}$$

Но мы видѣли, что $tg\psi = \frac{y}{p}$. Слѣдовательно:

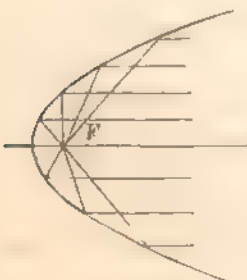
$$tg\theta = tg\psi = tg(Fmn)$$

т. е. нормали, составляемыя нормальною съ радиусомъ-векторомъ и съ прямою, параллельною оси x , равны между собою (фиг. 153).

По закону физики: уголъ паденія луча равенъ углу отраженія. Слѣдовательно, въ параболическомъ зеркалѣ лучи, выходяще изъ фокуса, отра-



Фиг. 153



Фиг. 154.

жакется по прямымъ, параллельнымъ оси; и наоборотъ: падающе на зеркало, параллельно оси, лучи собираются въ фокусъ параболы (фиг. 154) (въ сферическомъ же зеркалѣ существуетъ сферическая аберрація, то есть неполное совпаденіе лучей въ фокусѣ).

Архимедова спираль.

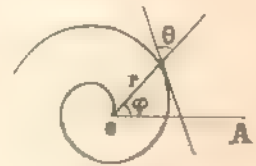
§ 217. Разсмотримъ видъ кривой, уравненіе которой выражается въ полярныхъ координатахъ такъ:

$$r = a \cdot \varphi; \dots \dots \dots (372)$$

радиусъ-векторъ пропорционаленъ полярному углу. Иско что кривая имѣетъ видъ спирали, и такъ какъ, съ увеличеніемъ φ (с безконечности въ (372)), и r увеличивается безконечно, то спираль распространяется въ безконечность, дѣлая безконечное число поворотовъ около полюса O . Точки пересѣченія ея съ полярною осью OA будутъ лежать на расстояніяхъ

$$r_1 = 2a\pi; r_2 = 4a\pi; 8a\pi,$$

и такъ далѣе. Эта кривая (фиг. 155) называется *архимедовою спиралью*.



Фиг. 155

Уголъ θ , составленный радиусомъ-векторомъ съ касательною, опредѣляется по дифференціальной формулѣ

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r \, d\varphi}{dr} \dots \dots \dots (349)$$

Здѣсь: $\operatorname{tg} \theta = \frac{r}{a} = \varphi$, потому что въ уравненіи (372) этой спирали слѣдуетъ:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{a}.$$

Наоборотъ $\frac{dr}{d\varphi} = a$. Дифференцируя еще разъ, получимъ $\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0$. Вставляя эти величины въ формулу:

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\varphi^2}} \dots \dots \dots (352)$$

получимъ для радиуса кривизны Архимедовой спирали выраженіе,

$$\rho = \frac{[r^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2a^2}.$$

Поставляя вмѣсто r равную ему величину $a\varphi$ (по уравненію спирали $r = a\varphi$), получимъ:

$$\rho = \frac{[a^2\varphi^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}{a^2\varphi^2 + 2a^2} = \frac{a^3(\varphi^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{a^2(\varphi^2 + 2)} = \frac{a(\varphi^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^2 + 2}.$$

Для выражения уравнения Архимедовой спирали в прямоугольных координатах, нужно въ нея полярное уравненіи $r = a\varphi$, вмѣсто r и φ , подставить ихъ выраженія чрезъ x , y при помощи формулъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \dots \dots \dots (78)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \dots \dots \dots (79)$$

Изъ (78) имѣемъ:

$$\varphi = \operatorname{artg} \left(\frac{y}{x} \right).$$

Вставляя въ уравненіе $r = a\varphi$, получимъ:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \operatorname{artg} \left(\frac{y}{x} \right).$$

Изъ сравненія этого сложнаго уравненія съ простымъ уравненіемъ: $r = a\varphi$ видна польза полярныхъ координатъ. Существуютъ кривыя, удобнѣе выражающіяся въ прямоугольныхъ координатахъ, но зато другія кривыя выражаются удобнѣе въ полярныхъ координатахъ.

Логарифмическая спираль.

§ 218. Разсмотримъ такъ называемую логарифмическую спираль, опредѣляемую уравненіемъ

$$r = e^{\varphi} \dots \dots \dots (373)$$

Эта спираль называется логарифмическою, потому что изъ нея уравненія слѣдуетъ: $\varphi = \operatorname{lg} r$. Что она имѣетъ видъ спирали, видно изъ уравненія ея (373), въ которомъ при увеличиваніи φ увеличивается и r (фиг. 156).



Фиг. 156.

Вычисляемъ:

$$\frac{dr}{d\varphi} = e^{\varphi}, \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = e^{\varphi}, \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{e^{\varphi}}.$$

Опредѣлимъ уголъ θ , составляемый радиусомъ-векторомъ съ касательною: по формулѣ (349) имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r \frac{d\varphi}{dr}}{1}.$$

Подставляя сюда найденную величину $\frac{dr}{d\varphi}$ получимъ:

$$\operatorname{tg} \theta = r \cdot \frac{1}{e^{\varphi}},$$

но по уравненію кривой $r = e^{\varphi}$. Слѣдовательно:

$$\operatorname{tg} \theta = 1; \quad \theta = 45^\circ.$$

Итакъ: въ логарифмической спирали касательная (а следовательно и элементъ кривой) составляетъ постоянный уголъ съ радіусомъ вектора.

Такимъ же свойствомъ обладаетъ логарифмическая спираль болѣе общаго вида:

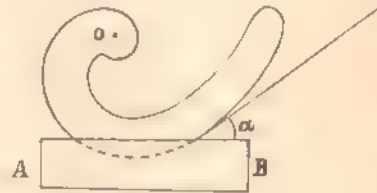
$$r = e^{m\varphi} (374)$$

Для нея:

$$\frac{dr}{d\varphi} = me^{m\varphi}; \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = m^2e^{m\varphi}; \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{me^{m\varphi}}$$

$$\operatorname{tg} \theta = r \cdot \frac{1}{me^{m\varphi}} = \frac{1}{m} (375)$$

Это свойство дѣлаетъ логарифмическую спираль удобною для выдѣлыванія вращающихся ножей съ лезвиемъ, сдѣланнымъ въ видѣ этой кривой: такой ножъ, вращаясь около полюса *o* (фиг. 157), врѣзается въ разрѣзаемое тѣло *AB* подъ постояннымъ угломъ α (все подъ однимъ и тѣмъ же угломъ при вращеніи ножа). Такіе ножи употребляются, напримѣръ, въ соломушкахъ.



Фиг. 157.

Радіусъ кривизны логарифмической спирали.

§ 219. Для опредѣленія радиуса кривизны логарифмической спирали преобразуемъ нѣсколько полученныхъ нами въ § 218 производныя, подставивъ въ нихъ вмѣсто $e^{m\varphi}$ величину r (уравненіе спирали $r = e^{m\varphi}$). Получимъ:

$$\frac{dr}{d\varphi} = me^{m\varphi} = mr; \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = m^2e^{m\varphi} = m^2r.$$

Подставивъ эти выраженія въ

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\varphi^2}} (352)$$

получимъ:

$$\rho = \frac{(r^2 + m^2r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2m^2r^2} = \frac{r^3(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2(1 + m^2)} = r\sqrt{1 + m^2}$$

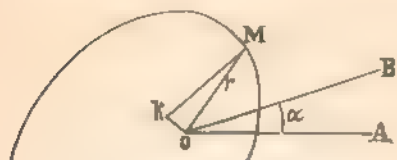
$$\rho = r\sqrt{1 + m^2} (376)$$

Величина $\sqrt{1 + m^2}$ постоянная; следовательно ρ пропорціонально r .

Развертка логарифмической спирали.

§ 220. Нахождение уравнения развертки логарифмической спирали в простой форме сопряжено с некоторыми затруднениями, но результатом получится необыкновенно красивый.

Пусть MK (фиг. 158) есть направление радиуса кривизны в точке M спирали. Возвратим из полюса O перпендикуляр OK . Из прямоугольного треугольника OKM имеем:



Фиг. 158.

$$MK = \sqrt{OM^2 + OK^2}.$$

Но $OM = r$

$$ok = r \operatorname{tg}(\angle OKM) = r \operatorname{cotg} \theta = \frac{r \cdot 1}{\operatorname{tg} \theta} :$$

$\operatorname{tg} \theta$ по (375) равен $\frac{1}{m}$. Следовательно: $ok = mr$. Поэтому:

$$MK = \sqrt{r^2 + m^2 r^2} = r \sqrt{1 + m^2}.$$

Но, по (376), мы имеем:

$$\rho = r \sqrt{1 + m^2}.$$

Следовательно $MK = \rho$. Итак, центр кривизны лежит на пересечении нормали с прямой ok , проведенною из o перпендикулярно к r . Этот результат отчасти подкашивался формулой (376), почему мы и попробовали его проверить приведенным вычислением.

Для нахождения развертки выберем другую полярную ось OB наклоненную к полярной под углом α , который пока считаем произвольным. Назовем новый полярный угол чрез φ' и величину OK чрез r' , так что

$$r' = ok = r \cdot \operatorname{cotg} \theta = mr = me^{m\varphi} \dots \dots \dots (377)$$

Из чертежа, замечая, что угол при k прямой, видим:

$$\varphi' + \alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}, \text{ откуда } \varphi = \varphi' + \alpha - \frac{\pi}{2} :$$

вставляя эту величину φ в (377), получим:

$$r' = me^{m\varphi'} + m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

или:

$$r' = e^{m\varphi'} \cdot me^m \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \dots \dots \dots (378)$$

Пока α у нас произвольно, и мы можем всегда подобрать для него такую величину, чтобы $me^m \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ равнялось единице: для этого стоит только, положив:

$$me^m \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

логарифмировать, при чемъ получимъ:

$$\lg m + m \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

и отсюда опредѣлить:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\lg m}{m}.$$

Вотъ при какомъ α величина $me^{m\alpha} \cdot 2^{-\frac{\pi}{2}}$ равна 1. Но тогда (378) обращается въ:

$$r' = e^{m\varphi'} \dots \dots \dots (379)$$

Итакъ: геометрическое мѣсто центровъ k кривизны, то есть развертка логарифмической спирали, есть тоже логарифмическая спираль, только такая, въ которой углы φ' отсчитываются отъ новой и спиральной оси, наклоненной къ прежней подъ угломъ

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\lg m}{m}.$$

Значитъ спираль (379) есть не что иное какъ данная спираль, повернутая на уголокъ, равный $\frac{\pi}{2} - \frac{\lg m}{m}$.

Вообще форма развертки выходитъ весьма сложная а для логарифмической спирали развертка есть такая же логарифмическая спираль. Результатъ таковъ:

*Развертка логарифмической спирали есть та же самая спираль, но иначе расположенная.**

Мы впоследствии увидимъ, что есть другая кривая, обладающая такимъ же свойствомъ.

Гиперболическая спираль.

§ 221. Спиралей существуетъ безчисленное множество, кромѣ наиболее замѣтныхъ архимедовой и логарифмической. Изъ числа другихъ спиралей упомянемъ о *спирали гиперболической*, выражаемой уравненіемъ:

$$r \cdot \varphi = m^2$$

Гиперболическою она называется по аналогіи съ гиперболою, отнесенной къ асимптотамъ (96), имѣющей уравненіе: $x \cdot y = m^2$.

Для обѣхъ части уравненія гиперболической спирали на φ , получимъ:

$$r = \frac{m^2}{\varphi}.$$

* Имя Бернулли открывшій это свойство, такъ былъ имъ пораженъ, что въ честь его символомъ воскресенья метрвыхъ и завѣдаль начертить логарифмическую спираль на своемъ памятникѣ.

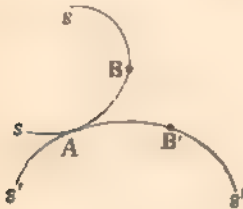
Изъ этого уравненія видно, что съ увеличеніемъ φ радиусъ векторъ уменьшается безпредѣльно. Следовательно кривая эта не проходитъ чрезъ полюсъ o , какъ это дѣлають архимедова и логарифмическая спирали, но приближается къ нему съ каждымъ новымъ оборотомъ, никогда его не достигая, при чемъ обороты (*спирь*) все уменьшаются (фиг. 159).



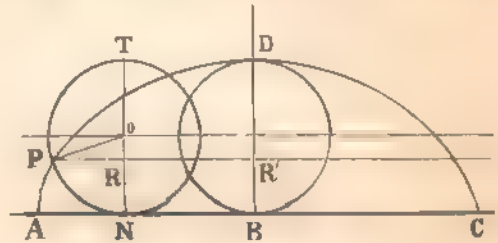
Фиг. 159

Циклоида и ея построеніе по точкамъ.

§ 222. Изслѣдуемъ кривую, которую описываетъ какая нибудь точка обода колеса, катящагося по гладкой дорогѣ. Задача должна быть поставлена болѣе определеннымъ образомъ. Кривая, описываемая точкою окружности, катящейся по прямой, называется *циклоидою*. Катаніемъ одной кривой s по другой s' (фиг. 160) называется такое движеніе s , при которомъ она постоянно касается кривой s' , при чемъ точка соприкосно-



Фиг. 160.



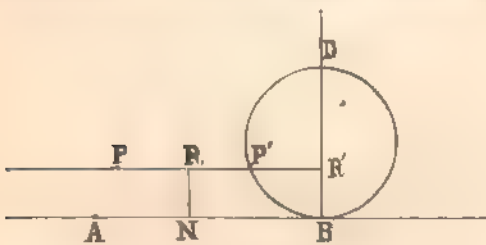
Фиг. 161.

венія проходитъ на обѣихъ кривыхъ равныя дуги: $AB = AB'$. Перейдемъ къ изслѣдованію *циклоиды*.

Пусть по прямой AB (фиг. 161) катится кругъ TN . Циклоидою называется кривая $APDC$, описываемая при этомъ точкою P окружности катящагося круга. Научимся прежде всего чертить циклоиду, хотя чертить ее можно только приблизительно. Но изучать мы ее будемъ точно.

Для вычерчиванія циклоиды достаточно начертить катящійся кругъ только въ томъ его положеніи, въ которомъ описывающая циклоиду точка наиболѣе удалена отъ прямой, по которой кругъ катится.

Для вычерчиванія циклоиды достаточно начертить катящійся кругъ только въ томъ его положеніи, въ которомъ описывающая циклоиду точка наиболѣе удалена отъ прямой, по которой кругъ катится.

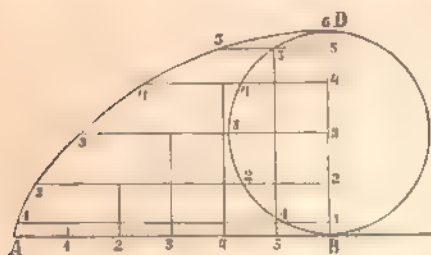


Фиг. 162.

Откладываемъ (фиг. 162) отъ точки касанія B этого круга длину BA равную подокружности BP . Это можно сдѣлать, какъ известно, только приблизительно, благодаря несомнѣвимости числа π . Совершенно достаточное для

приближеній приближеніе даетъ любая изъ описанныхъ въ Геометріи Давидова способъ приближеннаго построения (въ главѣ «квадратура круга»). Дѣлимъ дугу $BP'D$ на какое нибудь равное число частей. Пусть P' будетъ одна изъ точекъ дѣленія. Проводимъ чрезъ P параллель $P'R'$ къ BA . Если P' была n -ая точка дѣленія, считая отъ B , то и на BA беремъ n -ую точку дѣленія N , считая отъ A . Возвѣщаемъ изъ N перпендикуляръ къ BA до пересѣченія въ R съ параллелью, проведенною чрезъ P . Пусть R' есть пересѣченіе параллели $P'R'$ съ діаметромъ BD . Откладываемъ $RP = R'P'$. Точка P будетъ одною изъ точекъ циклоиды, какъ

это видно изъ сравненія фиг. 162 съ фиг. 161, на которой изображенъ катящійся кругъ въ положеніи NPT ; по построенію же дугъ: $NP = AN$, какъ и требуется при катаньи. Чѣмъ больше число то-



Фиг. 163.



Фиг. 164.

четъ дѣленія возьмемъ на $BP'D$, тѣмъ точнѣе будетъ чертежъ. На фиг. 163 половина циклоиды построена по точкамъ. На такихъ чертежахъ удобно отмѣчать точки цифрами.

Собственно полная циклоида состоитъ изъ безчисленнаго числа дугъ (фиг. 164) равныхъ между собою, потому что предполагаемъ, что кругъ катится по прямой въ безконечную даль.

Уравненіе циклоиды.

§ 228. Для вывода уравненія циклоиды выразимъ отдѣльно x и y чрезъ φ $\angle PON$ *поверота*, при чемъ прямую AB (фиг. 165) примемъ за ось x , начало беремъ въ A , $x = AL$, $y = LP$ суть координаты точки P циклоиды.

Изовемъ радіусъ катящагося круга чрезъ a . Изъ чертежа видимъ, что:

$$AL = AN = LN \quad \text{дуга } NP \quad PR = a \cdot \varphi \quad a \sin \varphi \quad a \cdot \varphi \quad \sin \varphi$$

$$a \quad LP = NR = NO \quad RO = a = a \cos \varphi \quad a(1 - \cos \varphi).$$

Итакъ:

$$x = a(\varphi + \sin \varphi) \dots \dots \dots (380)$$

$$y = a(1 - \cos \varphi) \dots \dots \dots (381)$$

Если изъ этихъ уравненій φ , получимъ уравненіе циклоиды слѣ-

дующимъ образомъ изъ (381):

$$\cos \varphi = 1 - \frac{y}{a},$$

откуда:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{a - y}{a} \right).$$

Слѣдовательно:

$$x = a \cdot \arccos \left(\frac{a - y}{a} \right) = a \sqrt{1 - \frac{(a - y)^2}{a^2}}$$

или:

$$x = a \cdot \arccos \left(\frac{a - y}{a} \right) = \sqrt{2ay - y^2} \dots \dots (382)$$

Касательная и нормаль циклоиды.

§ 224. Обыкновенно для изысканія циклоиды пользуются не уравнениемъ (382), но болѣе простыми уравнениями (380) и (381).

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:

$$dx = a (1 - \cos \varphi) d\varphi = y d\varphi$$

$$dy = a \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \sqrt{2ay - y^2} d\varphi.$$

Для почленно эти равенства одно на другое, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} \dots \dots (383)$$

По формулѣ (307) длина поднормали равна $y \frac{dy}{dx}$. Слѣдовательно, для циклоиды, она будетъ:

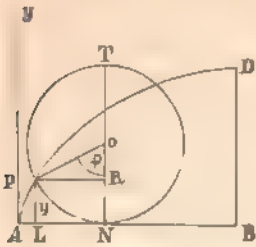
$$y \cdot \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \sqrt{2ay - y^2} = \sqrt{y(2a - y)}.$$

Последняя величина $\sqrt{y(2a - y)}$, какъ видно изъ чертежа (фиг. 165) равна

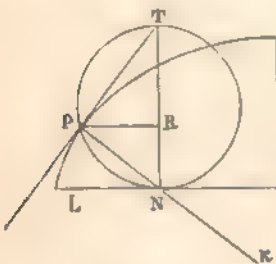
$$\sqrt{LP \cdot (NT - LP)} = \sqrt{LP \cdot (NT - NR)} = \sqrt{LP \cdot RT} = \sqrt{NR \cdot RT}.$$

Итакъ поднормаль (фиг. 166) равна средней пропорциональной между NR и RT . По известной теоремѣ о перпендикулярѣ, опущенномъ изъ точки окружности на диаметр, поднормаль равна, слѣдовательно $RP = LN$. Но если LN есть поднормаль, то PN —нормаль (фиг. 166). Итакъ *нормаль циклоиды есть прямая, соединяющая описывающую циклоиду точку P съ основанием N касательнаго круга*

Проведя нормаль и вѣстанная къ ней изъ P перпендикуляръ, получимъ касательную, которая пройдетъ чрезъ T , вслѣдствіе того, что уголь



Фиг. 165.



Фиг. 166.

NP , опирающаяся на диаметр, есть прямая (фиг. 166). Италья. касательная циклоиды есть прямая, соединяющая точку P , чертилицю циклоиды, съ вершиною T катящегося круга.

Радиус кривизны циклоиды.

§ 225. Изъ (383) имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}.$$

поэтому:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2a}{y} - 1$$

Дифференцируя это уравнение по x , получимъ:

$$2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a}{y^2} dy;$$

или:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{y^2} \dots \dots \dots (384)$$

Подставляя найденныя величины $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ въ выражение радиуса кривизны (340), получимъ:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{a}{y^2}} = \frac{\sqrt{2a^3}}{a} = \sqrt{2} \sqrt{2ay}.$$

И $\sqrt{2} \sqrt{2ay}$ (какъ среднепропорциональная между $2a$ и y) равна NP , поэтому чрезъ точку P есть среднепропорциональная между шиною $NT = 2a$ и ея отрезкомъ $y = NR$. Итакъ:

$$\rho = \sqrt{2} NP \dots \dots \dots (385)$$

Радиус кривизны циклоиды равенъ широтной нормали

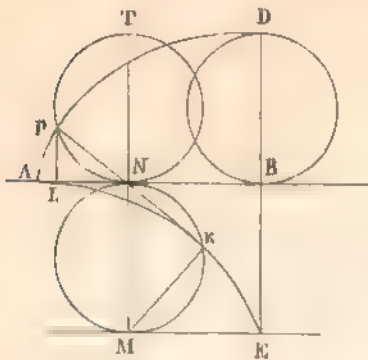
Центръ кривизны циклоиды.

§ 226. По правилу, изложенному въ концѣ § 179-го кривая конута если $\frac{d^2y}{dx^2}$ отрицательна. Мы видимъ изъ (384), что она отрицательна для циклоиды. Следовательно циклоида обращена конутостью къ оси x . Поэтому ρ надо откладывать въ направленіи отъ P къ N и тѣмъ къ $\rho = 2PN$, то центр кривизны лежитъ въ точкѣ K , на разстояніи $NK = PN$ отъ основанія N катящегося круга.

Развертка циклоиды.

§ 227. Найденныя свойства радиуса кривизны циклоиды и ея центръ кривизны даютъ возможность найти ея развертку слѣдующимъ простымъ геометрическимъ разсужденіемъ.

Построим (фиг. 167) круг NM симметричный и равный кругу I относительно прямой AB . Вследствие указанного равенства, $PN = AN$, точка K будет лежать на окружности этого круга. Вследствие равенства хорды и дуги PN и NK равны.



Фиг. 167.

Но дуга $PN = AN$; $AB =$ полуокружности катящегося круга. Следовательно, дуга $MK = ME$. Поэтому, когда круг NT будет катиться по AB , круг M^1 будет катиться по ME , и точка E (центр кривизны) опишет циклоиду AKI , равную данной циклоиде, но инверсно расположенную. Итак, развертка симметрическое жьсто центров кривизны циклоиды есть такая же, но инверсно расположенная, циклоида.

§ 228. Построение циклоиды дугами окружностей.

Радиус кривизны и центр кривизны — понятия чрезвычайно важные. Пока мы покажем на примере циклоиды, какую пользу мы можем извлечь из этих понятий для построения (вычерчивания) кривых. В § 222-ом мы изучились вычерчивать циклоиду по точкам, но построение по точкам требует большого навыка. Радиус кривизны дает возможность чертить кривая как ряд несомкнутых круговых дуг, проводимых обыкновенным циркулем.

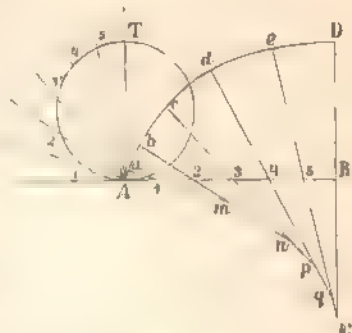
Для вычерчивания этим способом циклоиды поступают следующим образом.

Откладывают на прямой линии AB равную полуокружности катящегося круга. Делят AB на 6 равных частей. Строят окружность катящегося круга касательную к AB в точке A (фиг. 168). Делят эту окружность AT на 6 частей и соединяют A с точками деления этой окружности прямыми. Через точки деления прямой AB проводят прямые параллельные проведенным через точку A . Эти прямые обогнут развертку AE . Принимают последовательные взаимные пересечения m, n, p, q, E этих прямых за центры: из I описывают дугу Aa радиусом IA ; из m описывают дугу ab радиусом ma ; из n описывают дугу bc радиусом nb , и так далее. Границами дуг служат прямые, проходящая через точки деления прямой AB .

Не трудно видеть, что это построение согласуется со сказанным в §§ 226 и 227 о центре кривизны и развертке циклоиды, но избавляет от необходимости чертить катящийся круг в нескольких положениях.

Если прямую AB и полуокружность AT разбить по на 6, а на большее число частей, то чертёж будет точнее.

Я привелъ это устройство, потому что на немъ наглядно видны свойства развертки, и круговъ кривизны. Дуги Aa, ab, bc, cd, de, eD (фиг. 168) суть дуги шести круговъ кривизны циклоиды. Соответствующие имъ центры кривизны находятся въ точкахъ l, m, n, p, q, E , лежащихъ на разверткѣ.



Фиг. 168.

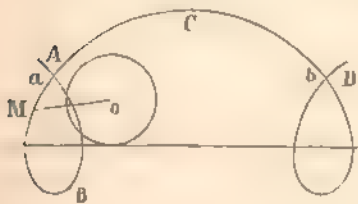
Необходимо замѣтить, что применение развертокъ и круговъ кривизны къ черчению представляетъ еще весьма малую долю той пользы, которую приносятъ математикѣ и ея приложениямъ понятие о кривизнѣ.

Циклоида есть одна изъ кривыхъ, называемыхъ *рыскалами*, о которыхъ мы поговоримъ въ § 231-омъ, а пока познакомимся съ ближайшими ея обобщеніями.

Растянутая и сжатая циклоиды.

§ 229. Если кругъ катится по прямой (фиг. 169) то точка M , неизмѣнимо соединенная съ нимъ, и находящаяся отъ его центра на разстояніи OM , превышающемъ длину его радиуса, описываетъ кривую $ABCD$ называемую *сжатой циклоидой*. Эта кривая обладаетъ завитками съ двойными точками: $a, b \dots$

Если кругъ катится по прямой, то точка M (фиг. 170), неизмѣнимо соединенная съ нимъ, но находящаяся отъ его центра на разстояніи меньшемъ длины



Фиг. 169.



Фиг. 170.

радиуса, описываетъ кривую $abMc$, называемую *растянутой циклоидой*. Эта кривая обладаетъ точками перетѣва: $a, b, c \dots$

Обыкновенная же циклоида (фиг. 164) обладаетъ точками возврата: $a, b, c \dots$

Центръ катящагося круга описываетъ, очевидно, прямую параллельную той, по которой онъ катится.

Приближенное построение длины полуокружности.

§ 230. Здесь хотим упомянуть еще об одном способе приближенного построения длины полуокружности. Это построение, довольно точное и весьма легкое заимствованное основано на следующем *Величине* $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ которая близка к архимедову числу π , определяющему отношение окружности к диаметру (или полуокружности к радиусу).

Действительно вычислив $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ при помощи таблицы логарифмов, получим:

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1,115710,$$

число π берет в таблицах такое 3,14159265. Следовательно разность между π и $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^2$ меньше $\frac{1}{250}$.

Если же $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ близка к π , то $\sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ близко к $\frac{1}{\pi}$ потому что:

$$(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2})(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2}) = (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$$

и следовательно:

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2}}.$$

Известно из геометрии, оказывается, что π равняется отношению суммы стороны вписанного квадрата со стороной *r* к стороне вписанного треугольника на делении меньшей $\frac{1}{250}$ радиуса описанного круга.

Это вытекает из предыдущего, потому что из геометрии и геометрии известно, что сторона вписанного квадрата равна $r\sqrt{2}$ а сторона вписанного треугольника $r\sqrt{3}$.

Строя по сфиг. 168 диаметр, мы вели *ВА* равным сумм *шах* хорд, из которых одна была стороной вписанного квадрата а другая сторона вписанного треугольника.

Этот способ менее точен, чем те которые даны в геометрии Давида, но легче заимствуется и весьма удобен в таких чертежах, в которых величины $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ уже имеются готовыми.

Рулетты.

§ 231. Если кривая *s* (фиг. 171) касается по кривой *s'* то точка *m* неизменно соединена с катящейся фигурой *s*, описывает кривую *АВ* называемую *рулеткою*.

Циклоида есть одна из рулетт, в ней кривая *s'* есть прямая, а *s* круг.

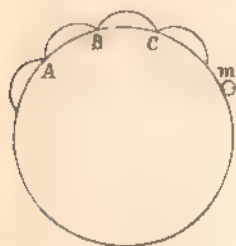


Фиг. 171.

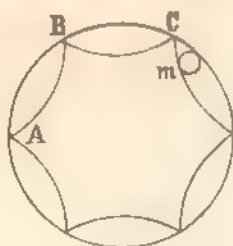
Эпициклоиды и гипоциклоиды.

§ 232. Изъ ругетъ наиболѣе важное значеніе измѣнѣ г \dot{r} , которыя образуются катаніемъ окружностей по окружностямъ.

Точка m , находящаяся на окружности катящейся по вѣншей сторонѣ неподвижной окружности (фиг. 172), описываетъ кривую, называемую *эпициклоидою*. Эпициклоиды бываютъ весьма раз-



Фиг. 172.



Фиг. 173.



Фиг. 174.

нообразныхъ формъ, смотря по тому, какъ велико отношеніе $\frac{r}{R}$ радиуса r катящейся окружности къ радиусу R неподвижной. Эпициклоиды имѣютъ точки возврата: A, B, C, \dots

Кривая (фиг. 173), описываемая точкою m окружности, катящейся по внутренней сторонѣ неподвижной окружности, называется *гипоциклоидою*. Существуетъ безчисленное множество различныхъ гипоциклоидъ. Гипоциклоиды имѣютъ точки возврата: A, B, C, \dots

Точка, находящаяся на разстояніи отъ центра катящагося круга менше его радиуса, описываетъ *растянутую эпициклоиду* (фиг. 174) при вѣншемъ и *растянутую гипоциклоиду* при внутреннемъ катаніи по неподвижной окружности.

Точка, находящаяся на разстояніи отъ центра катящагося круга больше его радиуса, описываетъ *сжатую эпициклоиду* (фиг. 175) при вѣншемъ и *сжатую гипоциклоиду* при внутреннемъ катаніи по неподвижной окружности.



Фиг. 175.

Всѣ эти кривыя, образованныя катаніемъ *окружностей*, называются общимъ именемъ *трехходовыя*, которыя принадлежатъ къ числу *рулеттъ*.

Функціи многихъ переменныхъ.

Кривыя двойной призмы.

§ 233. Перейдемъ теперь къ геометріи трехъ измѣреній. Тамъ изъ ся формуль, которыя сходны съ соответствующими формулами геометріи

вухъ измеренн мы дѣдимъ безъ показателя. Доказательствъ ихъ можно найти въ подробныхъ курсахъ; намъ достаточно сравнить ближайшее вниманіе не на выводы ихъ, а на результаты изъ нихъ получаемые и характеризующе общія свойства поверхностей и кривыхъ двойной кривизны.



Фиг. 176.

Кривою двойной кривизны называется всякая неплоская кривая всякая такая кривая, которая не лежитъ всеми своими частями въ одной плоскости и примѣръ *винтовой линіи* есть линія двойной кривизны.

При пересѣченіи двухъ поверхностей можетъ получиться и кривая, находящаяся въ одной плоскости. Напримеръ, двѣ сферическія поверхности (фиг. 176), пересѣкаются въ окружности, кривою двойной кривизны. Но въ большинствѣ случаевъ швъ и поверхности пересѣкаются по линіи двойной кривизны, не находящейся въ одной плоскости.

Касательная къ кривой.

§ 234. Кривая въ пространствѣ определяется (см. § 71) двумя уравненіями какъ пересѣченіе двухъ поверхностей. Пусть уравненія, выражающія такую кривую, суть:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ \varphi(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (386)$$

Дифференціальное уравненіе касательной къ этой кривой таково

$$\left. \begin{aligned} (X-x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y) \frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z) \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \\ (X-x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y-y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (Z-z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (387)$$

(Сравни. съ § 173).

Элементъ дуги кривой въ пространствѣ.

§ 235. Элементъ дуги кривой выражается формулою

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \dots \dots \dots (388)$$

аналогично съ формулою (313) геометріи на плоскости.

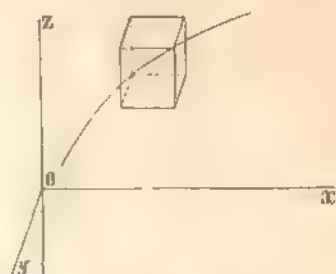
Направленіе элемента.

§ 236. Разсматривая элементъ кривой какъ угольникъ параллелепипеда, ребра котораго суть: dx, dy, dz , имѣемъ (фиг. 177).

$$\left. \begin{aligned} dx &= ds \cdot \cos \alpha \\ dy &= ds \cdot \cos \beta \\ dz &= ds \cdot \cos \gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (389)$$

ди α , β , γ суть углы наклонения элемента къ осямъ координатъ, или, что то же самое, углы наклонения проходящей чрезъ элементъ касательной. Изъ (389) и (388) имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \\ \cos \beta &= \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \end{aligned} \right\} \dots (390)$$

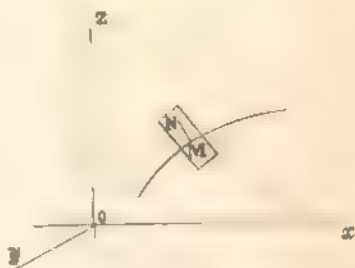


Фиг. 177.

Плоскость нормальная къ кривой.

§ 237. Плоскость, проведенная чрезъ точку кривой перпендикулярно къ касательной, проходящей чрезъ ту же точку, называется нормальной (фиг. 178). Назовемъ чрезъ X, Y, Z координаты какой либо точки N этой плоскости и чрезъ α', β', γ' углы, составляемые прямою MN съ осями. Продолжения отрезка MN на оси суть:

$$\left. \begin{aligned} X - x &= MN \cdot \cos \alpha' \\ Y - y &= MN \cdot \cos \beta' \\ Z - z &= MN \cdot \cos \gamma' \end{aligned} \right\} \dots (391)$$



Фиг. 178.

Углы между касательной и MN есть прямые, и потому, согласно (130),

$$\cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \beta \cdot \cos \beta' + \cos \gamma \cdot \cos \gamma' = 0.$$

Вставляя сюда косинусы изъ (389) и (391), получимъ:

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{X - x}{MN} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{Y - y}{MN} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{Z - z}{MN} = 0;$$

или $(X - x) dx + (Y - y) dy + (Z - z) dz = 0. \dots (392)$

Это и есть уравнение нормальной плоскости. Координаты ея точекъ суть X, Y, Z координаты же точки M кривой суть x, y, z .

Плоскость, касательная къ поверхности.

§ 238. Поверхность, какъ мы знаемъ, определяется однимъ уравненіемъ. Пусть дана поверхность:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Возьмемъ на ней (фиг. 179) какую-нибудь точку m . Чрезъ эту точку будемъ проводить по данной поверхности всевозможныя кривыя, и къ каж-

Если из точки m проведем через m касательные (не изображенные на фиг. 179), докажем, что все такие касательные лежат в одной плоскости. Пусть $\varphi(x, y, z) = 0$ есть уравнение поверхности, пересечение которой с $f(x, y, z) = 0$ дает одну из проведенных нами кривых. По (387) уравнения касательной, проведенной к этой кривой через m , будут:

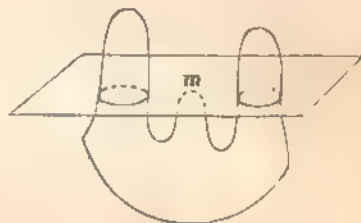
$$X(x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (393)$$

$$(X - x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (394)$$

Касательная представляет собой пересечение плоскости (393) с плоскостью (394); как бы ни менялось $\varphi(x, y, z)$, плоскость (393) всегда проходит, следовательно, через касательную. Переходя от одной кривой (фиг. 179) к другой, меняем, именно $\varphi(x, y, z)$, следовательно, все ка-



Фиг. 179.



Фиг. 180.

сательные, проведенные через m к кривым, проходящим через m по поверхности $f(x, y, z) = 0$, лежат в одной плоскости:

$$(X - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (395)$$

Что и требовалось доказать. Такая плоскость называется *плоскостью касательной* к поверхности в точке (x, y, z) .

Таким образом, касательная к поверхности плоскость есть геометрическое место касательных, проведенных через данную точку поверхности к различным кривым, лежащим на данной поверхности и проходящим через эту точку. Уравнение касательной плоскости, проходящей через точку (x, y, z) поверхности $f(x, y, z) = 0$, есть уравнение (395).

Касательную плоскость нельзя определить как плоскость, имеющую только одну точку общую с поверхностью: может встретиться такая поверхность, в которой плоскость, касающаяся ее в одной точке m (фиг. 180), имеет с нею еще множество других общих точек и даже общих линий. Поэтому мы переходим к понятию о касательной плоскости от весьма ясно установленного (§ 147) понятия касательной прямой. Но нельзя признать очевидным положение, что геометрическое место

касательных, проведенных чрез данную точку поверхности къ кривым, проходящим чрез эту точку и лежащим на данной поверхности, есть плоскость. Это положение надо было доказать.

Нормаль поверхности.

§ 239. Перпендикуляр, возставленный къ касательной плоскости точки касания, называется *нормалью*. Можно сказать, что нормаль есть перпендикуляр къ элементу поверхности, если пред ставить себѣ поверхность въ видѣ многогранника съ безконечно-большимъ числомъ безконечно-малыхъ граней и каждую такую грань называть элементомъ поверхности.

Косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью съ осями координатъ.

§ 240. По (137) перпендикуляр, одущенный изъ начала на плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$, составляетъ съ осями углы, косинусы которыхъ выражаются такъ:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

Въ уравненіи (393) касательной плоскости коэффициенты A , B , C при X , Y , Z суть: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. Следовательно, косинусы угловъ (N, x) , (N, y) , (N, z) составляемыхъ нормалью съ осями (такое обозначеніе угловъ очень удобно: уголъ между прямою N и x обозначается кобыкою (N, x)), будутъ

$$\left. \begin{aligned} \cos (N, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ \cos (N, y) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ \cos (N, z) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (395)$$

Это очень важная, по своему частому примѣненію, формула.

Уравненіе нормали.

§ 241. По формулѣ (157) уравненіе нормали, проходящей чрезъ точку (x, y, z) поверхности, будетъ:

$$\frac{X - x}{\cos(N, x)} = \frac{Y - y}{\cos(N, y)} = \frac{Z - z}{\cos(N, z)} \quad (395)$$

Вставивъ сюда вмѣсто косинусовъ ихъ величины изъ (157), получимъ:

$$\frac{X - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad (396)$$

величина $\left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right|$ сократится. Это уравненіе (396) и есть уравненіе нормали, проходящей чрезъ точку (x, y, z) поверхности.

$$f(x, y, z) = 0$$

Плоскость соприкосновенія.

§ 242. Возьмемъ (фиг. 181) какую-нибудь кривую двойной кривизны. Для ясности чертеемъ ее такимъ, что она начерчена на цилиндрѣ, но разсужденія наши будутъ относиться къ всякимъ кривымъ, хотя бы они и не укладывались на цилиндръ. Разсмотримъ на этой кривой точку M и примемъ двѣ точки M' и M'' . Три точки $M'M''$, какъ известно изъ элементарной геометрии, определяют вполне некоторую проходящую чрезъ нихъ плоскость. Положимъ (фиг. 181), что $M'M''m$ есть такая плоскость. Будемъ приближать точки M' и M'' къ точкѣ M . Плоскость $M'M''m$ будетъ при этомъ перемѣщаться и когда точки M' и M'' сольются съ точкою M то плоскость $M'M''m$ придетъ въ предѣльное положеніе. Такая плоскость, проходящая чрезъ три бесконечно-близки точки $M'M''$ и M кривой, называется *плоскостью соприкосновенія* или *соприкасающейся плоскостью* кривой въ ея точкѣ M .

Мы даемъ здѣсь уравненіе плоскости соприкосновенія не выводимъ его и темъ самымъ желающимъ ознакомиться съ его выводомъ въ подробнѣйш. курсамъ дифференціального исчисленія. Уравненіе это таково:

$$(dy \cdot d^2z - dz \cdot d^2y)(X - x) + (dz \cdot d^2x - dx \cdot d^2z)(Y - y) + (dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x)(Z - z) = 0. \quad (397)$$

Радиусъ кривизны.

§ 243. Кривизна и радиусъ кривизны пространственныхъ кривыхъ имѣютъ такое же геометрическое значеніе, какъ и для плоскихъ кривыхъ. Окружность опредѣляется тремя точками (чрезъ данныя три точки можно про-



Фиг. 181

вести только одну окружность и плоскость касания определяется двумя бесконечно близкими точками. Отсюда уже можно видеть, что центр кривизны должен лежать в плоскости сопряжения.

Все прямые, проведенные через точку M кривой (фиг. 182) в перпендикулярной плоскости pq называются вращательными кривыми в этой точке. Из них лишь только одна MN лежит в то же время и в плоскости сопряжения mn . Перпендикуляр MN , лежащий в плоскости сопряжения, называется *главной нормалью* в точке M .

Очевидно, что центр кривизны лежит в главной нормали. Радиус кривизны выражается формулой

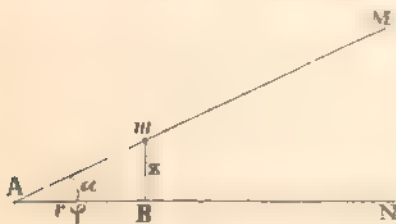
$$\rho = \frac{ds^3}{\sqrt{(dy \cdot dz - dz \cdot dy)^2 + (dz \cdot dx - dx \cdot dz)^2 + (dx \cdot dy - dy \cdot dx)^2}}$$

(Доказательство см. в подробных курсах)

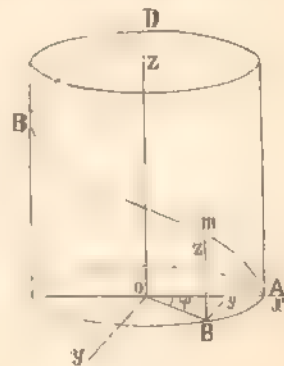
Винтовая линия.

§ 244. Какъ примѣръ линій двойной кривизны возьмемъ винтовую линию. Прежде определимъ точнѣе, что называется винтовой линіею.

Если на плоскости возьмемъ произвольный уголъ (фиг. 183) и будемъ называть эту плоскость на круглый прямой цилиндръ (фиг. 184) такъ, чтобы одна сторона угла расстилалась по окружности основанія цилиндра. Линія AMB , по которой завитъя при этомъ другая сторона угла, называется



Фиг. 183.



Фиг. 184.

винтовой. Выведемъ ея уравненія. Примемъ за ось z ось цилиндра, за ось x радиусъ его основанія, проходящій въ вершинѣ A наложеннаго на цилиндръ угла. Координаты какой-нибудь точки m винтовой линіи будутъ выражаться чрезъ уголъ φ , составленный съ осью x радиусомъ цилиндра проведеннымъ изъ начала къ образующей, проходящей чрезъ m , слѣду-

щимъ образомъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (399)$$

Гдѣ r есть радиусъ цилиндра. Координата z опредѣлился по слѣдующимъ соображеніямъ: дуга $AB = r\varphi$; до накрутки на уголъ α на цилиндръ она была катетомъ треугольника ABm , въ которомъ другой катетъ равенъ z . Поэтому:

$$z = r \cdot \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots (400)$$

Для изученія свойствъ винтовой линіи можно пользоваться и этими уравненіями (399) и (400), но собственно уравненія винтовой линіи, не содержащія никакихъ переменныхъ, кромѣ (x , y , z), можно получить исключая φ изъ (399) и (400). Получимъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos \left(\frac{z}{r \cdot \operatorname{tg} \alpha} \right) \\ y &= r \cdot \sin \left(\frac{z}{r \cdot \operatorname{tg} \alpha} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (401)$$

Разстояніе двухъ послѣдовательныхъ точекъ пересѣченія винтовой линіи съ одною и тою же образующею основнаго цилиндра называется *шагомъ* винта.

По формуламъ (399) и (400) вычисляемъ:

$$dx = -r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \quad dy = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi; \quad dz = r \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot d\varphi$$

Слѣдовательно

$$d^2x = -r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi^2, \quad d^2y = -r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi^2, \quad d^2z = 0$$

Отсюда вычисляемъ выраженія:

$$\begin{aligned} (dy \cdot d^2x - dz \cdot d^2y) &= r^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi^3; \\ (dz \cdot d^2x - dx \cdot d^2z) &= -r^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi^3, \\ (dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x) &= r^2 \cdot d\varphi^3; \\ ds &= \sqrt{r^2} d\varphi^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \end{aligned}$$

Подставляя эти выраженія въ (398), получимъ

$$\rho = r (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Итакъ, радиусъ кривизны винтовой линіи есть величина постоянная съ одинаковою для всѣхъ точекъ винтовой линіи.

Изъ выведенныхъ для винтовой линіи формулъ видимъ, что для нея

$$\frac{ds}{dz} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sin \alpha.$$

Но по (389) следует, что $\frac{dz}{ds} = \cos \gamma = \cos \text{инуса угла, составляемого касательной (элементом кривой) с осью } z$. Итак $\cos \gamma = \sin \alpha$; значит, касательная составляет с образующими цилиндра угол дополнительный до 90° к α . С плоскостью основания цилиндра она следовательно, составляет постоянный угол α .



Фиг. 185.

Развертывающаяся винтовая поверхность.

§ 245. Знакомство с винтовой линией дает нам возможность рассмотреть две весьма интересные поверхности. Одна из них, с ее так называемой *винтовой развертывающейся поверхностью* представляющая собою геометрическое место прямых касательных к винтовой линии (фиг. 224 и 225). С этою поверхностью нам придется скоро опять встретиться.

Косая винтовая поверхность.

§ 246. Другая поверхность представляет собою геометрическое место прямых, проведенных из различных точек винтовой ли-



Фиг. 186.

нии под одним и тем же углом к оси цилиндра (фиг. 185), или перпендикулярно оси (фиг. 186). На поверхности (фиг. 186) расположены, например, ребра конуса винтовой линии.

ГЛАВА II.

Интегральное исчисление.

Понятие об интеграле.

§ 247. Дѣйствию обратное дифференцированию называется *интегрированием*. Дифференцировать функцию $f(x)$ значит найти ее дифференциал $f'(x) dx$. Например, дифференцируя $\sin x$ находим $\cos x dx$ (см. § 133). *Интегрировать дифференциал $\varphi(x) dx$ значит найти такую функцию, дифференциал которой был бы равен $\varphi(x) dx$.*

Интегрирование обозначается знаком \int . Формула $\int \varphi(x) dx$ произносится такъ: интегралъ отъ $\varphi(x) dx$.

Дифференцируют функции и получают дифференциалы вида $\varphi(x) dx$ (см. § 120). Интегрируют дифференциалы вида $\varphi(x) dx$, и получают функции.

Примеръ 1-ый. Требуется найти интегралъ отъ $mx^{m-1} dx$. Мы знаемъ, что данная дифференциаль произойдетъ отъ дифференцирования функции x^m (см. (217)). Следовательно, искомый интегралъ есть x^m . Пишется это такъ:

$$\int mx^{m-1} dx = x^m,$$

произносится такъ: интегралъ отъ $mx^{m-1} dx$ равенъ x^m .

Примеръ 2-ой. Найти $\int \cos x \cdot dx$. Мы знаемъ (220), что $\cos x dx$ есть дифференциаль отъ $\sin x$. Следовательно:

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x.$$

Постоянные интеграціи.

§ 248. Однако дифференциаль $f'(x) dx$ получается не только отъ дифференцирования $f(x)$, но и при дифференцировании $f(x) + c$, гдѣ c какое-нибудь постоянное. Дѣйствительно, по формулѣ (214), дифференциаль постоянного равенъ нулю, следовательно,

$$d(f(x) + c) = df(x) + dc = f'(x) dx + 0 = f'(x) dx = df(x).$$

Напримѣръ:

$$d(x^2) = 2x dx; \text{ но и } d(x^2 + 3) = 2x dx,$$

и вообще:

$$d(x^2 + c) = 2x dx,$$

какое бы ни было постоянное c .

Поэтому, для того чтобы имѣть въ виду всѣ рѣшенія вопроса, нужно при интегрировании прибавлять еще произвольное постоянное c и писать:

$$\int f'(x) dx = f(x) + c \dots \dots \dots (102)$$

Такъ въ примѣрахъ предыдущаго параграфа правильно было бы написать:

$$\int mx^{m-1} dx = x^m + c, \quad \int \cos x \cdot dx = \sin x + c.$$

Эти произвольныя постоянныя, которые слѣдуетъ прибавлять при интегрировании, называются *постоянными интеграціями*. Они вносятъ некоторую неопредѣленность.

Неопредѣленный интегралъ.

§ 249. Изъ сказаннаго выше слѣдуетъ такое опредѣленіе:

Неопредѣленнымъ интеграломъ $\int \varphi(x) dx = F(x) + c$ называется такая функція $F(x) + c$ дифференциаль которой равенъ дифференциалу $\varphi(x) dx$, стоящему подъ знакомъ интеграла.

Интегралъ какъ сумма безконечно-большаго числа безконечно-малыхъ величинъ.

§ 250. Положимъ, что та функция, дифференциаль которой равенъ $\varphi(x) dx$, есть некоторая $F(x)$, такъ что:

$$\int \varphi(x) dx = F(x) + c. \dots \dots \dots (403)$$

Будемъ измѣнять x отъ $x = a$ до $x = b$, гдѣ a и b суть некоторыя постоянныя величины. $F(x)$ измѣнится при этомъ и изъ $F(a)$ обратится въ $F(b)$, такъ что измѣнится на величину $F(b) - F(a)$.

Предлагаемъ это измѣненіе постепенно и принимаемъ, что на основаніи формулы:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \Delta x \dots \dots \dots (206)$$

и пренебрегая безконечно-малой величиною $\epsilon \cdot \Delta x$ второго порядка, можно сказать, что съ приращеніемъ независимаго переменнаго иска на Δx функция $f(x)$ приращается на дифференциаль $f'(x) dx$. Въ разсматриваемомъ измѣненіи функции $F(x)$ съ приращеніемъ иска на dx , функция $F(x)$ приращается на дифференциаль $\varphi(x) dx$. Следовательно приращая x на dx , измѣнимъ $F(a)$ въ $F(a) + \varphi(a) dx$, приращая x еще на dx , получимъ:

$$F(a) + \varphi(a) dx + \varphi(a + dx) dx;$$

приращая x еще на dx , получимъ:

$$F(a) + \varphi(a) dx + \varphi(a + dx) dx + \varphi(a + 2dx) dx,$$

и ступая далѣе такимъ образомъ, измѣнимъ $F(a)$ на столько, что она приметъ величину $F(b)$, когда x увеличится столько приращеній, что сумма нѣхъ впрямую до величины $b - a$. Тогда получимъ:

$$F(a) + \varphi(a, dx) + \varphi(a + dx) dx + \varphi(a + 2dx) dx + \dots + \varphi(a + n \cdot dx) dx = F(b),$$

откуда:

$$F(b) - F(a) = \varphi(a) dx + \varphi(a + dx) dx + \varphi(a + 2dx) dx + \dots + \varphi(a + n \cdot dx) dx, \dots \dots \dots (404)$$

гдѣ число n очень велико.

Оставимъ предѣлы, до котораго доводимъ x переменнымъ, обозначая это просто чрезъ x , тогда вмѣсто (404), получимъ

$$F(x) - F(a) = \varphi(a) dx + \varphi(a + dx) dx + \varphi(a + 2dx) dx + \dots + \varphi(a + k \cdot dx) \cdot dx, \dots \dots \dots (405)$$

Но дифференцируя лѣвую часть (405)-го, получимъ (согласно сдѣлан-

ному въ началѣ нашего разсужденія условно $\varphi(x) dx$; следовательно

$$F(x) - F(a) = \int \varphi(x) dx. \dots \dots (406)$$

Сравнивая съ (401) видимъ, что $c = F(a)$. Главный же результатъ тотъ, что изъ (405) и (406) слѣдуетъ:

$$\int \varphi(x) dx = \varphi(a) dx + \varphi(a + dx) dx + \varphi(a + 2dx) dx + \dots + \varphi(a + k \cdot dx) dx = F(x) - F(a). \dots \dots (407)$$

Отсюда видно, что интегралъ можно разсматривать какъ сумму безконечно-большого числа безконечно-малыхъ членовъ.

Определенный интегралъ.

§ 251. Если сдѣлаемъ въ формулѣ (407), пределью до которой принимаемъ x , постояннымъ, равнымъ b то получимъ вполне определенную постоянную величину $F(b) - F(a)$, называемую *определеннымъ интеграломъ*. Видимъ въ предельномъ случаѣ a въ b и обозначаемъ такъ $\int_a^b =$ интегралъ отъ a до b . Такъ что:

$$\int_a^b \varphi(x) dx = F(b) - F(a) = \varphi(a) dx + \varphi(a + dx) dx + \varphi(a + 2dx) dx + \dots + \varphi(a + n dx) dx. \dots \dots (408)$$

Изъ этой формулы видно слѣдующее: чтобы получить определенный интегралъ въ предѣлахъ отъ a до b изъ неопределеннаго $F(x) + c$, надо въ неопределенномъ интегралѣ $F(x) + c$ замѣнить сначала x чрезъ b , потомъ въ немъ же замѣнить x чрезъ a и второй результатъ вычитать изъ первого.

Примеръ 1-ый. Мы видели, что $\int x^{m-1} dx = x^m + c$. Следовательно:

$$\int_a^b x^{m-1} dx = b^m - a^m.$$

Примеръ 2-ой. Мы видели, что $\int \cos x dx = \sin x + c$. Следовательно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Примеръ 3-ий. Изъ формулы (246) слѣдуетъ, что $\int \frac{dx}{x} = \log x + c$.

Следовательно,

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lg b \quad \lg a = \lg \frac{b}{a}$$

последний переходъ здѣсь сдѣланъ по правиламъ элементарной алгебры.

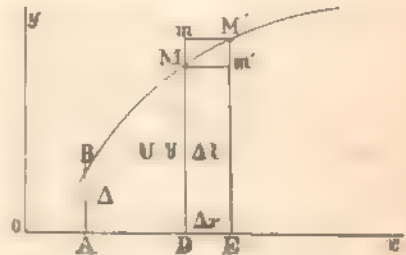
Теперь пояснимъ все сказанное объ интегралахъ геометрическими образами по предварительно познакомясь съ дифференціаломъ площади.

Дифференціалъ площади.

§ 252. Положимъ, что намъ дана кривая (фиг. 157) уравненіемъ

$$y = \varphi(x).$$

Издѣлюемъ величину площади $ABMD$, заключенной между ординатою AB кривую BM , ординатою MD и осью абсциссъ. Ординату DM обозначимъ чрезъ y и соответствующую ей абсциссу OD чрезъ x . Самую площадь $ABMD$ обозначимъ чрезъ u . Съ измѣненіемъ x измѣняется и величина площади u : когда x получаетъ приращеніе Δx , площадь u получаетъ приращеніе Δu , равное $DEM'M'$; ордината же получаетъ приращеніе Δy : такъ что: $EM' = y + \Delta y$. Продолжимъ ординату DM и проведемъ чрезъ M и M' параллели къ оси x . Сравнимъ площадь Δu съ площадями прямоугольникоу $DMm'E$ и $Dm'M'E$. Изъ чертежа видимъ, что:



Фиг. 157

$$DMm'E = y\Delta x; \quad DMM'E = \Delta u; \quad Dm'M'E = (y + \Delta y)\Delta x.$$

Площадь Δu больше одного и меньше другого изъ прямоугольникоу, такъ что:

$$(y + \Delta y)\Delta x > \Delta u > y \cdot \Delta x \dots \dots \dots (409)$$

Для члены этого равенства на Δx , получимъ:

$$y + \Delta y > \frac{\Delta u}{\Delta x} > y \dots \dots \dots (410)$$

Переходя къ предѣлу, при уменьшеніи Δx до нуля, видимъ, что величины, между которыми заключено $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, обѣ дѣлаются равными y . Следовательно:

$$\frac{du}{dx} = y \dots \dots \dots (411)$$

или *производная отъ площади по абсциссѣ равна кривой ординатѣ.*

Изъ (411) слѣдуетъ:

$$du = y \cdot dx \dots \dots \dots (412)$$

Подставляя сюда величину $\varphi(x)$ вместо y согласно уравнению кривой $y = \varphi(x)$, получим:

$$du = \varphi(x) dx.$$

Итак *дифференциал вида $\varphi(x) dx$ есть дифференциал площади кривой $y = \varphi(x)$* , при чем площадь эта ограничена двумя ординатами, осью абсцисс и кривою.

Интеграль какъ площадь.

§ 253. Интегрируя обѣ части равенства $du = \varphi(x) dx$, получимъ

$$\int du = \int \varphi(x) dx + C.$$

Здѣсь въ лѣвой части знаки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, и остается:

$$u = \int \varphi(x) dx + C = F(x) + C \quad . \quad . \quad (113)$$

Гдѣ $F(x)$ есть та функция дифференциал которой равенъ $\varphi(x) dx$.

Итакъ $\int \varphi(x) dx$ *выражаетъ собою площадь неопределенной величины, включенную между какою то ординатою AB и ординатою y ось абсцисс и кривою $y = \varphi(x)$.*

Если же мы условимся, что ордината AB соответствуетъ определенной абсциссѣ a , такъ что $OA = a$, то разсматривать можно такъ, при $x = a$ ордината y приравнивается высотному къ ординатѣ AB , вследствие чего при $x = a$, площадь $u = 0$. Поэтому изъ (113) получимъ

$$0 = F(a) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

откуда $C = -F(a)$. Вставивъ эту величину въ (113) получимъ

$$u = \int_a^x \varphi(x) dx = F(x) - F(a) \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

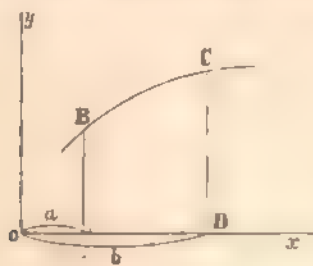
Здѣсь площадь u есть величина переменная потому что еще не дано постоянное значение для ординаты y или высоты.

Подставивъ въ (115) формулы $x = b$ получимъ

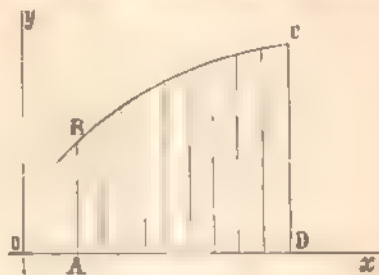
$$u = \int_a^b \varphi(x) dx = F(b) - F(a) \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

Площадь, выраженная этимъ *определеннымъ* интеграломъ есть уже величина постоянная (если a и b — постоянныя) — это площадь $ABCD$ (фиг. 188) кривой, взятой между определенными ординатами — ординатою AB , соответствующею $x = a$, и ординатою DC , соответствующею $x = b$.

Разделим отрезок AD на безконечно большое число безконечно малых частей, из каждой какой равнять бы dx , и проведем (фиг. 189) через точки деления ординаты. Площадь $ABCD$ окажется разбитою и тонкими полоски. Каждая такая полоска отличается весьма мало от прямоугольника, составленного из ее основания и одной из ограничиваю-



Фиг. 188.



Фиг. 189.

щих ее ординат, так что площади полосокъ будутъ приблизительно равны:

$$\varphi(a) dx, \varphi(a + dx) dx, \varphi(a + 2dx) dx$$

Складывая ихъ, получимъ площадь $ABCD$ Итакъ

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \varphi(a) \cdot dx + \varphi(a + dx) dx + \varphi(a + 2dx) dx + \dots = F(b) - F(a) \dots (117)$$

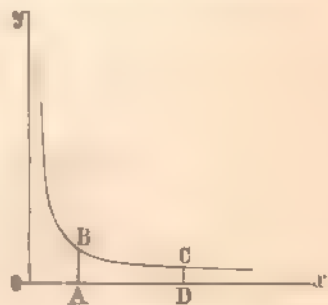
Пренебречь разность между площадью полоски и площадью соответствующаго ей прямоугольника это все равно, что пренебречь безконечно малю величиною второго порядка $\epsilon \cdot \Delta x$ въ уравнении

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \Delta x \dots (206)$$

Но по теоремѣ § 124, о такомъ пренебреженіи не влечетъ за собой ни малѣйшей ошибки при вычисленіи предѣла суммы, и потому интеграль

$$\int_a^b \varphi(x) dx$$

совершенно точно выражается суммою стоящею въ (117), площадь же $ABCD$ совершенно точно выражается этимъ интеграломъ.



Фиг. 190.

Примѣръ. Определить площадь $ABCD$ (фиг. 190), заключенную между кривою гиперболы $xy = 1$, отнесенной къ асимптотамъ (см. § 60 Форм. 96), осью

абсциссы, ординатой AB , взятой при $x = a$, и ординатой DC , взятой при $x = b$.

Изъ $xy = 1$ имѣемъ:

$$y \, dx = \frac{dx}{x} = \varphi(x) \, dx.$$

По сказанному выше:

$$ABCD = \int_a^b \varphi(x) \, dx = \int_a^b \frac{dx}{x}.$$

По (246) имѣемъ $d \lg x = \frac{dx}{x}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x} = \lg x + c.$$

Поэтому:

$$ABCD = \int_a^b \frac{dx}{x} = \lg b - \lg a.$$

Знакъ подстановки.

§ 254. Для насъ весьма удобно будетъ знакъ подстановки $[F(x)]_a^b$, который обозначаетъ, что надо взять разность отъ результата $F(b)$, подстановки въ $F(x)$ величины b вмѣсто x и результата, $F(a)$, подстановки въ $F(x)$ величины a вмѣсто x . Такъ что:

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \dots \dots \dots (418)$$

Пользуясь этимъ обозначеніемъ, можно написать:

$$\int_a^b \varphi(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Въ примѣрѣ предыдущаго параграфа мы могли бы написать:

$$ABCD = \int_a^b \frac{dx}{x} = [\lg x]_a^b = \lg b - \lg a$$

Основные формулы интегрированія.

§ 255. Выведенныя въ предыдущей главѣ формулы дифференціаловъ простыхъ функций даютъ слѣдующія формулы интеграловъ.

По (212) имѣемъ $d(u + v + w + \dots) = du + dv + dw \dots$. Следовательно:

$$\int [du + dv + dw + \dots] = u + v + w + \dots + c \dots (419)$$

или

$$\int [\varphi(x) + f(x) + F(x) + \dots] dx = \int \varphi(x) dx + \int f(x) dx + \int F(x) dx + \dots \dots \dots (420)$$

По (215) имеем $d(ax) = a dx$. Следовательно:

$$\int a dx = ax - a \int dx \dots \dots \dots (421)$$

постоянный множитель можно выносить из знака интеграла, так что

$$\int a \cdot \varphi(x) dx = a \int \varphi(x) dx \dots \dots \dots (422)$$

По (217) имеем $d(x^n) = nx^{n-1} dx$. Называя $n - 1$ чрез m , то есть полагая $n - 1 = m$, должны получить $n = m + 1$. По этому:

$$d(x^{m+1}) = (m + 1) x^m dx.$$

Следовательно:

$$\int (m + 1) x^m dx = x^{m+1}, \text{ или } (m + 1) \int x^m dx = x^{m+1}.$$

откуда:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m + 1} + c \dots \dots \dots (423)$$

По (246) имеем $d(\lg x) = \frac{dx}{x}$. Следовательно:

$$\int \frac{dx}{x} = \lg ax + c \dots \dots \dots (424)$$

По (247) имеем: $d(a^x) = a^x \cdot \lg a \cdot dx$. Следовательно:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\lg a} + c \dots \dots \dots (425)$$

По (248) имеем: $d(e^x) = e^x dx$. Следовательно:

$$\int e^x dx = e^x + c \dots \dots \dots (426)$$

По (220) имеем: $d(\sin x) = \cos x dx$. Следовательно:

$$\int \cos x dx = \sin x + c \dots \dots \dots (427)$$

По (221) имеем: $d(\cos x) = -\sin x \cdot dx$. Следовательно:

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c \dots \dots \dots (428)$$

По (223) имеем $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Следовательно:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \dots \dots \dots (429)$$

По (226) имеем $d(\operatorname{ar} \sin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Следовательно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{ar} \sin x + c \dots \dots \dots (430)$$

По (228) имеем $d(\operatorname{arccos} x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{arccos} x + c \dots \dots \dots (431)$$

По (230) имеем $d(\operatorname{artg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$. Следовательно:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{artg} x + c \dots \dots \dots (432)$$

Выделяем эти весьма важные формулы отдельно:

$$\int a \cdot \varphi(x) \cdot dx = a \int \varphi(x) dx + c \dots \dots \dots (422)$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \dots \dots \dots (423)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \operatorname{tg} x + c \dots \dots \dots (424)$$

$$\int e^x dx = e^x + c \dots \dots \dots (425)$$

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c \dots \dots \dots (428)$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + c \dots \dots \dots (427)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \dots \dots \dots (429)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{ar} \sin x + c \dots \dots \dots (430)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccos} x + c \dots \dots \dots (431)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{artg} x + c \dots \dots \dots (432)$$

Формула (423) не годится для $m = -1$, потому что она выведена изъ $d(x^m) = mx^{m-1} dx$, полагая въ нейъ $n = -1 - m$. Если $m = -1$, то вышло бы: $n = -1 - 1 = -2$, откуда $n = 0$, но $d(x^0) = d(1) = 0$, и отсюда нельзя перейти къ \int . Въ случаѣ $m = -1$ вмѣсто формулы (423) действуетъ формула (424), потому что:

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \lg x + c.$$

Формулы (422)–(432) надо знать наизусть.

Интегрированіе по частямъ.

§ 256. Мы еще не пользовали для вывода интегральныхъ формулъ дифференціальную формулу (216):

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du \dots \dots \dots (216)$$

потому что на ве дасть конечный интегралъ. Но, при ея помощи можно преобразовать данный интегралъ, и въ некоторыхъ случаяхъ такое преобразование облегчаетъ дальнейшій ходъ интегрированія. Называемся съ этимъ преобразованиемъ, и съ его помощью *интегрированіемъ по частямъ*.

Изъ (216) следуетъ, $u dv = d(uv) - v du$. Откуда

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \dots \dots \dots (433)$$

Применимъ эту формулу къ некоторымъ примѣрамъ.

Примѣръ 1-ый. Вычислить $\int x \cdot \cos x \cdot dx$.

Полагаемъ:

$$v = u \dots \dots \dots (434)$$

$$\cos x dx = dv \dots \dots \dots (435)$$

Интегрируя (434) и интегрируя по (427) равенство (435) и получимъ

$$du = dx$$

$$v = \sin x.$$

Вставляя эти величины u , dv , du , v въ (433), получимъ

$$\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx$$

Но по (428) имѣемъ $\int \sin x dx = -\cos x$. Следовательно

$$\int x \cdot \cos x \cdot dx = x \cdot \sin x + \cos x + c.$$

Примѣръ 2-ой. Вычислить $\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx$.

Полагаемъ $x^2 = u$, $\cos x dx = v$. Интегрируя 1-ое изъ этихъ ра-

венствъ и интегрируя 2-ое, получимъ $2x \, dx = du$, $\sin x = v$. Следовательно (433):

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \sin x \, dx.$$

Полагая опять въ последнемъ интегралѣ $x = a$; $\sin x \, dx = dv$ получаемъ: $dx = du$; $v = -\cos x$. Поэтому:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x.$$

Подставляя въ (436), получимъ:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c.$$

Примѣръ 3-й. Вычислить $\int x e^x \, dx$.

Полагаемъ $x = u$; $e^x \, dx = dv$, откуда: $dx = du$; $v = e^x$. Следовательно по (433):

$$\int x e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + c = e^x (x - 1) + c$$

Примѣръ 4-ый. Вычислить $\int \lg x \, dx$.

Интегрируя по частямъ, получимъ:

$$\int \lg x \cdot dx = x \cdot \lg x - \int x \frac{dx}{x} = x \lg x - x = x (\lg x - 1) + c$$

Интегрированіе подстановкою.

§ 257. Многие интегралы вычисляются при помощи *подстановки*, заключающейся въ замѣнѣ независимаго переменнаго. Покажемъ употребленіе этого способа на примѣрахъ.

Примѣръ 1-ый. $\int (ax + b)^m \, dx$. Положимъ: $ax + b = z$. Этимъ положеніемъ мы и вводимъ, вмѣсто x новое переменное z . Но намъ нужно будетъ все подынтегральное выраженіе выразить чрезъ z , такъ чтобы отъ x ничего въ немъ не оставалось. Следовательно нужно узнать какъ выражается dx чрезъ z и dz . Для этого дифференцируемъ то равенство $ax + b = z$, существованіе котораго предположили. Получаемъ $a \, dx = dz$ откуда $dx = \frac{dz}{a}$. Вставляя въ данный интегралъ, вмѣсто $ax + b$, переменное z , вмѣсто dx -величину $\frac{dz}{a}$, получимъ:

$$\int (ax + b)^m \, dx = \int z^m \frac{dz}{a} = \frac{1}{a} \int z^m \, dz.$$

Последній интегралъ беремъ по формулѣ (423). Получимъ

$$\int (ax + b)^m \, dx = \frac{z^{m+1}}{a(m+1)} + c.$$

Остается опять вернуться къ переменному x посредствомъ предполо-
женного равенства $ax + b = z$, и выведеннаго равенства $dz = a dx$.
Получимъ:

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{m+1}}{m+1} + C. \quad (437)$$

Усибъ зависить отъ удачнаго выбора подстановки. Въ этомъ примѣрѣ
формула (423) подсказываетъ удобство подстановки $ax + b = z$.

Примѣръ 2-ой. $\int \frac{ax^3 dx}{bx^4 + c}$. Здѣсь числитель только постоянными ве-
личинами отличается отъ дифференциала $4bx^3 dx$ знаменателя. Это обстоя-
тельство въ соединеніи съ формулою (421) подсказываетъ, что хорошо
было бы принять весь знаменатель за новое переменное z . Повидимому
удобна будетъ подстановка $bx^4 + c = z$, откуда $4bx^3 dx = dz$, следова-
тельно стоящая въ числитель величина $ax^3 dx$ равна $\frac{adz}{4b}$. Поэтому:

$$\int \frac{ax^3 dx}{bx^4 + c} = \int \frac{adz}{4b} = \frac{a}{4b} \int \frac{dz}{z} = \frac{a}{4b} \lg z = \frac{a}{4b} \lg (bx^4 + c) + C$$

Примѣръ 3-ий. $\int \frac{x dx}{(ax+b)^n}$. Дѣлаемъ подстановку $ax + b = z$, от-
куда: $dx = \frac{dz}{a}$; $x = \frac{z-b}{a}$. Получимъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(ax + b)^n} &= \int \frac{(z-b) dz}{a^2 z^n} = \int \frac{(z^2 - 2bz + b^2) dz}{a^2 z^n} \\ &= \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{z^2 dz}{z^n} - 2b \int \frac{z dz}{z^n} + b^2 \int \frac{dz}{z^n} \right] \\ &= \frac{1}{a^2} \left[\int z^{2-n} dz - 2b \int z^{1-n} dz + b^2 \int z^{-n} dz \right]. \end{aligned}$$

По формулѣ (423) получаемъ далѣе:

$$\int \frac{x^2 dx}{(ax + b)^n} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{z^{3-n}}{3-n} - \frac{2bz^{2-n}}{2-n} + \frac{b^2 z^{1-n}}{1-n} \right] + C.$$

Примѣръ 4-ий. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$. Дѣлая подстановку $\sqrt{a^2 + x^2} = z$, полу-
чимъ: $a^2 + x^2 = z^2$; $2x dx = 2z dz$; $x = \sqrt{z^2 - a^2}$; $x dx = z dz$.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{z dz}{z} = \int dz = z = \sqrt{a^2 + x^2} + C. \quad (438)$$

Примѣръ 5-ый $\int \frac{dx}{a + bx^2}$. Этотъ интегралъ похожъ на (432). Чтобы
получить въ знаменателѣ единицу + другой членъ преобразуемъ такъ:

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \int \frac{dx}{a \left(1 + \frac{bx^2}{a}\right)} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{1 + \frac{bx^2}{a}}$$

Делаем подстановку:

$$\frac{bx'}{a} = z$$

откуда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a+bx'}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{b}{\sqrt{a}} dx = dz; \quad dx = \frac{1}{b} \frac{a}{\sqrt{a}} dz \\ \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx'}} &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{b(1+z^2)}} dz = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} z = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} x. \end{aligned}$$

Итакъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx'}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} x \right) \dots \dots (439)$$

Обращение къ читателю.

§ 258. Читатель, изучавший математику до настоящего момента, может, при первом чтении, не делать соединенийъ въ концы книги и главы на интегрированіи, а, дочивая книгу до конца, потомъ снова перечитать параграфы, относящиеся къ интегрированію и тогда уже продолжать задачи. Ведь, къ намъ придется въ приложенияхъ брать интегралы, будутъ сделаны ссылки на предшествующую теорію и задачи и теоремы и теоремы разъяснены; такъ что не требуется особаго умѣнья интегрировать для пониманія приложений и интеграловъ по численія къ геометріи, механикѣ и проч. При первомъ чтении можно пропустить слѣдующіе 12 параграфовъ.

Интегрированіе дробей.

Интегрированіе рациональныхъ дробей въ случаѣ неравныхъ действительныхъ корней.

§ 259. Рациональною дробью называется такая, числитель и знаменатель которой суть рациональныя функции отъ x , то есть такія алгебраическія функции, въ которыхъ не содержится радикаловъ или i . Напримеръ:

$$\frac{Ax^5 + Bx^2 + C}{Dx^4 + Ex + M}$$

есть рациональная дробь.

Если нужно интегрировать дифференціалъ, представляющій собою произведеніе рациональной дроби на dx , то прежде всего обращаютъ вниманіе на то, не превосходитъ ли порядокъ числителя порядокъ знаменателя, и въ такомъ случаѣ дѣлятъ числитель на знаменатель, при этомъ въ частномъ получая цѣлую функцию и нѣкоторый остатокъ. Такъ что дробь окажется равною цѣлой части частнаго + $\frac{\text{остатокъ}}{\text{знаменатель}}$. Цѣлую часть

интегрируютъ какъ цѣлую функцію, и все цѣло приводится къ интегрированию дроби $\frac{\text{остатокъ}}{\text{знаменатель}}$, въ которой порядъ въ числителя менше порядка знаменателя. Итакъ, приходится разсматривать только интегрирование такихъ дробей $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, въ которыхъ порядкъ числителя менше порядка знаменателя.

Во введеніи указываемо, что всякая рациональная функція $f(x)$ можетъ быть представлена въ видѣ произведенія:

$$P(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k),$$

гдѣ a, b, c, \dots, k суть корни уравненія $f(x) = 0$.

Поэтому дробь $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ можно представить въ видѣ

$$P(x-a)(x-b)\dots(x-k) \frac{\varphi(x)}{(x-a)(x-b)\dots(x-k)},$$

и, такъ какъ коэффициенты P можно вывести изъ знака интеграла, представивъ интегралъ въ видѣ

$$\frac{1}{P} \int \frac{\varphi(x) dx}{(x-a)(x-b)\dots(x-k)},$$

то будемъ разсматривать интегрирование такихъ дробей $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, въ которыхъ

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k) \dots \dots (440)$$

Замѣтимъ сначала разсматриваемъ тотъ случай, когда $f(x)$ не содержитъ ни равныхъ ни мнимыхъ корней. Посмотримъ, нельзя ли разложить дробь $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ на сумму болѣе простыхъ дробей слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{K}{x-k} \dots \dots (441)$$

Помножимъ это равенство на $f(x)$. Получимъ

$$\varphi(x) = A \frac{f(x)}{x-a} + B \frac{f(x)}{x-b} + C \frac{f(x)}{x-c} + \dots + K \frac{f(x)}{x-k},$$

внося сюда вмѣсто $f(x)$ его выраженіе (440), получимъ

$$\varphi(x) = A \frac{(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k)}{(x-a)}$$

$$+ B \frac{(x-a)(x-b)\dots(x-k)}{x-b} + \dots + K \frac{(x-a)(x-b)\dots(x-k)}{x-k}.$$

Положивъ въ этомъ равенствѣ $x = a$ замѣтимъ, что все члены правой его части кромѣ перваго обратятся въ 0, потому что въ нихъ $(x-a)$ не сокращается, но при $x = a$ обращается въ нуль. Первый же членъ

по сокращеніи на $(x - a)$ будетъ:

$$A(a - b)(a - c) \dots (a - k) \dots \dots \dots (442)$$

и получимъ:

$$\varphi(a) = A(a - b)(a - c) \dots (a - k) \dots \dots \dots (443)$$

Возьмемъ производную отъ $f(x)$ получимъ:

$$f'(x) = (x - b)(x - c) \dots (x - k) + (x - a)(x - c) \dots (x - k) + \dots$$

по формулѣ:

$$d(uvw \dots) = vw du + uv dv + \dots$$

приведенной въ концѣ § 130; слѣдовательно.

$$f'(a) = (a - b)(a - c) \dots (a - k) \dots \dots \dots (444)$$

остальные же члены, какъ содержащіе $(x - a)$ множителемъ, обратятся при $x = a$ въ нуль. (равнивая (443) съ (444) имѣемъ.

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} \dots \dots \dots (445)$$

Совершенно такъ же можно доказать, что въ (441).

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}; C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)} \dots K = \frac{\varphi(k)}{f'(k)} \dots \dots \dots (446)$$

Значитъ равенство (441) не только возможно, но мы научились даже находить такіе коэффициенты A, B, C, \dots которые именно дѣлали бы его возможнымъ. Разложить дробь $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ такъ, какъ это указано равенствомъ (441), значитъ *разложить ее на простыя дроби*. Оказывается, что, *Дроби знаменатель которой не имѣетъ ни равныхъ, ни мнимыхъ корней, разлагается на сумму такихъ простыхъ дробей, знаменатели которыхъ суть разности отъ переменнаго и одного изъ корней, числители же определяются формулами (445) и (446).*

Но $\int \frac{A dx}{(x - a)} = A \lg(x - a) + C$, какъ не трудно убѣдиться, интегрируя при помощи подстановки $x - a = z$. Слѣдовательно, получимъ:

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{f(x)} = \int \frac{A dx}{(x - a)} + \int \frac{B dx}{(x - b)} + \int \frac{C dx}{(x - c)} + \dots + \int \frac{K dx}{(x - k)}$$

откуда:

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{f(x)} = A \lg(x - a) + B \lg(x - b) + C \lg(x - c) + \dots + K \lg(x - k) \dots \dots \dots (447)$$

Примеръ 1-ый $\int \frac{(8x - 13) dx}{x^2 - 3x + 2}$. Узнаемъ прежде всего корни знаменателя. Рѣшивъ уравненіе $x^2 - 3x + 2 = 0$, находимъ:

$$a = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = 2;$$

$$b = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = 1;$$

Слѣдовательно,

$$\int \frac{(8x - 13) dx}{x^2 - 3x + 2} = \int \frac{(8x - 13) dx}{(x - 2)(x - 1)}.$$

По формуламъ (445) и (446) определяемъ, замѣчая, что

$$f'(x) = (x - 2) + (x - 1); \quad \varphi(x) = 8x - 13$$

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{[8a - 13]}{(a - 2) + (a - 1)} = \frac{8 \cdot 2 - 13}{(2 - 2) + (2 - 1)} = 3$$

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{[8b - 13]}{(b - 2) + (b - 1)} = \frac{8 \cdot 1 - 13}{(1 - 2) + (1 - 1)} = 5$$

Теперь по формулѣ (447) имѣемъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{(8x - 13) dx}{x^2 - 3x + 2} &= 3 \lg(x - 2) + 5 \lg(x - 1) \\ &= \lg [(x - 2)^3 (x - 1)^5] + C. \end{aligned}$$

Последній переходъ сдѣланъ по правиламъ элементарной алгебры и прибавлено постоянное интегрир. Замѣтимъ, что вычисленная

$$f'(x) = (x - 2) + (x - 1) = 2x - 3$$

равна, безъ сомнѣнія, той, которая прямо получается дифференцированіемъ знаменателя.

Примеръ 2-ой. $\int \frac{x + 13}{x^2 - 9x + 14} dx$. Вычисляемъ.

$$a = \frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - 14} = 7; \quad b = \frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - 14} = 2$$

$$\varphi(x) = x + 13$$

$$f(x) = (x - 7)(x - 2)$$

$$f'(x) = (x - 7) + (x - 2),$$

или прямо:

$$\frac{d(x^2 - 9x + 14)}{dx} = 2x - 9$$

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{7+13}{7-2} = 4; \quad B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{2+13}{2-7} = -3$$

$$\int \frac{(x+13) dx}{x^2-9x+11} = 4 \lg(x-7) - 3 \lg(x-2) = \lg \left[\frac{(x+1)^4}{(x-2)^3} \right] + C.$$

Примеръ 3-ий. $\int \frac{9-5x dx}{x-1(x-2)(x-3)}$

$$\varphi(x) = 9 - 5x$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$$

$$a = 1; \quad b = 2; \quad c = 3$$

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{9-5}{(1-2)(1-3)} = 2$$

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{9-5 \cdot 2}{(2-1)(2-3)} = -1$$

$$C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)} = \frac{9-5 \cdot 3}{(3-1)(3-2)} = -3$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(9-5x) dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= 2 \lg(x-1) + \lg(x-2) - 3 \lg(x-3) \\ &= \lg \left[\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-3)^3} \right] + C. \end{aligned}$$

Интегрирование рациональной дроби, если корни неравные, но некоторые изъ нихъ мнимые.

§ 260. Мы уже видели во введении, что мнимые корни функции встречаются въ ней парно: если есть корень вида

$$a = \alpha + \beta \sqrt{-1}, \dots \dots \dots (148)$$

то долженъ существовать и сопряженный ему корень:

$$b = \alpha - \beta \sqrt{-1}. \dots \dots \dots (149)$$

Если встретятся мнимые корни, то для нихъ

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{\varphi(\alpha + \beta \sqrt{-1})}{f'(\alpha + \beta \sqrt{-1})},$$

и это приведется къ виду $M + N \sqrt{-1}$

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{\varphi(\alpha - \beta \sqrt{-1})}{f'(\alpha - \beta \sqrt{-1})}$$

и это приведется къ $M - N \sqrt{-1}$,

где M и N суть некоторые величины, составленные из α и β . Простая дробь, соответствующая сопряженным корням, имеет вид

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{M+N\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta i} + \frac{M-N\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta i} =$$

$$\frac{(M+N)(x-\alpha+\beta i) + (M-N)(x-\alpha-\beta i)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} =$$

$$= \frac{2M(x-\alpha) - 2N\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Часть интеграла той дроби, в знаменателе которой являются мнимые корни α и b , соответствующая имъ, будетъ

$$\int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) dx = \int \frac{2M(x-\alpha) dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} +$$

$$\int \frac{2N\beta dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \dots \dots \dots (150)$$

Оставимъ вать эти два интеграла $\int \frac{2M(x-\alpha) dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$ вычисляемъ подстановкою.

$$(x-\alpha)^2 + \beta^2 = z$$

откуда

$$2(x-\alpha) dx = z dz.$$

Вследствие чего

$$\int \frac{2M(x-\alpha) dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = 2M \int \frac{z dz}{z} = 2M \int \frac{dz}{z} = 2M \lg \dots$$

наконецъ:

$$\int \frac{2M(x-\alpha) dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = 2M \lg \sqrt{(x-\alpha)^2 + \beta^2} =$$

$$= M \lg [(x-\alpha)^2 + \beta^2] \dots \dots \dots (151)$$

Вычисляемъ теперь дробь, оказавшаяся в нашей задаче, интегрируя $\int \frac{2N\beta dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$. Представимъ его такъ

$$2 \int \frac{N\beta dx}{\beta^2 \left[1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta} \right)^2 \right]}$$

Делаемъ подстановку $\frac{x-\alpha}{\beta} = z$ тогда $dx = \beta z$. Следовательно

$$2 \int \frac{N\beta dx}{\beta^2 \left[1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta} \right)^2 \right]} = 2 \int \frac{N\beta dz}{\beta^2 (1+z^2)} = 2N \int \frac{dz}{1+z^2} = 2N \operatorname{arctg} z$$

Следовательно:

$$\int \frac{2N\beta dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = 2N \operatorname{arctg} \left(\frac{x-\alpha}{\beta} \right). \dots \dots (452)$$

Подставляя вычисленные интегралы (451) и (452) в (450), получим:

$$\int \left[\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right] dx = M \lg |(x-\alpha)^2 + \beta^2| - 2N \operatorname{arctg} \left(\frac{x-\alpha}{\beta} \right), \dots \dots (453)$$

где M и N — суть действительная и мнимая части выражений $\frac{\varphi(a)}{f'(a)}$, $\frac{\varphi(b)}{f'(b)}$.

Пример 1-ый. $\int \frac{x dx}{x^2 - 4x + 13}$. Из $x^2 - 4x + 13 = 0$ вычисляем:

$$a = 2 + \sqrt{4 - 13} = 2 + 3\sqrt{-1}$$

$$b = 2 - \sqrt{4 - 13} = 2 - 3\sqrt{-1}.$$

Следовательно: $\alpha = 2$; $\beta = 3$. Далее: $f'(x) = 2x - 4$; $\varphi(x) = x$.

$$M = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{2 + 3\sqrt{-1}}{1 + 6\sqrt{-1}} = \frac{2 + 3\sqrt{-1}}{6\sqrt{-1}}$$

Помножив числитель и знаменатель на $\sqrt{-1}$, получим:

$$\frac{2\sqrt{-1}}{6} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{-1}.$$

Отсюда уже видим, что:

$$M = \frac{1}{2}; \quad N = \frac{1}{3}.$$

Следовательно по (453):

$$\int \frac{x dx}{x^2 - 4x + 13} = \frac{1}{2} \lg |(x-2)^2 + 9| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-2}{3} \right).$$

Если бы вычислили B (без чего оказалось возможным здесь обойтись, если прям) пользоваться готовою формулою (453), то получили бы

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{2 - 3\sqrt{-1}}{1 - 6\sqrt{-1}} = \frac{2\sqrt{-1}}{6} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{-1}.$$

Пример 2-ой. $\int \frac{x dx}{x - (x + \beta\sqrt{-1})} [x - (\alpha - \beta\sqrt{-1})]$.

$$a = \alpha + \beta\sqrt{-1}; \quad b = \alpha - \beta\sqrt{-1};$$

$$f(x) = [x - (\alpha + \beta\sqrt{-1})] [x - (\alpha - \beta\sqrt{-1})]$$

$$f'(x) = [x - (\alpha + \beta\sqrt{-1})] + [x - (\alpha - \beta\sqrt{-1})];$$

$$\varphi(x) = x.$$

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{\alpha + \beta \sqrt{-1}}{\alpha + \beta \sqrt{-1}} = \frac{\alpha + \beta \sqrt{-1}}{2\beta \sqrt{-1}}$$

$$= \frac{\alpha \sqrt{-1} - \beta}{-2\beta} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta} \sqrt{-1}$$

$$M = \frac{1}{2}; \quad N = \frac{\alpha}{2\beta} \sqrt{-1}$$

$$\int \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x - 2)} = \frac{1}{2} \lg |(x^2 + 1)(x - 2)| - \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{artg} \left(\frac{x - a}{\beta} \right).$$

Примирь 3-йя. $\int \frac{(x^2 + x - 1) \, dx}{(x^2 + 1)(x - 2)}$. Здѣсь:

$$\varphi(x) = x^2 + x - 1;$$

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 + x - 2;$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1; \quad a = +\sqrt{-1};$$

$$b = -\sqrt{-1}; \quad c = 2; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1.$$

(Корни a, b, c непосредственно видны въ заданіи).

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{a^2 + a - 1}{3a^2 - 4a + 1} = \frac{1 + \sqrt{-1} - 1}{3 - 4\sqrt{-1} + 1} = \frac{2\sqrt{-1}}{2 + 4\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{-1})(1 - 2\sqrt{-1})}{2(1 + 2\sqrt{-1})(1 - 2\sqrt{-1})} = \frac{2 - \sqrt{-1} - 4\sqrt{-1} - 2}{2(1 + 2)}$$

$$= \frac{5\sqrt{-1}}{10} = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}.$$

Слѣдовательно,

$$M = 0; \quad N = \frac{1}{2}; \quad B = +\frac{1}{2}\sqrt{-1}$$

$$C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)} = \frac{\varphi(2)}{f'(2)} = \frac{4 + 2 - 1}{12 - 8 + 1} = \frac{5}{5} = 1.$$

Итакъ:

$$\int \frac{(x^2 + x - 1) \, dx}{(x^2 + 1)(x - 2)} = \int \left[\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} \right] dx.$$

Далѣе по (453):

$$\int \left[\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} \right] dx = \operatorname{artg} x.$$

Затѣмъ по (447):

$$\int \frac{C dx}{x - c} = \lg(x - c).$$

Поэтому:

$$\int \frac{(x^2 + x - 1) dx}{(x^2 + 1)(x - 2)} = \operatorname{arctg} x + \lg(x - 2).$$

Интегрирование рациональныхъ дробей въ случаѣ равныхъ корней.

§ 261. Если въ знаменателѣ $f(x)$ дроби $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ находится кратный корень, например, если $f(x) = (x - a)^p \psi(x)$, гдѣ $\psi(x)$ обозначаетъ произведение остальныхъ множителей, то полагаемъ

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x - a)} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \frac{A_3}{(x - a)^3} + \dots + \frac{A_p}{(x - a)^p} + \frac{F(x)}{\psi(x)}$$

гдѣ $F(x)$ некоторая функция. Помноживъ обѣ части этого равенства на $f(x)$, которая по предположенію равна $(x - a)^p \psi(x)$, получимъ

$$\varphi(x) = \frac{A_1 (x - a)^{p-1} \psi(x)}{(x - a)} + \frac{A_2 (x - a)^{p-2} \psi(x)}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_p (x - a)^0 \psi(x)}{(x - a)^p} + \frac{F(x) (x - a)^p \psi(x)}{\psi(x)}$$

или:

$$\varphi(x) = A_1 \psi(x) \cdot (x - a)^{p-1} + A_2 \psi(x) \cdot (x - a)^{p-2} + \dots + A_p \psi(x) + F(x) \cdot (x - a)^p \dots \dots \dots (454)$$

Дифференцируя это уравненіе $(p - 1)$ разъ и полагая $x = a$, получимъ p уравненій для опредѣленія p величинъ: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p$. Вставляя ихъ въ (454), получимъ часть:

$$\int \frac{A_1 dx}{x - a} + \int \frac{A_2 dx}{(x - a)^2} + \dots + \int \frac{A_p dx}{(x - a)^p}$$

даннаго интеграла. Съ остальной частью $\int \frac{F(x) dx}{\psi(x)}$ поступаемъ такъ же, то есть вообще, въ случаѣ:

$$f(x) = (x - a)^p (x - a)^q \dots (x - k),$$

полагаемъ:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = & \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_p}{(x - a)^p} \\ & + \frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \dots + \frac{B_q}{(x - b)^q} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{K}{x - k}. \end{aligned}$$

Получится сумма интеграловъ вида $\int \frac{A dx}{(x-a)^m}$, который берется подстановкою $(x-a) = z$; откуда:

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^m} = \int \frac{A dz}{z^m} = \int A z^{-m} dz = \frac{A z^{1-m}}{1-m} = \frac{A (x-a)^{1-m}}{1-m}.$$

Примѣръ. $\int \frac{dx}{(x-1)^2 (x-2)}$. Примѣмъ:

$$a = 1, \quad b = 2; \quad \varphi(x) = 1, \quad \varphi'(x) = 0.$$

Полагаемъ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{(x-1)^2 (x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-2}.$$

Откуда:

$$\varphi(x) = A_1(x-1)(x-2) + A_2(x-2) + B(x-1)^2 = 1$$

$$\varphi'(x) = A_1(x-1) + A_1(x-2) + A_2 + 2B(x-1) = 0, \quad (156)$$

$$\varphi(a) = \varphi(1) = 1 = A_2(1-2) = -A_2$$

$$\varphi'(a) = \varphi'(1) = 0 = A_1(1-2) + A_2 = -A_1 + A_2.$$

Слѣдовательно:

$$A_1 = A_2 = -1.$$

Для вычисления B удобнее всего положить въ (156)-омъ $x = 2$. Получимъ:

$$\varphi'(2) = 0 = A_1(2-1) + A_1(2-2) + A_2 + 2B(2-1)$$

или $0 = -1 - 1 + 2B$; откуда $B = 1$.

Слѣдовательно:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)^2 (x-2)} &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-2} \\ &= \lg(x-1) + \frac{1}{x-1} + \lg(x-2) = \lg \frac{x-2}{x-1} + \frac{1}{x-1} + C. \end{aligned}$$

Интегрирование рациональной дроби въ случаѣ равныхъ мнимыхъ корней.

§ 262. Если кратный корень окажется мнимымъ, то ему найдется и сопряженный корень той же кратности. Въ такомъ случаѣ поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Пусть мнимые сопряженные корни кратности p суть: $a = \alpha + \beta \sqrt{-1}$; $b = \alpha - \beta \sqrt{-1}$, такъ что знаменатель дроби имѣетъ видъ:

$$f(x) = [(x - (\alpha + \beta \sqrt{-1}))^p (x - (\alpha - \beta \sqrt{-1}))^p] \psi(x)$$

Перемножая количества, стоящая въ скобкахъ правой части, получимъ:

$$f(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2] \psi(x).$$

Полагаемъ:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} &= \frac{(A_1x + B_1)}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{A_2x + B_2}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^2} + \dots \\ &+ \frac{A_px + B_p}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^p} + \frac{F(x)}{\psi(x)}. \end{aligned}$$

Помножая обѣ части этого равенства на $f(x)$, получимъ:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (A_1x + B_1) \psi(x) [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{p-1} \\ &+ (A_2x + B_2) \psi(x) [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{p-2} + \dots \\ &+ (A_px + B_p) \psi(x) + F(x) [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^p. \end{aligned}$$

Коэффициенты $A_1, A_2, A_3, \dots, B_1, B_2, B_3, \dots$ определяются изъ этого уравнения и изъ его $(p - 1)$ производныхъ, полагая въ нихъ

$$x = \alpha + \beta \sqrt{-1}$$

и приравнивая действительная части действительнымъ, а мнимая мнимымъ. Въ остальномъ все происходитъ какъ и въ § 261, только теперь приходится имѣть дѣло съ интегралами вида:

$$\int \frac{(Ax + B) dx}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^n} \dots \dots \dots (457)$$

Этотъ интегралъ мы и должны изучить. Дѣлаемъ подстановку $x - \alpha = z$. Получимъ, вмѣсто (457):

$$\int \frac{(Az + A\alpha + B) dz}{[z^2 + \beta^2]^n} \dots \dots \dots (458)$$

Разбиваемъ его на два интеграла слѣдующимъ образомъ:

$$\int \frac{(Az + A\alpha + B) dz}{(z^2 + \beta^2)^n} = \int \frac{Az dz}{(z^2 + \beta^2)^n} + \int \frac{(A\alpha + B) dz}{(z^2 + \beta^2)^n}.$$

Изучаемъ каждый изъ интеграловъ правой части отдѣльно. $\int \frac{Az dz}{(z^2 + \beta^2)^n}$ подстановкою $z^2 + \beta^2 = y^2$ приводится къ

$$\begin{aligned} \int \frac{Ay dy}{y^{2n}} &= \int \frac{A dy}{y^{2n-1}} = \int Ay^{-2n+1} dy = \frac{Ay^{-2n+2}}{-2n+2} = \frac{A(y^2)^{-n+1}}{2(n-1)} \\ &= \frac{A}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(z^2 + \beta^2)^n} \dots \dots \dots (459) \end{aligned}$$

Остается рассмотреть:

$$\int \frac{(A\alpha + B) dz}{(z^2 + \beta^2)^n},$$

который равенъ

$$(A\alpha + B) \int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^n}.$$

Здѣсь пока не будемъ заботиться о множителѣ $Ax + B$, а остановимся на $\int \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)^n}$. Сначала дѣлаемъ такія простыя преобразованія:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)^n} &= \frac{1}{\beta^2} \int \frac{\beta^2 dx}{(x^2 + \beta^2)^n} = \frac{1}{\beta^2} \int \frac{(\beta^2 + x^2 - x^2) dx}{(x^2 + \beta^2)^n} \\ &= \frac{1}{\beta^2} \int \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)^{n-1}} - \frac{1}{\beta^2} \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + \beta^2)^n} \dots \dots \dots (460) \end{aligned}$$

Последній интегралъ интегрируемъ по частямъ такъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + \beta^2)^n} &= \int x \cdot \frac{x dx}{(x^2 + \beta^2)^n} = \int x \cdot d \left[\frac{1}{2(n-1)(x^2 + \beta^2)^{n-1}} \right] \\ &= - \frac{x}{2(n-1)(x^2 + \beta^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Вставляя это значеніе интеграла $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + \beta^2)^n}$ въ (460), получимъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)^n} &= \frac{1}{\beta^2} \int \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)^{n-1}} + \frac{x}{\beta^2 2(n-1)(x^2 + \beta^2)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2\beta^2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)^{n-1}} + \frac{x}{2\beta^2(n-1)(x^2 + \beta^2)^{n-1}} \\ &+ \frac{2n-3}{2\beta^2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)^{n-1}} \dots \dots \dots (461) \end{aligned}$$

Мы привели $\int \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)^n}$ къ $\int \frac{dx}{(x^2 + \beta^2)^{n-1}}$, въ которомъ знаменатель дроби уже не n -ой, но $(n-1)$ -ой степени. Понижая такимъ же способомъ степень знаменателя еще и еще, дойдемъ до $\int \frac{dx}{x^2 + \beta^2}$, который по (139), полагая въ ней $x = z$, $a = \beta^2$, $b = 1$, равенъ:

$$\frac{1}{\beta} \operatorname{artg} \left(\frac{x}{\beta} \right).$$

Примѣръ 1-ый. $\int \frac{(x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 9x + 4) dx}{(x^2 - 2x + 2)^2 (x-1)}$.

Прежде всего, для разложенія знаменателя на множители, рѣшимъ уравненіе $x^2 - 2x + 2 = 0$. Получимъ $x = 1 \pm i$. Следовательно:

$$x^2 - 2x + 2 = (x - (1 + i))(x - (1 - i)).$$

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 9x + 4}{(x - (1 + i) - 1)^2 [x - (1 - i)]^2 (x - 1)}$$

$$= \frac{A_1 x + B_1}{(x - 1)^2 + 1} + \frac{A_2 x + B_2}{[(x - 1)^2 + 1]^2} + \frac{C}{x - 1}.$$

$$\varphi(x) = (A_1x + B_1)[(x-1)^2 + 1] + (A_2x + B_2)(x-1) + C[(x-1)^2 + 1]^2 = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 9x + 4. \quad (462)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (A_1x + B_1)[(x-1)^2 + 1]' + [(x-1)(A_1x + B_1)(x-1)]' \\ &+ A_1[(x-1)^2 + 1]'(x-1) + A_2x + B_2 + A_2(x-1) \\ &+ 2[(x-1)^2 + 1]2(x-1) = 4x^3 - 12x^2 + 18x - 9. \end{aligned}$$

Подставив сюда $x = 1 + \sqrt{-1}$, замѣтимъ, что всѣ члены, содержащіе $[(x-1)^2 + 1]$, обратятся въ 0, потому что

$$[(x-1)^2 + 1] = [x^2 - (1 + \sqrt{-1})x + (1 - \sqrt{-1}) - 1],$$

Подготовимъ:

$$(1 + \sqrt{-1})^2 = 1 - 1 + 2\sqrt{-1}$$

$$(1 + \sqrt{-1})^3 = 2\sqrt{-1} - 1(1 + \sqrt{-1}) = 2\sqrt{-1} - 1 - \sqrt{-1}$$

$$(1 + \sqrt{-1})^4 = (2\sqrt{-1} - 1)^2 = -4.$$

Зная, что члены, содержащіе $[(x-1)^2 + 1]$, нечего и вычислять, потому что они при $x = 1 + \sqrt{-1}$ обращаются въ нуль, вычисляемъ

$$\begin{aligned} \varphi(1 + \sqrt{-1}) &= [A_2(1 + \sqrt{-1}) + B_2](\sqrt{-1}) \\ &= 1 - 8\sqrt{-1} - 1 + 8 + 18\sqrt{-1} - 1 - 9 - 9\sqrt{-1} - 1 + 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(1 + \sqrt{-1}) &= 2[A_1(1 + \sqrt{-1}) + B_1] + A_2(1 + \sqrt{-1}) \\ &+ B_2 + A_2\sqrt{-1} = 8\sqrt{-1} - 1 - 8 - 2\sqrt{-1} - 1 + 18 + 18\sqrt{-1} - 1 - 9. \end{aligned}$$

Замѣчая, что

$$[A_2(1 + \sqrt{-1}) + B_2]\sqrt{-1} = A_2\sqrt{-1} - 1 = A_2 + B_2\sqrt{-1} - 1$$

и отдѣляя мнимыя части отъ действительныхъ, получимъ

$$(A_2 + B_2)\sqrt{-1} - 1 = A_2 = 1 - 1 = 0.$$

$$(A_2 - 2A_1 + A_2)\sqrt{-1} - 1 + A_2 - 2A_1 - 2B_1 + B_2 = 2\sqrt{-1} - 1 + 1$$

Такія величины могутъ быть равны только въ томъ случаѣ, если действительныя ихъ части равны действительнымъ, мнимыя — мнимымъ (слѣдовательно:

$$A_2 + B_2 = 1; \quad 2A_2 - 2A_1 = 2.$$

$$A_2 = 1; \quad A_2 - 2A_1 - 2B_1 + B_2 = 1.$$

Отсюда:

$$A_2 = 1; \quad B_2 = 0; \quad A_1 = 0; \quad B_1 = 0.$$

Для опредѣленія C положимъ $x = 1$ въ (462). Сначала вставимъ въ (462) найденныя величины A_1, A_2, B_1, B_2 . Получимъ:

$$A_2x^4 + C[(x-1)^2 + 1]^2 = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 9x + 4.$$

Полагая здесь $x = 1$, получимъ:

$$C = 1 - 1 + 9 - 9 + 1 = 1.$$

Итакъ:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{x}{(x-1)^2 + 1} + \frac{1}{x-1}.$$

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{f(x)} = \int \frac{x dx}{(x-1)^2 + 1} + \int \frac{dx}{x-1}.$$

Полагая $x - 1 = z$, получимъ:

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{f(x)} = \int \frac{z dz}{z^2 + 1} + \int \frac{dz}{z^2 + 1} + \int \frac{dz}{z}. \quad (463)$$

По (459):

$$\int \frac{z dz}{z^2 + 1} = -\frac{1}{2(z^2 + 1)} + \dots \quad (464)$$

По (461):

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{z}{2(z^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

Но по (432):

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \text{artg } z.$$

Слѣдовательно:

$$\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} = \frac{z}{2(z^2 + 1)} + \frac{1}{2} \text{artg } z. \quad (465)$$

Кромѣ того по (424):

$$\int \frac{dz}{z} = \text{lg } z.$$

Складывая этотъ интегралъ съ (465) и (464), согласно (463), получимъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{\varphi(x) dx}{f(x)} &= -\frac{1}{2(z^2 + 1)} + \frac{z}{2(z^2 + 1)} + \frac{1}{2} \text{artg } z + \text{lg } z \\ &= \frac{z - 1}{2(z^2 + 1)} + \frac{1}{2} \text{artg } z + \text{lg } z. \end{aligned}$$

Припомнимъ, что мы положили $z = x - 1$, получимъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 9x + 1) dx}{(x^2 - 2x + 2)^2 (x - 1)} &= \frac{x - 2}{2(x^2 - 2x + 2)} \\ &+ \frac{1}{2} \text{artg } (x - 1) + \text{lg } (x - 1) + C. \end{aligned}$$

Здѣсь чрезъ C мы обозначили обыкновенное постоянное интегрирующее

Примѣръ 2-ой. $\int \frac{ds}{(s^2 + 1)^2}$.

По (461) имѣемъ:

$$\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} = \frac{z}{4(z^2 + 1)} + \frac{3}{4} \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^2}.$$

По (461) имѣемъ:

$$\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} = \frac{z}{2(z^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

По (432) имѣемъ:

$$\int \frac{ds}{s^2 + 1} = \text{artg } s.$$

Соединяя всё эти выводы, получимъ:

$$\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} = \frac{z}{4(z^2 + 1)^2} + \frac{3z}{8(z^2 + 1)} + \frac{3}{8} \text{artg } z.$$

Интегрированіе функцій, содержащихъ радикалы.

Подъ корнями находятся только одночлены.

§ 263. Если въ подынтегральномъ выраженіи находятся радикалы подъ одночленами, содержащими переменное, то всегда можно выбрать такую подстановку, которая уничтожаетъ радикалы (корни). Покажемъ это на слѣдующемъ примѣрѣ. Положимъ, что требуется вычислить

$$\int \frac{(1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}) dx}{1 + \sqrt[4]{x}}.$$

Замѣняемъ корни дробными степенями. Получимъ

$$\int \frac{(1 + x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}) dx}{1 + x^{\frac{1}{4}}}.$$

Общій знаменатель у дробныхъ показателей здѣсь — 6. Дѣлаемъ подстановку $x = z^6$, откуда $dx = 6z^5 dz$. Получимъ:

$$\int \frac{(1 + z^3 - z^4) 6z^5 dz}{1 + z^2}.$$

Дѣло приведено къ интегралу, вычисляемому по правиламъ интегрированія дробей, изложеннымъ въ предыдущихъ параграфахъ.

Подъ радикалами находятся двучлены первого порядка.

§ 264. Подобнымъ же образомъ вычисляются интегралы, содержащіе радикалы надъ двучленами вида $ax + b$. Напримѣръ:

$$\int \frac{x + \sqrt{ax + b}}{x^2 - \sqrt{ax + b}} dx$$

вычисляется постановкою $ax + b = z^2$.

Преобразуемъ данный интегралъ въ:

$$\int \frac{[x + (ax + b)^{\frac{1}{2}}] dx}{x^2 - (ax + b)^{\frac{1}{2}}}$$

Постановка $ax + b = z^2$ дастъ:

$$dx = \frac{2z dz}{a}; \quad x = \frac{z^2 - b}{a}$$

Получимъ:

$$\int \frac{\left[\frac{z^2 - b}{a} + z \right] \frac{2z dz}{a}}{\left(\frac{z^2 - b}{a} \right)^2 - z^2}$$

который затѣмъ можно вычислить по правиламъ интегрирования дробей.

Дифференціалы, заключающіе въ себѣ квадратный корень $\sqrt{a + bx + cx^2}$.

§ 265. Если въ интегрируемомъ дифференціалѣ заключается

$$\sqrt{a + bx + cx^2},$$

то впервыхъ всегда можно вывести коэффициентъ c за радикала, такъ

$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \sqrt{c} \sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x + x^2},$$

Поэтому достаточно рассмотреть только радикалы вида $\sqrt{a + bx \pm x^2}$, въ которомъ коэффициентъ при x^2 равенъ $+1$ или -1 .

1-ый случай. $\sqrt{a + bx + x^2}$ — здѣсь x^2 стоитъ со знакомъ $+$
Дѣлаемъ постановку полагая:

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x \dots \dots \dots (466)$$

Возводя обѣ части этого равенства въ квадратъ, получимъ:

$$a + bx + x^2 = z^2 - 2zx + x^2,$$

откуда:

$$a + bx = z^2 - 2zx,$$

отсюда:

$$x = \frac{z^2 - a}{b + 2z} \dots \dots \dots (467)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \int \frac{z^2 - a}{(b + 2z)^2} dz = \frac{z^2 - a}{b + 2z} = \frac{a + bz + z^2}{b + 2z} \dots (468)$$

$$dx \left[\frac{(b + 2z) 2z - (z^2 - a) 2}{(b + 2z)^2} \right] dz = \frac{(a + bz + z^2) 2 dz}{(b + 2z)^2} \dots (469)$$

Подставивъ въ данный интегралъ, вмѣсто величины x : $dx \sqrt{a + bx + x^2}$, ихъ выражения чрезъ z , данныя формулами (467), (468), (469), избавимся отъ радикала.

Примѣръ $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}$. По формуламъ (467), (468), (469) приведемъ данный интегралъ къ виду.

$$\int \frac{(a + bz + z^2) 2 dz}{(a + bz + z^2)(b + 2z)^2} = \int \frac{2 dz}{b + 2z} = \int \frac{dz}{\frac{b}{2} + z}$$

Последній же интегралъ по формулѣ (124) $= \log \left(\frac{b}{2} + z \right)$. По (467) $z = x + \sqrt{a + bx + x^2}$. Следовательно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \log \left[\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2} \right] + C \dots (470)$$

2-ой случай. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}}$ (здесь x^2 стоитъ со знакомъ $-$).

Рѣшимъ уравненіе $x^2 - bx + a = 0$, называя его корни чрезъ α и β , получимъ:

$$\alpha = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}, \quad \beta = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a} \dots (471)$$

Какъ извѣстно:

$$a + bx - x^2 = (x - \alpha)(\beta - x) \dots \dots \dots (472)$$

Дѣлимъ подстановку:

$$\sqrt{a^2 + bx - x^2} = (x - \alpha) z \dots \dots \dots (473)$$

Отсюда изъ (472) имѣемъ: $\beta - x = (x - \alpha) z^2$. Откуда:

$$x = \frac{\beta + \alpha z^2}{1 + z^2} \dots \dots \dots (474)$$

Поэтому:

$$(x - \alpha) z = \left(\frac{\beta + \alpha z^2}{1 + z^2} - \alpha \right) z = \left(\frac{\beta - \alpha z^2}{1 + z^2} \right) z = \frac{(\beta - \alpha) z}{1 + z^2}$$

Вставляя эту величину, вмѣстѣ $(x - \alpha) z$, въ (473), получимъ

$$\sqrt{a^2 + bx - x^2} = \frac{(\beta - \alpha) z}{1 + z^2} \dots \dots \dots (475)$$

Вычислимъ dx изъ формулы (474):

$$dx = \frac{(1+z^2)2\alpha z dz}{(1+z^2)^2} = \frac{2\alpha z dz}{1+z^2} = \frac{2\alpha}{1+z^2} z dz \quad (476)$$

Формулы: (474), (475), (476) позволяютъ освободиться отъ радикала и привести дѣло къ интегрированию рациональной дроби.

Примѣръ. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}$. По (475) и (476), получимъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int \frac{2(\alpha-\beta)z dz}{(1+z^2)(\beta-\alpha)z} = \int \frac{2 dz}{1+z^2}$$

по (432):

$$= \int \frac{2 dz}{1+z^2} = 2 \operatorname{arctg} z$$

Слѣдовательно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = 2 \operatorname{arctg} z$$

Но изъ (473) имѣемъ:

$$z = \frac{\sqrt{a+bx-x^2}}{x}$$

Итакъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+bx-x^2}}{x} + C.$$

Впрочемъ этотъ интегралъ получается въ болѣе простой формѣ слѣдующимъ болѣе легкимъ приемомъ. Не трудно видѣть, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4} - \left(x-\frac{b}{2}\right)^2}}$$

Дѣлаемъ подстановку:

$$\frac{b}{2} - x = t \quad \sqrt{a+\frac{b^2}{4} - \left(x-\frac{b}{2}\right)^2} = \dots \quad (477)$$

откуда:

$$dx = -dt \sqrt{a+\frac{b^2}{4} - t^2}$$

Подставляя, получимъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4} - t^2}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4} - t^2}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arccos} t.$$

Но изъ (477) слѣдуетъ:

$$t = \frac{b - 2x}{\sqrt{4a + b^2}}.$$

Поэтому:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx} \cdot x^2} = \arccos \left(\frac{b - 2x}{\sqrt{4a + b^2}} \right) \dots \dots (478)$$

Интегрирование бинома.

Случай интегрируемости бинома и его преобразование подстановкою

$$a + bx^n = z.$$

§ 266. Очень многие интегралы имѣютъ видъ

$$\int x^m \sqrt[p]{(a + bx^n)^q} dx.$$

Вычисленіе этого выраженія называется *интегрированіемъ бинома*, потому что здѣсь подъ корнемъ стоитъ биномъ (сумма).

Обыкновенно этотъ интегралъ представляють, полагая

$$\frac{q}{r} = p \dots \dots \dots (479)$$

въ видѣ:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \dots \dots \dots (480)$$

Биномъ можно интегрировать въ слѣдующихъ случаяхъ:

1) Если p цѣлое число. Тогда разлагаемъ $(a + bx^n)^p$ по биному Ньютона и интегрируемъ почленно.

2) Если

$$\frac{m+1}{n} = \text{цѣлому числу} \dots \dots \dots (481)$$

Въ этомъ случаѣ полагаемъ:

$$a + bx^n = z.$$

откуда:

$$x = \left(\frac{z - a}{b} \right)^{\frac{1}{n}}; \quad dx = \frac{1}{bn} \left(\frac{z - a}{b} \right)^{\frac{1}{n} - 1} dz.$$

Вставляя, получаемъ:

$$\frac{1}{bn} \int z^r \left(\frac{z - a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n} - 1} dz.$$

Этотъ интегралъ можно вычислить, если $\frac{m+1}{n}$ есть цѣлое число, сдѣлавъ подстановку $z = t^r$, гдѣ r есть знаменатель той дроби $\frac{q}{r}$, кото-

рая названа чрез p . Действительно эта подстановка уничтожает радикалы (дробные показатели).

3) Если

$$\frac{m+1}{n} + p = \text{цѣлому числу} \dots \dots \dots (482)$$

Въ этомъ случаѣ дѣлаемъ такое преобразование:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \int x^{m+np} (ax^{-n} + b)^p dx \dots \dots (483)$$

Условіе интегрируемости (481) принимаетъ въ преобразованномъ интегралѣ видъ $\frac{m+np+1}{n} = \text{цѣлому числу}$, или:

$$\frac{m+1}{n} + p = \text{цѣлому числу};$$

Примѣръ. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Пишемъ его въ видѣ:

$$\int x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Здѣсь $m = -1$; $n = 2$; $p = \frac{1}{2}$ условіе интегрируемости (481) удовлетворено, потому что:

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

Полагаемъ $1-x^2 = z$; отсюда:

$$x = \sqrt{1-z} \quad z = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad dx = -\frac{1}{2} (1-z)^{-\frac{1}{2}} dz$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{2} \int \frac{(1-z)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} dz}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} dz = -\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Итакъ:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C \dots \dots \dots (484)$$

Интегрированіе трансцендентныхъ функцій.

Простѣйшій случай.

§ 287. Интегралы вида:

$$\begin{aligned} \int f(e^x) e^x dx, \quad \int f(\lg x) \frac{dx}{x}, \quad \int f(\sin x) \cos x dx, \quad \int f(\cos x) \sin x dx; \\ \int f(\arcsin x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int f(\operatorname{arctg} x) \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

въ которыхъ подъ интеграломъ находится произведение алгебраической функции f отъ какой нибудь простой трансцендентной на дифференциаль этой трансцендентной, вычисляются простою подстановкою.

Примѣръ. $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$. Здѣсь кубъ отъ синуса помноженъ на дифференциаль синуса: $\cos x \, dx$. Полагаемъ $\sin x = y$. Получимъ:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = \int y^3 \, dy = \frac{y^4}{4} = \frac{\sin^4 x}{4}.$$

Интегралы вида $\int x^n P \, dx$.

§ 268. Пусть z есть некоторая трансцендентная функция отъ x ; P некоторая алгебраическая функция отъ x . Научимся вычислять интегралы вида:

$$\int z^n P \, dx,$$

если знаемъ интегрировать $\int P \, dx$.

Полагаемъ:

$$\int P \, dx = Q; \quad \int Q \frac{dz}{dx} \, dx = R, \quad \int R \frac{dz}{dx} \, dx = s \dots$$

Пользуясь этими обозначеніями и интегрированиемъ по частямъ, вычисляемъ:

$$\begin{aligned} \int z^n P \, dx &= \int z^n dQ = Qz^n - n \int Qz^{n-1} \, dz \\ &= \int Qz^{n-1} \, dz - \int z^{n-1} dR = Rz^{n-1} - (n-1) \int z^{n-2} R \, dz \\ &= \int z^{n-2} R \, dz - \int z^{n-2} dS = Sz^{n-2} - (n-2) \int z^{n-3} S \, dz \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Вставимъ въ верхнія изъ этихъ строкъ значенія интеграловъ, данныя нижними. получимъ:

$$\int z^n P \, dx = Qz^n - nRz^{n-1} + n(n-1)Sz^{n-2} \dots \quad (185)$$

Закономъ дальнѣйшаго составленія этой формулы ясенъ. Если умѣемъ вычислять $Q, R, S \dots$ и число n есть число цѣлое и положительное, то по формулѣ (185) вычислимъ и $\int z^n P \, dx$.

Примѣръ. $\int x^{m-1} (\lg x)^3 \, dx$.

Здѣсь:

$$z = \lg(x); \quad n = 3; \quad P = x^{m-1}.$$

Вычисляемъ:

$$Q = \int P dx = \int x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m}$$

$$R = \int Q \frac{dz}{dx} dx = \int \frac{x^m}{m} \frac{dx}{x} = \frac{1}{m} \int x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m^2}$$

$$S = \int R \frac{dz}{dx} dx = \int \frac{x^m}{m^2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{m^2} \int x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m^3}$$

Ясно уже, что затѣмъ получимъ $\frac{x^m}{m^4}, \frac{x^m}{m^5}, \dots$. Вставляя въ формулу (485) получимъ:

$$\int x^{m-1} (\lg x)^3 dx = \frac{x^m}{m} (\lg x)^3 - 3 \frac{x^m}{m^2} (\lg x)^2 + 3 \cdot 2 \frac{x^m}{m^3} \lg x - \dots - 1 \frac{x^m}{m^4}.$$

Какъ видимъ рядъ закончился потому что слѣдующий членъ по этому закону былъ бы $3 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$, то есть равенъ нулю, благодаря тому, что $3 - 3 = 0$.

§ 269. Интегралъ вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ приводится интегрируемымъ по частямъ къ болѣе простому виду слѣдующимъ способомъ

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \sin^m x \cdot \cos x dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \sin^m x \cdot d(\sin x) = \int \cos^{n-1} x \cdot d \left(\frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \right).$$

Интегрируя по частямъ находимъ, что послѣдній интегралъ равенъ

$$\cos^{n-1} x \cdot \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} - \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cdot \cos^{n-2} x \cdot dx$$

Итакъ:

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx = \cos^{n-1} x \cdot \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cdot \cos^{n-2} x \cdot dx \dots \dots \dots (486)$$

Но

$$\begin{aligned} \sin^{m+2} x \cdot \cos^{n-2} x &= \sin^m x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{n-2} x \\ &= \sin^m x \cdot \cos^{n-2} x - \sin^m x \cdot \cos^n x. \end{aligned}$$

Поэтому:

$$\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \cdot dx = \int \sin^m x \cdot \cos^{n-2} x dx - \int \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx.$$

Вставляя эту величину въ (486) получимъ:

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx = \cos^{n-1} x \cdot \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \left[\int \sin^m x \cdot \cos^{n-2} x dx - \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx \right].$$

Соединяя здѣсь интеграль лѣвой части равенства съ равнымъ ему интеграломъ правой части, получимъ:

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cdot \cos^{n-2} dx \dots \dots \dots (487)$$

Здѣсь мы понизили степень косинуса съ $\cos^n x$ на $\cos^{n-2} x$. Прилагая этотъ приемъ къ интегралу правой части равенства (487), и такъ далѣе дойдемъ до одного изъ интеграловъ:

$$\int \sin^m x dx \text{ или } \int \sin^m x \cdot \cos x dx,$$

которые умѣемъ вычислять указанными въ §§ 267 и 268 способами.

Нѣкоторые наиболѣе употребительные въ приложеніяхъ интегралы.

§ 270. Иногда интегралы, которые подходятъ подъ формулы и способы изложенной общей теоріи, могутъ быть, по ихъ частному характеру, вычисляемы проще. Съ другой стороны, въ послѣдующихъ приложеніяхъ неудобно было бы намъ въ этой книгѣ отвлекаться вычислениями интеграловъ. Поэтому мы приводимъ здѣсь вычисленіе интеграловъ, встрѣчающихся особенно часто.

Формулы, содержащіяся въ этомъ параграфѣ, обозначаемъ особою нумерацею [1], [2]...

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Полагая въ (470), вмѣсто a , постоянное $-a^2$; $b = 0$, получимъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lg \left[x + \sqrt{x^2 - a^2} \right] + C \dots \dots [1]$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx.$$

Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Но

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2) dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \int \sqrt{x^2 - a^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Но по формулѣ [1] этого параграфа:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lg [x + \sqrt{x^2 - a^2}].$$

Слѣдовательно:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= x \sqrt{x^2 - a^2} \\ &- \int \sqrt{x^2 - a^2} dx - a^2 \lg [x + \sqrt{x^2 - a^2}]. \end{aligned}$$

Переносим изъ правой части равенства $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ въ лѣвую, получимъ:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x \sqrt{x^2 - a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \lg [x + \sqrt{x^2 - a^2}] + C. \quad [2]$$

Подобнымъ же образомъ вычислимъ $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Имеемъ:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x \sqrt{a^2 - x^2} \\ &+ \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &- \int \sqrt{a^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Но полагая въ (478), вмѣсто a , постоянное a ; $b = 0$ получимъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos \left(-\frac{x}{a} \right). \dots \dots \dots [3]$$

Поэтому:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arccos \left(-\frac{x}{a} \right) - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Соединивъ въ этомъ равенствѣ одинаковые интегралы, получимъ

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arccos \left(-\frac{x}{a} \right). \dots \dots [4]$$

Не трудъ вычислить следующие интегралы:

$$\int \frac{dx}{a + \sqrt{x}} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) \dots \dots \dots [5]$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\lg a} \dots \dots \dots [6]$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{1}{2a} \lg \left(\frac{x + a}{x - a} \right) \dots \dots \dots [7]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \lg \left| \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + a} + \frac{x}{a} \right| \dots \dots \dots [8]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a}} = \lg \left| \frac{1}{a} \sqrt{x^2 - a} + \frac{x}{a} \right| \dots \dots \dots [9]$$

Вычисленіе площадей

Площадь параболы.

§ 271. Вычислимъ площадь параболы $y^2 = 2px$ (фиг. 191). Изъ ея уравненія имѣемъ:

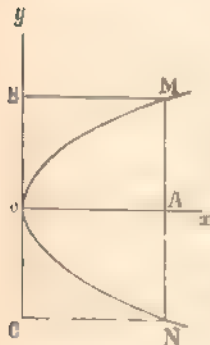
$$y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p} x^{\frac{1}{2}}.$$

Согласно (415), площадь AOM равна

$$\begin{aligned} \int y dx &= \int_0^x \sqrt{2px} dx = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2p} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^x \\ &= \sqrt{2p} \frac{2}{3} \sqrt{x^3} = \frac{2}{3} \sqrt{2px} x = \frac{2}{3} yx \end{aligned} \quad (487)$$

двумъ третямъ прямоугольника $AOBM$. Следовательно площадь

$$NOM = \frac{2}{3} NCBM.$$



Фиг. 191.

Площадь эллипса.

§ 272. Вычислимъ площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Изъ этого уравненія слѣдуетъ (фиг. 192).

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \dots \dots \dots (488)$$

Площадь $POBM$, заключенная между осью y , кривою, ординатою y и осью абсциссъ по (415) будетъ:

$$u = \int_0^x y dx.$$

Вставив сюда величину y изъ (188), получимъ

$$u = \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Иль удавъ формулы (14) параграфа 270 и получимъ:

$$u = \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a} \left[x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arccos \left(\frac{x}{a} \right) \right]_0^x \\ = \frac{b}{a} \left[x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arccos \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{a^2}{2} \arccos (0) \right].$$

Но $\arccos 0$ — дугъ косинуса, которой равно нулю $= \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$u = \frac{b}{a} \left[x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arccos \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] . . . (489)$$

Имѣя здѣсь $x = a$, получимъ, площадь $\Delta O B$ четверти (квадранта) эллипса:

$$\Delta O B = \frac{b}{a} \left[\frac{a^2}{2} \arccos (-1) - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right].$$

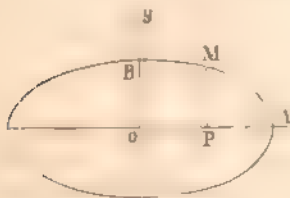
Но $\arccos (-1) = \pi$. Следовательно:

$$\Delta O B = \frac{b}{a} \left[\frac{a^2 \pi}{2} - \frac{a^2 \pi}{4} \right] = \frac{b}{a} \frac{a^2 \pi}{4} = \frac{ab \pi}{4}.$$

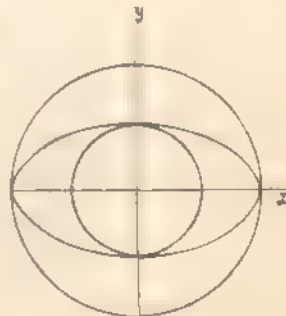
Площадь же всего эллипса въ 4 раза больше этой площади эллиптического квадранта. Итакъ:

Площадь эллипса $= \pi ab$. . (490)

При $a = b$ эллипсъ обращается въ



Фиг. 192.



Фиг. 193.

кругъ и получается известная формула площади круга πR^2 (если назвать a чрезъ R , то πR^2).

Площади круговъ, описанныхъ изъ центра эллипса его полуосями какъ радиусами, суть πa^2 и πb^2 . Между ними и площадью πab эллипса существуетъ соотношеніе

$$\pi ab = \sqrt{\pi a^2 \cdot \pi b^2}.$$

показывающее, что: *площадь эллипса есть средняя пропорциональная площадей описанного около него и вписанного в него кругов* (фиг. 193).

Площадь гиперболы.

§ 273. Вычислим площадь равносторонней гиперболы (фиг. 194):

$$xy = m.$$

Имеем:

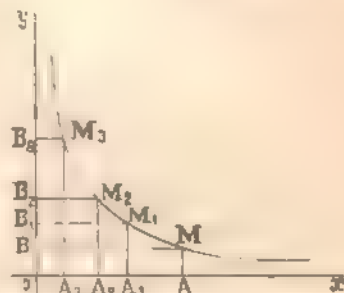
$$AMNB = \int_p^q y \, dx = m \int_p^q \frac{dx}{x} = m \left[\lg x \right]_p^q = m \lg q - m \lg p \\ = m \lg \frac{q}{p} = \lg \frac{q^m}{p^m}.$$

где $OA = p; OB = q.$

Замѣтимъ, что въ этой гиперболѣ, какъ показываетъ самое ея уравнение $xy = m$, площадь прямоугольника, построеннаго на абсциссѣ и орди-



Фиг. 194.



Фиг. 195.

наты есть величина постоянная, такъ что, напримеръ, прямоугольники $AOBM, A_1OB_1M_1, A_2OB_2M_2$ равновелики (фиг. 195).

Площадь циклоиды.

§ 274. При вычислении площади циклоиды намъ не придется даже необходимости вычислять интегралы, а достаточно будетъ только знать видъ ихъ для опредѣленія величины площади алгебраическою формулою.

Принимаемъ за ось x кающую въ вершинѣ циклоиды, а вершину примемъ за начало координатъ (фиг. 196). По формулѣ (383):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}} \dots \dots \dots (491)$$

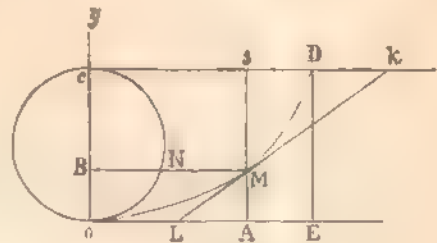
Но эта формула выведена была при томъ, что начало координатъ было въ D . Однако, если наклоненная касательной въ той системѣ была CKL ,

въ системѣ же фигуры 196-ой уголъ наклоненія касательной есть KLE , равный CKL , какъ накрестлежающій. Для написанія дифференціального уравненія циклоиды для новой системы координаты остается въ формулѣ (491) замѣнить прежній y , равный SM , новымъ равнымъ AM , но $SM = 2a - AM$. Следовательно нужно, для перехода къ новымъ осямъ, замѣнить только въ правой части (491)-го y чрезъ $2a - y$. Получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}} \quad (492)$$

Вычислимъ площадь AMO .

$$AMO = \int_0^x y \, dx.$$



Фиг. 196.

Вставимъ сюда, вмѣсто dx , эту величину изъ (492), получимъ.

$$AMO = \int_0^a y \, dx = \int_0^a y \sqrt{\frac{2a - y}{y}} \cdot dy = \int_0^a \sqrt{(2ay - y^2)} \, dy. \quad (493)$$

Вычислимъ теперь площадь BNO круговаго полуэлемента. Она будетъ:

$$\int_0^y X \, dY,$$

гдѣ X, Y координаты точки N . Но $X = BN =$ среднѣ пропорціональной между

$$BC \text{ и } OB = \sqrt{(2a - y) \cdot y}.$$

Слѣдовательно:

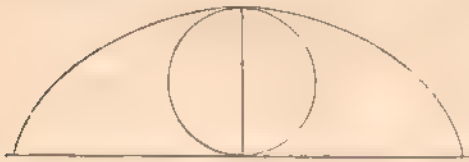
$$BNO = \int_0^a \sqrt{(2a - y) \cdot y} \, dy.$$

Сравнивая это выраженіе съ (493) видимъ, что $AMO = BNO$. Когда сдѣлаемъ OB равнымъ OC , то BNO обратится въ площадь $\frac{\pi a^2}{2}$ полу-круга, $ОАМ$ обратится въ OED . Эти площади будутъ равны и въ предѣлѣ. Слѣдовательно:

$$OED = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Вычитая OED изъ $OCDE$, получимъ площадь $ОМДС$ полуциклоиды. Но $OCDE = 2a \cdot CD$. Стрелка же $CD = \pi a$, по удлинению катанія круга

по прямой. Следовательно $OCDE = \pi a$, $2a = 2\pi a^2$. Итак:



Фиг. 197.

$$OMDC = 2\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

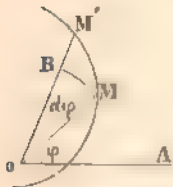
Площадь же $ABCD$ цѣлой циклоиды, заключенная (фиг. 197) между этою кривою и ея основою равна:

$$3\pi a^2 \dots (194)$$

Она втрое больше площади касающагося круга, точкою котораго циклоида вычерчивается.

Дифференціалъ сектора въ полярныхъ координатахъ.

§ 275. Выучимся теперь определять площади кривыхъ, выраженныхъ въ полярныхъ координатахъ. Для этого предположимъ сначала дифференціалъ площади сектора кривой, выраженной въ полярныхъ координатахъ (фиг. 198).



Фиг. 198.

Пусть OA есть полярный ось, O полюсъ и на кривой дана точка M своими координатами: $\rho = OM$, $\varphi = AOM$. Дифференціаломъ сектора называется площадь OMM' , заключенная между радиусами векторами бесконечно близкихъ на кривой точкахъ M и M' и дугою MM' . Опустимъ изъ O радиусомъ OM окружность. Площадь сектора отличается на бесконечно малую величину 2-го порядка отъ площади круговаго сектора OMB , которую, въ свое очередь можно принять за треугольникъ съ основаниемъ $MB = r d\varphi$, и высотой r . Площадь его будетъ:

$$\frac{r}{2} \cdot r d\varphi \text{ или } \frac{r^2 d\varphi}{2}$$

Итакъ дифференціалъ du сектора равенъ:

$$\frac{r^2 d\varphi}{2} = du \dots \dots \dots (195)$$

Дифференціалъ сектора въ Декартовыхъ координатахъ.

§ 276. Весьма полезныя выводы дѣлаются иногда изъ выраженія этого дифференціала сектора въ Декартовыхъ координатахъ точки M (фиг. 199). Выведемъ это выраженіе.

Изъ чертежа имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

Дифференцируя, получимъ:

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{x dy - y dx}{r^2}$$

Но $\cos \varphi = \frac{x}{r}$. Следовательно:

$$r^2 d\varphi = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

откуда:

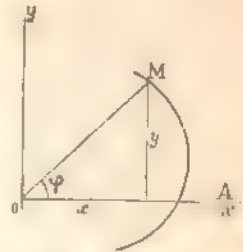
$$r^2 d\varphi = xdy - ydx \dots \dots \dots (496)$$

Следовательно, согласно (195), дифференциал сектора будет:

$$\frac{xdy - ydx}{2} = du \dots \dots \dots (497)$$

Отсюда получается так же интересное выражение угла θ , составленного касательной с радиусом сектора. Именно, из чертежа (фиг. 199) имеем:

$$r^2 = x^2 + y^2$$



Фиг. 199

дифференцируя, получим:

$$rdr = xdx + ydy \dots \dots \dots (498)$$

Для (496) на (498), получим:

$$\frac{rd\varphi}{dr} = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy} \dots \dots \dots (499)$$

Но, по (319), $\frac{rd\varphi}{dr} = \text{tg } \theta$. Следовательно

$$\text{tg } \theta = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy} \dots \dots \dots (500)$$

Площадь сектора.

§ 277. Интегрируя уравнение (499), получим формулу

$$U = \frac{1}{2} \int r^2 d\varphi \dots \dots \dots (501)$$

для вычисления площади сектора, ограниченного двумя какими-либо радиусами векторами и заключенного между ними дугой кривой, выраженной в полярных координатах.

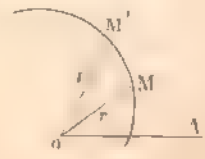
Секторь логарифмической спирали.

§ 278. Определим площадь сектора логарифмической спирали (фиг. 200)

$$r = e^{m\varphi} \dots \dots \dots (374)$$

По (501) имеем:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi'} e^{2m\varphi} d\varphi \left[\frac{e^{2m\varphi}}{2m} \right]_{\varphi}^{\varphi'} = \frac{e^{2m\varphi'} - e^{2m\varphi}}{4m}$$



Фиг. 200

Согласно съ уравненіемъ кривой, получимъ:

$$U = \frac{e^{2m\varphi} - e^{-2m\varphi}}{4m} = \frac{r'^2 - r^2}{4m}.$$

Выпрямленіе дугъ кривыхъ.

Общая формула выпрямленія дугъ кривыхъ въ Декартовыхъ координатахъ.

§ 279. Подъ именемъ выпрямленія (или ректификаціи) дугъ разумется вычисленіе длины дугъ кривыхъ данныхъ уравненіями.

Дифференціалъ дуги кривой мы уже вывели въ формулѣ (313) въ видѣ:

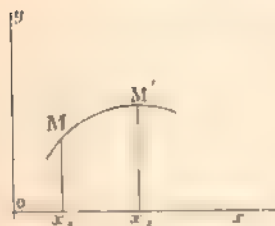
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \dots \dots \dots (313)$$

Его, очевидно, можно представить въ видѣ:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Интегрируя, получимъ:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{dy}{dx}} \cdot dx \dots \dots (502)$$



Фиг. 201.

Здѣсь интегрируется дифференціалъ пропорціональный dx , поэтому и пределы должны быть взяты для x : отъ $x = x_1$ до $x = x_2$, то есть опредѣляемъ длину дуги, заключающейся между точками M и M' , соответствующими абсциссамъ x_1 и x_2 (фиг. 201).

По уравненію $y = f(x)$ кривой опредѣляемъ $\frac{dy}{dx}$, вставляемъ его выраженіе въ (502) и, интегрируя, получимъ искомую длину дуги.

Выпрямленіе циклоиды.

§ 280. Отнесемъ циклоиду къ той же системѣ, какъ и въ § 280-омъ, то есть къ вершинѣ и проходящей чрезъ нея касательной (фиг. 193). Въ этой системѣ координатъ дифференціальное уравненіе циклоиды будетъ по формулѣ (492):

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}} \dots \dots \dots (492)$$

Слѣдовательно формула (502) приметъ, для циклоиды, видъ:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{y}{2a - y}} dx.$$

Заменивъ здѣсь, посредствомъ (192), dx чрезъ dy и вычлени, получимъ:

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{x_1}^{x_2} \left[1 + \frac{y}{2a-y} \right] \frac{2a-y}{y} dy = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{2a}{y} - 1 \right] \frac{2a-y}{y} dy \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{2a}{y} - 1 \right] dy = \sqrt{2a} \int_{x_1}^{x_2} y^{-\frac{1}{2}} dy = \sqrt{2a} \left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_{x_1}^{x_2} \\
 &= 2\sqrt{2a} \left[\sqrt{y} \right]_{x_1}^{x_2} = 2\sqrt{2a} (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}).
 \end{aligned}$$

Где y_2 и y_1 суть ординаты, соответствующия x_2 и x_1 .

Интегрируя же въ предѣлахъ отъ $y=0$ до $y=2a$, получимъ:

$$s = 2\sqrt{2ay}.$$

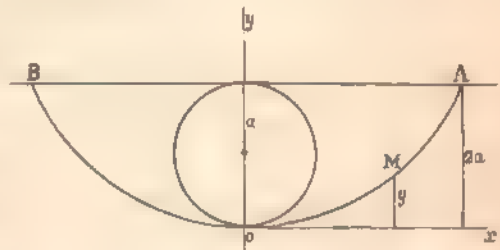
Если хотимъ определить дугу OMA (фиг. 202) полуциклоиды, то слѣдуетъ интегрировать отъ $y=0$ до $y=2a$ (какъ видно изъ чертежа), и тогда получимъ.

$$\text{Дуга } OMA = 2\sqrt{2a} \cdot 2a = 4a.$$

Слѣдовательно дуга BOA всей вѣтви циклоиды будетъ:

$$s = 8a \dots (503)$$

Оказывается, что длина циклоиды *созвѣрна* съ радиусомъ a круга, производящаго ее своимъ катаньемъ. Длину окружности можно средлить только приблизительно по ея радиусу, съ которымъ она *несозвѣрна* числомъ π *несозвѣрно*; длина же циклоиды определяется совершенно точно по радиусу производящаго круга: она равна 8 радиусамъ или 4 диаметрамъ катящагося круга.



Фиг. 202.

Выпрямленіе параболы.

§ 281. Опредѣлимъ длину дуги параболы $y^2 = 2px$. Имѣемъ (см. § 215):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} \dots \dots \dots (504)$$

Вставляя въ (502), получимъ:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} dx.$$

Замѣняя здѣсь dx величиною $\frac{dy}{p}$ и выводямою изъ (501), получимъ:

$$s = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} \frac{dy}{p} = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\left(\frac{y^2 + p^2}{y^2}\right)} \frac{y^2}{y^2} dy \\ = \frac{1}{p} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{y^2 + p^2} dy.$$

Этотъ интегралъ вычислимъ, замѣняя въ формулѣ [2] параграфа 270-го величину $(-a)$ чрезъ p^2 . Получимъ:

$$s = \frac{1}{p} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{y^2 + p^2} dy = \frac{1}{p} \left[\frac{y \sqrt{y^2 + p^2}}{2} + \frac{p^2}{2} \lg(y + \sqrt{y^2 + p^2}) \right]_{y_1}^{y_2} \\ = \left[\frac{y \sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{p}{2} \lg(y + \sqrt{y^2 + p^2}) \right]_{y_1}^{y_2}.$$

Выраженіе весьма сложное.

Выпрямленіе эллипса.

§ 282. Вычислимъ дугу эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Имеемъ:

$$\frac{df}{dx} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{df}{dy} = \frac{2y}{b^2}.$$

Слѣдовательно $\frac{dy}{dx} = -\frac{xb}{a^2y}$. Вставляя въ (502) получимъ:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2}} dx. \quad (505)$$

Опредѣляя y изъ уравненія $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипса, получимъ:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Вставляя эту величину въ (505), получимъ:

$$s = \int_x^x \sqrt{\frac{a^4 b^2 (a^2 - x^2) + b^4 x^2}{a^4 b^2 (a^2 - x^2)}} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{a^4 (a^2 - x^2) + b^4 x^2}{a^4 (a^2 - x^2)}} dx$$

Вводя эксцентриситетъ

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

эллипса, то есть полагая, $a^2 - b^2 = a^2 e^2$, получимъ:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - e^2}} dx \dots \dots \dots (506)$$

Все эти интегралы не могутъ быть выражены въ тѣхъ простыхъ функцияхъ, которыя до сихъ поръ указаны были въ нашемъ руководствѣ: они выражаются объемами, высшими transcendентными *эллиптическими функциями* (см. алфавитный указатель).

Можно однако стремиться найти приближенное выраженіе интеграла (506). Будемъ его брать въ предѣлахъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$. Введемъ вмѣсто x другое переменное φ въ слѣдующемъ уравненіи:

$$x = a \cdot \sin \varphi ; \text{ откуда } dx = a \cdot \cos \varphi d\varphi.$$

Формула (506) приметъ видъ:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi}{a^2 - e^2}} a \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2}} a \cos \varphi \cdot d\varphi \\ &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \dots \dots \dots (507) \end{aligned}$$

Разлагая $\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ по биному Ньютона, получимъ:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} &= (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} e^4 \sin^4 \varphi \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} e^6 \sin^6 \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} e^8 \sin^8 \varphi \dots \end{aligned}$$

Вставляя въ (507), получимъ:

$$\begin{aligned} s &= a \left[\frac{1}{2} e^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \cdot d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} e^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi \cdot d\varphi - \dots \right] \dots \dots \dots (508) \end{aligned}$$

Дальше мы не будемъ производить подробнѣе вычисленія, а скажемъ только, что по вычисленіи входящихъ въ (508) интеграловъ, взявъ сначала предѣлы 0 и $\frac{\pi}{2}$, получали бы величину дуга четверти эллипса. Учтѣвряя

этотъ результатъ, получили бы для длины s всего эллипса такое выраженіе:

$$s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = 2a\pi \left[1 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} e^4 \right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} e^6 \right)^2 + \frac{1}{7} \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} e^8 \right)^2 - \dots \right] \dots (509)$$

При достаточно маломъ $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, то есть когда полуоси a и b не слишкомъ отличаются одна отъ другой (эллипсъ не слишкомъ растянутъ), рядъ довольно быстро сходящійся (члены его быстро уменьшаются) и потому годится для приближеннаго вычисленія. Но удобнѣе для этого формула), тоже приближительная, слѣдующая: полная длина эллипса s почти равна:

$$s = \pi \left[\frac{a + b}{2} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right] \dots (510)$$

при чемъ ошибка, получающаяся при вычисленіи длины эллипса по этой формулѣ, менше, чѣмъ

$$\frac{4a\pi e^6}{180(1 - e^2)},$$

гдѣ e есть эксцентриситетъ $= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Общій способъ выпрямленія дугъ въ полярныхъ координатахъ.

§ 283. По формулѣ (348):

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r d\varphi)^2}.$$

Можно это представить такъ:

$$ds = d\varphi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} \dots (511)$$

или такъ:

$$ds = dr \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} \dots (512)$$

Интегрируя, получимъ слѣдующія формулы, изъ коихъ и та и другая годится для выпрямленія кривыхъ, выраженныхъ въ полярныхъ координатахъ:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi \dots (513)$$

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} dr \dots (514)$$

*) Schlömilch's Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, Aufgaben aus der Integralrechnung. 1874; p. 82.

Выпрямление дуги архимедовой спирали.

§ 284. Вычислим длину дуги архимедовой спирали, взятой от начала до точки, соответствующей углу φ . Интеграл придется брать от 0 до φ . Уравнение архимедовой спирали таково

$$r = a\varphi.$$

откуда

$$\frac{dr}{d\varphi} = a.$$

По (513) имеем:

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 + r^2} \cdot d\varphi.$$

Вставляя сюда, вместо r , величину $a\varphi$ из уравнения спирали, получим

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 + a^2\varphi^2} \cdot d\varphi = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 + \varphi^2} \cdot d\varphi.$$

По формуле 2, параграфа 270-го, принимая в ней $a = 1$, получим

$$s = \frac{a}{2} [\varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + \lg(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1})].$$

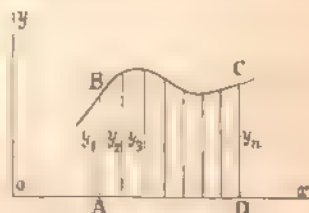
Приблизительное определение площадей и точное вычисление среднего значения функций.

Элементарный способ.

§ 285. В приложениях иногда удобнее, не гонясь за совершенною точностью, определять площади приблизительно.

Самым простым, но и наименее точным средством является для этого следующий способ.

Иногда требуется определить площадь $ABCD$, заключенную между кривою, хотя бы она была и некая кривая (см. § 8) двумя ординатами и осью абсцисс (фиг. 203). Делим AD на n равных частей и через точки деления проводим ординаты. Назовем y_1 ординату AB , y_2 следующую и так далее; измерим их. Сумма прямоугольников, построенных на этих ординатах, очевидно, будет тем более сходиться к площади $ABCD$, чем на большее число частей разделим отрезок AD . Эту сумму и принимаем за площадь кривой. Она



Фиг. 203

будет равна:

$$r = \frac{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \dots + y_n) AD}{n} \dots \dots (515)$$

такъ какъ величина какаго нибудь m -го прямоугольника будетъ $\frac{y_m AD}{n}$, и потому что высота его $= y_m$, основание $= \frac{AD}{n}$.

Средняя арифметическая ордината.

§ 286. Среднее арифметическое нескольких величинъ называется, какъ извѣстно, частное, получающееся отъ раздѣленія суммы этихъ величинъ на ихъ число.

Изъ формулы (515) видно, что среднее арифметическое *ординатъ* равно

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = \frac{U}{AD}$$

$=$ площади дѣленной на ея основаніе.

Отсюда слѣдуетъ, что среднее арифметическое *ординатъ* равно

$$\frac{\int_a^b y dx}{b - a} \dots \dots (516)$$

потому что интегралъ $\int_a^b y dx$ выражаетъ, какъ мы видели (415), площадь $ABCD$ (фиг. 203), если a и b суть абсциссы ординатъ AB и DC , основаніе же AD площади равно $b - a$.

Формула (516) применима только къ изометричнымъ кривымъ, выражаемымъ уравненіемъ

$$y = f(x) \dots \dots (517)$$

Опредѣленіе средняго значенія функціи.

§ 287. Подставивъ въ (516), вмѣсто y , ея величину изъ (517) получимъ,

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \dots \dots (518)$$

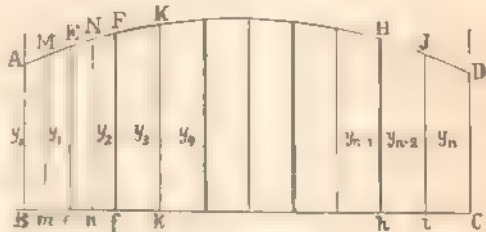
Эту формулу, согласно сказанному въ предыдущемъ параграфѣ, опредѣляетъ совершенно точно среднее значеніе функціи $f(x)$ изъ всѣхъ ея значеній, соответствующихъ всемъ значеніямъ x въ предѣлахъ отъ $x = a$ до $x = b$.

Этотъ выводъ чрезвычайно важенъ для многихъ приложений и по истинѣ велика мощь интегральнаго исчисления, дающая возможность опре-

дать среднее значение функции по *всему* ее значению въ данных пределах такъ же точно, какъ будто бы мы вычислили все безконечное множество значений, принимаемыхъ функциею при непрерывномъ ея измененіи.

Правило Симпсона.

§ 288 Въ самыхъ разн. образныхъ методахъ вычисленія требуется необходимость или въ опредѣленіи среднего значения какой нибудь переменной величины (функции) или въ опредѣленіи площади. Между тѣмъ формула (518) применима только къ закономѣрнымъ функциямъ, способъ же элементарный требуетъ проведения весьма большого числа ординатъ для достиженія желаемой степени точности. Поэтому изобрѣтено было много другихъ способовъ, которые не требовали бы интегрирования и давали бы или болѣе точное равенство съ элементарнымъ способомъ рѣшенія при томъ же числѣ ординатъ, или равенство той же точности при меньшемъ числѣ ординатъ.



Фиг. 204

Одинъ изъ наиболѣе практичныхъ способовъ представляетъ себою правило Симпсона, къ описанію котораго мы и приступимъ.

Положимъ, что намъ нужно опредѣлить площадь *ABCD* (фиг. 204).

Длиною отрезка *BC* на *четное* число *2n* частей. Проводимъ для каждой части ординаты $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$. Вычисляемъ площадь заключенная между четными ординатами, напримеръ вычислимъ площадь трapeции *BAFf*, заключенная между ординатами y_0 и y_2 . Для этого раздѣлимъ прямую *Bf* на 3 равныя части $Bm = mn = nf$. Изъ точки *с* длины *m* и *n* проведемъ ординаты. Площадь *BAFf* весьма мало отличается отъ суммы трехъ трапецій:

$$BAMm + mMNn + nNFf.$$

Вычисляемъ эту сумму по теоремѣ: площадь трапеции = полу сумма ея параллельныхъ сторонъ, умноженая на высоту, получимъ:

$$\frac{1}{2} (y_0 + mM) \cdot Bm + \frac{1}{2} (mM + nN) \cdot mn + \frac{1}{2} (nN + fF) \cdot nf = BAFf \dots \dots \dots (519)$$

Назовемъ чрезъ *b* величину *Be*, т.е. такъ что

$$b = \frac{BC}{2n}.$$

Сдѣлавъ въ (519) приведеніе и замѣливъ, что

$$Bm = mn = nf = \frac{2b}{3}.$$

Получимъ:

$$BAFf = \frac{b}{3} (y_0 + 2(mM + nN) + fF) \dots \quad (520)$$

Но въ трапеціи $mMNn$ ордината y_1 весьма мало отличается отъ ея средней линии равн. m , какъ извѣстно, и дусуммѣ параллельныхъ сторонъ. Слѣдовательно приблизительно:

$$y_1 = \frac{mM + nN}{2},$$

откуда:

$$2(mM + nN) = 4y_1;$$

вставляя въ (520) эту величину, и замѣвая что $fF = y_2$, получимъ

$$BAFf = \frac{b}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Вычисляемая площадь $ABCD$ равна суммѣ такихъ велич. Слѣовательно:

$$\begin{aligned} ABCD &= \frac{b}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{b}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots \\ &+ \frac{b}{3} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) = \frac{b}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots \\ &+ y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) = \frac{b}{3} (y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots \\ &+ y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{2n-2}) + y_{2n}). \end{aligned}$$

Полагая

$s_1 =$ суммѣ нечетныхъ ординатъ,

$s_2 =$ суммѣ четныхъ ординатъ,

видимъ что:

$$ABCD = \frac{b}{3} (y_0 + 4s_1 + 2s_2 + y_{2n}) \dots \quad (521)$$

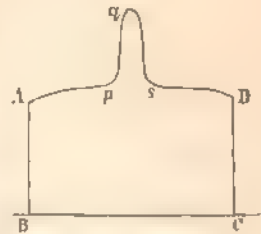
Эт. и есть знаменитая приведенная выше формула Симпсона: *площадь ронка произвольн. трети разстоянія между соседними ординатами на суммѣ первой и послѣдней ординатъ, умноженной суммѣ нечетныхъ и удвоенной суммѣ четныхъ ординатъ.*

Еслибы мы просто сдѣлывали поправки впрѣдъ $mMNn$ дѣле болѣе узкия, чѣмъ дѣлѣны между соседними ординатами y_i и y_{i+1} и думали бы площадь меньшую чѣмъ $ABCD$. Но при вывѣдѣ формулы Симпсона мы дѣлаемъ кромѣ того друг. ошибку, какъ разъ въ обратную сторону, умѣняя среднюю линію eE нѣсколько болѣе, равнявтеяне съ ней, орди-

натью y , и постушая такъ во всёхъ полосахъ. Поэтому формула Симпсона во много разъ точнѣе элементарнаго способа при проведеніи того же числа ординатъ. Число это $2n$, потому что такія ординаты какъ mM или nN входятъ въ разсужденіе не, не въ формулу: измѣрить нужно только $2n$ ординатъ: $y_0, y_1, y_2 \dots y_{2n}$.

Если бы упомянутыя ошибки, уклоняющія выводъ въ противоположныя стороны, были одинаковы то получилась бы совершенно точная величина; однако ошибки эти не одинаковы, и потому формула Симпсона всегдѣ приближенная.

Само собою разумѣется, что мѣста, вроде qs (фиг. 205), надѣ вычислять особо.



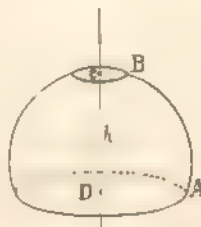
Фиг. 205.

Вычисленіе объемовъ помощью простыхъ интеграловъ.

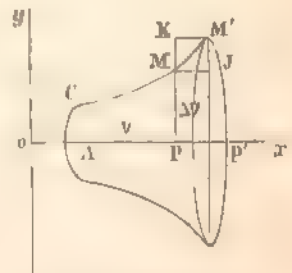
Объемы тѣлъ вращенія.

§ 289. Тѣломъ вращенія (фиг. 206) называется всякое тѣло, образованное вращеніемъ около оси k какой-нибудь кривой AB , находящейся съ k въ одной плоскости. Иногда говорятъ, что такое тѣло образовано вращеніемъ площади $ABCD$ около k .

Научимся вычислять объемъ тѣла, происходящаго отъ вращенія площади $ACMP$ (фиг. 207) около оси x .



Фиг. 206.



Фиг. 207.

Если x возрастетъ на Δx , то объемъ v тѣла вращенія возрастетъ на объемъ Δv , происходящій отъ вращенія площади $PMM'P'$. Этотъ объемъ Δv менше того,

который происходитъ отъ вращенія прямоугольника $PKM'P'$ и больше того, который происходитъ отъ вращенія прямоугольника $PMJ'P'$. Эти два объема суть цилиндры: радиусъ основанія 1-го равенъ y , радиусъ основанія 2-го равенъ $y + \Delta y$; высоты же ихъ равны Δx .

Слѣдовательно:

$$\pi (y + \Delta y)^2 \Delta x > \Delta v > \pi y^2 \Delta x.$$

Дѣля на Δx , получимъ:

$$\pi (y + \Delta y)^2 > \frac{\Delta v}{\Delta x} > \pi y^2.$$

Величины, между которыми стоит $\frac{dy}{dx}$ сольются въ предѣлѣ, и получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \pi y'$$

откуда $dy = \pi y^2 dx$. Слѣдовательно:

$$v = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad \dots \quad (522)$$

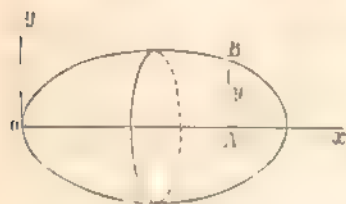
Примѣръ 1-ый. Определить объемъ эллипсоида вращения (фиг. 208), происшедшаго отъ вращения эллипса около большей оси.

Отнесемъ эллипсъ къ его вершинѣ; по (199) уравненіе эллипса будетъ:

$$y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

Подставивъ сюда, вмѣсто p , его величину $\frac{a^2}{a}$, получимъ:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2).$$



Фиг. 208.

По (522) имѣемъ для объема описаннаго площадью OAB .

$$\begin{aligned} v &= \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a (2ax - x^2) dx = \frac{\pi b^2 2a}{a^2} \int_0^a x dx - \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^a x^2 dx \\ &= \frac{2\pi b^2 x^2}{a^2} \Big|_0^a - \frac{\pi b^2 x^3}{a^2 \cdot 3} \Big|_0^a = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \right). \end{aligned}$$

Для опредѣленія объема всего эллипсоида вращения нужно взять верхнимъ предѣломъ $2a$, то есть положить въ сдѣланномъ выводѣ $x = 2a$. Получимъ:

$$v = \frac{\pi b^2}{a^2} \left[a(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{3} \right] = \frac{\pi b^2}{a^2} \left[4a^3 - \frac{8a^3}{3} \right] = \frac{4}{3} \pi ab^2$$

Итакъ:

$$v = \frac{4}{3} \pi ab^2 \quad \dots \quad (523)$$

При $a = b = R$ получимъ объемъ шара $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Объемъ тѣла, площади сѣченій котораго параллельными плоскостями известны.

§ 290. Если известна площадь сѣченія тѣла плоскостью перпендикулярною къ оси x , проведенною на разстоянн x отъ начала, то опредѣлимъ объемъ тѣла слѣдующимъ образомъ (фиг. 209)

Назовемъ чрезъ u площадь такого сѣчени. Съ приращеніемъ выся на Δx площадь u перемѣщается и получаетъ приращеніе Δu . Полученное при этомъ приращеніе Δv объема будетъ заключено между двумя цилиндрами съ основаніями u и $u + \Delta u$, съ высотами Δx . Поэтому:

$$(u + \Delta u) \Delta x > \Delta v > u \Delta x.$$

Дѣля на Δx , получимъ:

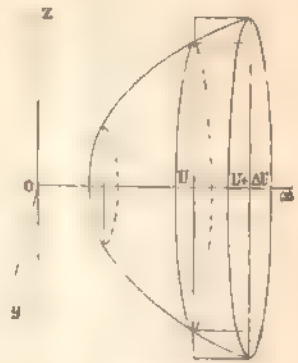
$$u + \Delta u > \frac{\Delta v}{\Delta x} > u.$$

Въ предѣлѣ:

$$\frac{dv}{dx} = u.$$

откуда $dv = u dx$. Слѣдовательно:

$$v = \int_{x_1}^{x_2} u dx, \dots (524)$$



Фиг. 209

гдѣ x_1 и x_2 суть разстоянія отъ начала координатъ гдѣ сѣченія, которыми ограничено вычисляемая объемъ.

Примѣръ. Определить объемъ трехоснаго эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Уравненіе кривой, получаемой въ сѣчени эллипсоида плоскостью GHP прведенною на разстояніи x_1 отъ начала будетъ (фиг. 210):

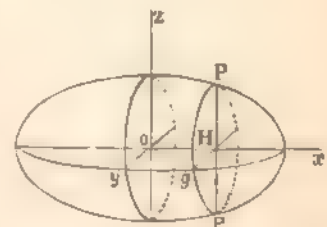
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x_1^2}{a^2} \dots (525)$$

Если сдѣлаемъ въ немъ $z = 0$, то получимъ:

$$y = GH = b \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}.$$

Если сдѣлаемъ въ (525) $y = 0$, то получимъ:

$$z = HP = c \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}.$$



Фиг. 210

Это будутъ оси эллиптического сѣченія. Но по (490) площадь такого эллипса $HP \cdot GH \cdot \pi$. Слѣдовательно площадь сѣченія будетъ:

$$HP \cdot GH \cdot \pi = \pi \cdot bc \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right).$$

Для x_1 переменнымъ мы должны замѣнить здѣсь x_1 чрезъ x . Получимъ площадь сѣченія $u = \pi bc \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Вставляя въ (524) наведемъ подо

вину всего объема:

$$\begin{aligned}
 v &= \int_0^a u \, du = \int_0^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\
 &= \int_0^a \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \pi b \int_0^a dx - \frac{\pi bc}{a^2} \int_0^a x^2 dx \\
 &= \pi bca - \frac{\pi bc}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{\pi bc}{a^2} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi abc .
 \end{aligned}$$

Следовательно объем всего эллипсоида будетъ

$$v = \frac{1}{3} \pi abc \dots \dots \dots (526)$$

Если $a = b = c = R$, то получаемъ объемъ шара $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Вычисленіе объемовъ тѣлъ помощью двойныхъ интеграловъ.

Общія формулы

§ 291 Иногда определение самой площади и сѣченія, разсматриваемаго въ предыдущемъ параграфѣ, требуетъ всякаго интегрированія. Въ такомъ случаѣ получаются двойные интегралы.

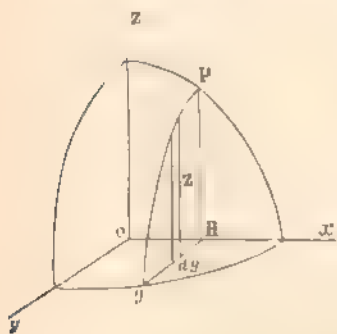
Пояснимъ какъ это выходитъ и что значитъ двойной интегралъ.

Для вычисленія объема по формулѣ (524) нужно знать площадь U сѣченія GHP (фиг. 211). Элементъ этого сѣченія, какъ видно изъ чертежа, равенъ $z \, dy$. Интегрируя этотъ дифференціалъ въ предѣлахъ отъ 0 до y , получимъ площадь U . Итакъ по (524):

$$v = \int_0^a u \, dx \dots \dots (524)$$

по приведенному разсужденію:

$$u = \int_0^y z \, dy.$$



Фиг. 211.

Вставляя въ (524) эту величину u , получимъ:

$$v = \int_0^a \left[\int_0^y z \, dy \right] dx = \int_{x=0}^{x=a} \left[\int_{y=0}^{y=y} z \, dy \right] dx.$$

Письется это так:

$$v = \int_0^a \int_0^y z \, dx \, dy = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=y} z \, dx \, dy \dots \dots (527)$$

или такъ

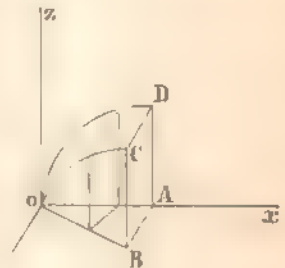
$$v = \int_0^a dx \int_0^y z \, dy = \int_{x=0}^{x=a} dx \int_{y=0}^{y=y} z \, dy \dots \dots (528)$$

Примеръ. Определить объемъ $ABCDO$ (фиг. 212), ограниченный плоскостью (x, z) , плоскостью (xy) , плоскостью $OСВ$ уравнение которой $y = \frac{b}{a}x$, плоскостью $ABCD$ проведенную перпендикулярно оси x на расстоянии a отъ начала и плоскостью CDO , уравнение которой:

$$z = \frac{1}{2} (Ax^2 + By^2).$$

По формуль (528):

$$v = \int_0^a dx \int_{y=0}^{y=\frac{b}{a}x} \frac{1}{2} (Ax^2 + By^2) \, dy.$$



Фиг. 212

Верхний предель интегрирования по y есть y , определяемое из уравнения $y = \frac{b}{a}x$ плоскости $OСВ$, потому что поперечная площадь u ограничивается пою плоскостью (фиг. 212).

Интегрируемъ по y въ предположении, что x постоянное, такъ какъ интегрирования по y распространяется на площадь u , которая пока неподвижна; интегрируемъ же по x перемѣняемъ эту площадь. Поэтому:

$$\begin{aligned} v &= \int_0^a dx \left[\frac{1}{2} Ax^2 \int_0^{\frac{b}{a}x} dy + \frac{1}{2} B \int_0^{\frac{b}{a}x} y^2 dy \right] \\ &= \int_0^a dx \left[\frac{1}{2} Ax^2 [y]_0^{\frac{b}{a}x} + \frac{1}{2} B \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{\frac{b}{a}x} \right] \\ &= \int_0^a \left(\frac{1}{2} Ax^2 \frac{b}{a} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{3} \frac{b^3}{a^3} x^3 \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} A \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{3} \frac{b^3}{a^3} \right) \int_0^a x^2 dx = \left(\frac{1}{2} A \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{3} \frac{b^3}{a^3} \right) \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a \\ &= \left(\frac{1}{2} A \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{3} \frac{b^3}{a^3} \right) \frac{a^3}{3} = \frac{ab}{3} \left(Aa^2 + \frac{1}{3} Bb^2 \right). \end{aligned}$$

Формулы § 291-го съ другой точки зрѣнія.

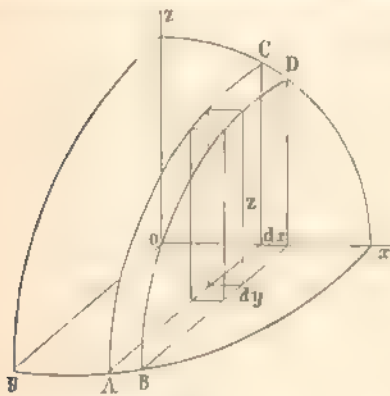
§ 292. Формула (27) можетъ быть истолкована еще слѣдующимъ образомъ. Въ этой формулѣ:

$$v = \int_0^a \int_0^y z \, dx \, dy$$

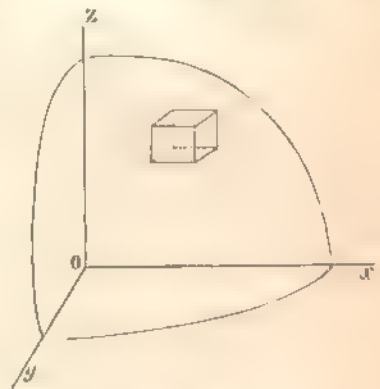
величина $dx \, dy$ есть бесконечно малый прямоугольникъ, представляющій собой основаніе бесконечно тонкаго столбика (фиг. 213), высота котораго z . Интегрируя по y , суммируемъ такіе столбики и получаемъ слой $ABCD = \int_0^y z \, dx \, dy$. Интегрируя этотъ интегралъ по x суммируемъ такіе слои и получаемъ весь объемъ $v = \int_0^a \int_0^y z \, dx \, dy$.

Наконецъ та же самая формула можетъ быть разсматриваема слѣдующимъ образомъ.

Вырезаемъ внутри даннаго (фиг. 214) объема бесконечно малый параллелепипедъ, ограниченный плоскостями параллельными осямъ.



Фиг. 213.



Фиг. 214.

координатъ и притомъ такой величины, что ребра его суть $dx \, dy \, dz$ и параллельны тѣмъ осямъ, обозначены концы x, y, z , стоятъ въ знакахъ этихъ дифференциаловъ. Объемъ такого параллелепипеда будетъ:

$$dx \, dy \, dz.$$

Напишемъ:

$$\int_0^a \int_0^y \int_0^z dx \, dy \, dz \dots \dots \dots (29)$$

Интегралъ \int_0^z складываетъ такіе параллелепипеды по направлению параллельному оси z , при чемъ получается столбикъ (фиг. 213). Инте-

грать \int_0^z складывает такие столбцы по направлению параллельному оси y , при чем получается слой $ABCD$ (фиг. 213). Наконец интеграл \int_0^z складывает такие слои по направлению параллельному оси x , при чем получается весь объем v .

Интегрируя по z мы считаем постоянными x и y , так что приходится все выносить за знак \int_0^z кроме dz ; и $\int_0^z dz = z$. Поэтому,

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^z dx dy dz = \int_0^a \int_0^b z dx dy \dots \dots (530)$$

и мы опять получили формулу (527):

$$v = \int_0^a \int_0^b z dx dy.$$

Множественные интегралы.

§ 293. В предыдущих параграфах мы несколько встретились с *двойными* и *тройными* интегралами. Мы же обобщим это понятие и рассмотрим *n* кратные интегралы вида:

$$\int_0^{a_1} \int_{b_1}^{b_2} \int_{z_1}^{z_2} \dots \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z, \dots, w) dx dy dz \dots dw.$$

Необходимо отличать эти интегралы, относящиеся ко многим переменным (при чем каждый отдельный интеграл, впрочем в том же, как и в случае красного интеграла, распространяется на свое переменное), от последовательного интегрирования по одному и тому же переменному например такого:

$$\begin{aligned} \int_0^x x^2 dx &= \frac{x^3}{3} \\ \int_0^x \frac{x^3}{3} dx &= \frac{x^4}{12} \\ \int_0^x \frac{x^4}{12} dx &= \frac{x^5}{60} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Примеръ 1-ый. Вычислимъ $\int_0^a \int_0^b \int_0^c z^m dx dy dz$.

Последовательный ходъ вычисления будетъ въ подробностяхъ таковъ:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \int_0^c z^m dx dy dz &= \int_0^a \int_0^b \left[\frac{z^{m+1}}{m+1} \right]_0^c dx dy = \int_0^a \int_0^b \frac{c^{m+1}}{m+1} dx dy \\ &= \frac{c^{m+1}}{m+1} \int_0^a \int_0^b dx dy = \frac{c^{m+1}}{m+1} \int_0^a [y]_0^b dx = \frac{c^{m+1}}{m+1} \int_0^a b dx \\ &= \frac{c^{m+1} b}{m+1} \int_0^a dx = \frac{c^{m+1} b}{m+1} [x]_0^a = \frac{c^{m+1} ba}{m+1}. \end{aligned}$$

Примеръ 2-ой. Вычислимъ $\int_a^b \int_0^y \int_0^y z^m dx dy dz$, отличающийся отъ данного въ предыдущемъ примѣрѣ только предѣлами. Вычисленіе будетъ таково:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^y \int_0^y z^m dx dy dz &= \int_a^b \int_0^y \left[\frac{z^{m+1}}{m+1} \right]_0^y dx dy = \int_a^b \int_0^y \frac{y^{m+1}}{m+1} dx dy \\ &= \int_a^b \left[\frac{y^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \right]_0^y dx = \int_a^b \frac{y^{m+2}}{(m+1)(m+2)} dx = \left[\frac{y^{m+2} x}{(m+1)(m+2)} \right]_{x=a}^{x=b} \\ &= \frac{y^{m+2} b}{(m+1)(m+2)} - \frac{y^{m+2} a}{(m+1)(m+2)} = \frac{y^{m+2}}{(m+1)(m+2)} (b-a). \end{aligned}$$

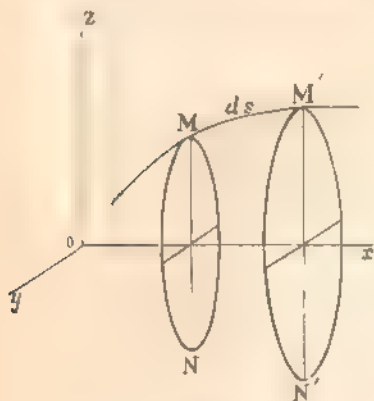
Примеръ 3-ий. Вычислимъ $\int_0^a \int_{b_1}^{b_2} \int_0^{s-y} z^m dx dy dz$, отличающийся только предѣлами отъ интеграловъ двухъ предыдущихъ примѣровъ.

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_{b_1}^{b_2} \int_0^{s-y} z^m dx dy dz &= \int_0^a \int_{b_1}^{b_2} \frac{y^{m+1}}{m+1} dx dy = \int_0^a \left[\frac{y^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \right]_{b_1}^{b_2} dx \\ &= \int_0^a \left[\frac{b_2^{m+2}}{(m+1)(m+2)} - \frac{b_1^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \right] dx \\ &= \frac{a}{(m+1)(m+2)} (b_2^{m+2} - b_1^{m+2}). \end{aligned}$$

Вычисленіе величины поверхностей.

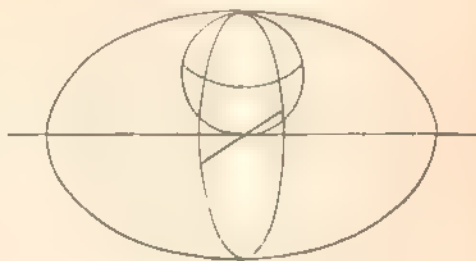
Величина поверхностей вращения.

§ 294. Если y есть ордината данной кривой и z ось вращения этой кривой около оси x прирех дить поверхность, то элементъ $MM'N'N$ этой поверхности (фиг. 215) равекъ:



Фиг. 215.

$$2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} dx,$$



Фиг. 216.

гдѣ $ds = MM' =$ элементъ дуги данной кривой. Поэтому вся поверхность пояса, ограниченнаго плоскостями $x = x_1$; $x = x_2$ будетъ:

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} dx = 2\pi \int y ds \dots (331)$$

Примѣръ. Определить величину (площадь) поверхности, образованной вращеніемъ циклоиды около ея основанія (фиг. 216').

Уравненіе циклоиды (см. § 223) суть:

$$x = a (\varphi - \sin \varphi) \dots \dots \dots (380)$$

$$y = a (1 - \cos \varphi) \dots \dots \dots (381)$$

Вычисляемъ:

$$dx = a (1 - \cos \varphi) d\varphi$$

$$dy = a \cdot \sin \varphi d\varphi$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{a^2 (1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} d\varphi$$

$$= a \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} d\varphi$$

$$ds = a \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi} d\varphi = 2a \sin \left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi.$$

Вставляя въ (531), получимъ:

$$\begin{aligned}
 2\pi \int y \cdot 2a \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi &= 4\pi a^2 \int (1 - \cos\varphi) \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi \\
 &= 4\pi a^2 \int \left(1 - \cos 2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi \\
 &= 4\pi a \int \left[1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right] \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \\
 &= 4\pi a \int \left[2 - 2\cos^2 \frac{\varphi}{2}\right] \sin \frac{\varphi}{2} \cdot 2d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
 &= 16\pi a \int \left[1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right] \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
 &= 16\pi a \cdot \left[\int \sin \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \int \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot d\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Если хотимъ получить поверхность всего тѣла вращения, то должны принять за пределы 0 и 2π , потому что мѣлѣ φ сем. § 223), при описаннн толькою катящагося круга полной вѣтви циклоиды, измѣняется отъ 0 до 2π . Получимъ:

$$\begin{aligned}
 &16\pi a^2 \left[\int_0^{2\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot d\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right) \right] \\
 &= 16\pi a^2 \left[-\cos \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \cos^3 \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} \\
 &= 16\pi a^2 \left[\cos \pi + \cos 0 + \frac{1}{3} \cos^3 \pi - \frac{1}{3} \cos^3 0 \right] \\
 &= 16\pi a^2 \left[1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right] = 16\pi a^2 \left[2 - \frac{2}{3} \right] = 16\pi a^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{64\pi a^2}{3}.
 \end{aligned}$$

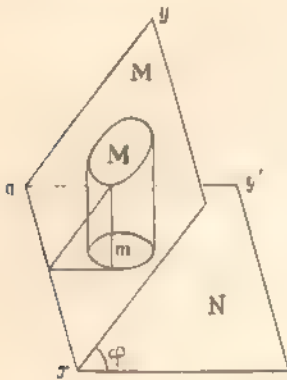
Итакъ, полная поверхность тѣла, происхождшаго отъ вращения циклоиды около ея осязани $= \frac{64\pi a^2}{3}$. Поверхность шара, образованнаго отъ вращения тѣла до диаметра образующаго круга $= 4\pi a^2$. Следовательно поверхность циклоидальнаго тѣла болѣе поверхности этого шара въ $\frac{16}{3}$ разъ.

Проекція площади на плоскость.

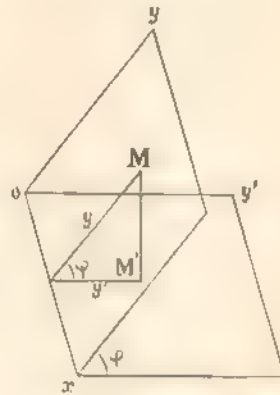
§ 295 Представимъ себѣ двѣ плоскости M и N (фиг. 217). Предположимъ, что въ плоскости M дана фигура M . Геометрическое мѣсто осво-

ваий перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ лини ограничивающей M , на плоскость N , называется проекцією фигуры m на плоскость N .

Пусть φ есть уголъ, составляемый плоскостью M фигуры и плоскостью N ея проекции. Примемъ прямую пересѣченія этихъ плоскостей за ось x и какой-нибудь перпендикуляръ, проведенный къ ней въ плоскости M , за ось y . Перпендикуляръ же проведенный къ ox изъ o въ плоскости N примемъ за ось y' другой системы, лежащей въ N .



Фиг. 217.



Фиг. 218.

Изъ чертежа (фиг. 218) видно, что ордината проекции M' равна ординатѣ точки M помноженной на $\cos \varphi$;

$$y' = y \cos \varphi (412)$$

Но по (415):

$$\text{площадь } M = \int y dx$$

$$\text{площадь } m = \int y' da = \int y \cos \varphi . dx = \cos \varphi \int y dx = M \cos \varphi$$

Слѣовательно: *площади проекции равны произведенію площади проектируемой фигуры на косинусъ угла, составляемаго плоскостью фигуры съ плоскостью проекции:*

$$m = M \cos \varphi (533)$$

Вычисленіе площадей поверхностей.

§ 296. Мы видели въ § 294 какъ вычисляются площади поверхностей вращения; посмотримъ, какъ вычисляются площади кривыхъ бытъ ни было закономѣрныхъ поверхностей.

Элементъ поверхности можно представить собою какъ элементъ какой-нибудь плоскости. Пусть уголъ, составляемый касательною къ элементу съ плоскостью (x, y) будетъ φ . Назовемъ элементъ поверхности ds , прое-

цию этого элемента на плоскости (x, y) обозначим чрез $d\sigma'$. По сказанному въ предыдущемъ параграфѣ:

$$d\sigma = d\sigma' \cdot \cos \varphi \dots \dots \dots (534)$$

Опредѣлимъ теперь уголъ φ . Уголъ φ , составленный касательною плоскостью къ плоскости (x, y) равенъ углу, составленному соответственно перпендикулярными къ нимъ нормалью и осью z . Но косинусъ угла, составляемаго нормалью съ осью z опредѣляется третьей изъ формулъ (395). Слѣдовательно:

$$\cos \varphi = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \dots \dots \dots (535)$$

Обыкновенно частныя производныя, заключенныя въ этой формулѣ, замѣняются частными производными отъ z по x и по y . Дѣлается это такъ. Если $f(x, y, z) = 0$ есть уравнение данной поверхности, то и полный дифференциалъ отъ $f(x, y, z)$ тоже равенъ нулю. По формулѣ (256) полного дифференциала имѣемъ слѣдовательно:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0 \dots \dots \dots (536)$$

При опредѣленіи изъ этого уравненія частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ мы должны въ немъ y считать постояннымъ, слѣдовательно $\frac{\partial f}{\partial y}$ нулемъ. Поэтому:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \dots \dots \dots (537)$$

Точно также найдемъ изъ (536), полагая x постояннымъ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \dots \dots \dots (538)$$

Эти величины $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ встрѣчаются въ анализѣ весьма часто, и для нихъ существуетъ особое обозначеніе буквами p и q :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \dots \dots \dots (539)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \dots \dots \dots (540)$$

Чтобы замѣнить въ (535) частныя производныя отъ f частными производными отъ z , дѣлимъ и числителя и знаменателя на $\frac{df}{dz}$. Получимъ:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \dots \dots \dots (541)$$

Подставляя эту величину въ (534), получимъ:

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \dots (542)$$

Принимая за элементъ проекціи $dx dy$ (фиг. 219), получимъ изъ (542):

$$dx dy = \frac{d\sigma}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

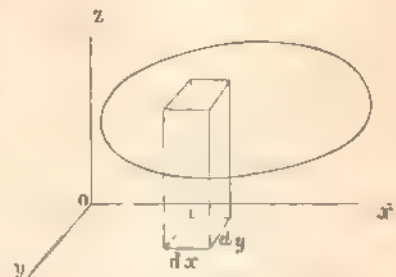
откуда

$$\sqrt{p^2 + q^2 + 1} dx dy = \text{дифференціалъ поверхности} \dots (543)$$

Интегрируя, получимъ:

$$\sigma = \iint \sqrt{p^2 + q^2 + 1} dx dy \dots \dots (544)$$

По этой формулѣ и вычисляются площади поверхностей, хотя бы онѣ и не были поверхностями вращенія.



Фиг. 219.

ГЛАВА III.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій.

О п р е д ѣ л е н і е.

§ 297. Дифференціальнымъ уравненіемъ n -го порядка съ двумя переменными называется уравненіе, заключающее въ себѣ: независимое переменнаго, функцию этого переменнаго и производныя или дифференціалы этой функции до n -го порядка включительно.

Такъ наиримѣръ дифференціальное уравненіе 1-го порядка съ двумя переменными имѣетъ видъ:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0;$$

уравненіе же:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

будетъ второго порядка.

Интегрировать дифференціальное уравненіе съ двумя переменными x, y значитъ найти такое соотношеніе между независимымъ перемен-

нымъ x и его функциею y , которое не заключало бы производныхъ, но удовлетворяло бы данному дифференциальному уравненію то есть, приводилось бы дифференцированиемъ къ данному.

Напримеръ, интеграль дифференциальнаго уравненія

$$(1 + x^2) \frac{dy}{dx} - xy = a \dots \dots \dots (545)$$

будеть:

$$y = ax + C \sqrt{1 + x^2} \dots \dots \dots (546)$$

потому что дифференцированиемъ его придетъ къ (545). Именно: дифференцируя (546), получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = a + \frac{Cx}{\sqrt{1 + x^2}} \dots \dots \dots (547)$$

Опредѣливъ изъ (546):

$$C = \frac{y - ax}{\sqrt{1 + x^2}}$$

и вставляя эту величину въ (547), получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = a + \frac{xy - ax^2}{1 + x^2}$$

или:

$$\frac{dy}{dx} (1 + x^2) = a + ax^2 + xy - ax^2.$$

Здѣсь $+ ax^2$ и $- ax^2$ уничтожаются и получается данное дифференциальное уравненіе (545).

Отдѣленіе переменныхъ.

§ 298. Всего проще интегрируются тѣ уравненія, въ которыхъ можно вынести переменныя x и dx въ одну сторону уравненія, а переменныя y и dy въ другую; другими словами, когда легко привести данное уравненіе къ виду:

$$f(x) \cdot dx = \varphi(y) \cdot dy \dots \dots \dots (548)$$

Приведеніе дифференциальнаго уравненія къ такому виду называется *отдѣленіемъ переменныхъ*.

Если такое отдѣленіе переменныхъ исполнено, то изъ (548) получимъ:

$$\int f(x) dx = \int \varphi(y) dy$$

и останется только вычислить интегралы.

Примѣръ. Интегрировать уравненіе:

$$x^m + y^n \frac{dy}{dx} = 0 :$$

Отдѣливъ переменныя, получимъ:

$$x^m dx + y^n dy = 0.$$

откуда:

$$\int x^m dx + \int y^n dy = 0.$$

Отсюда получимъ:

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{n+1}}{n+1} = C.$$

Мы увидимъ, что далеко не во всѣхъ уравненіяхъ переменныя такъ легко отдѣляются.

Однородныя уравненія.

§ 299. Однородною функциею переменныхъ x, y называется такая ихъ функция, всѣ члены которой одинаковаго размѣрена по отношенію къ переменнымъ. Напримѣръ:

$$1) x^2 + y^2 + x + y$$

есть однородная функция 1-го порядка, функции:

$$Ax \sqrt{x^2 + 3xy + x^2} + Bxy^2 + y^2 \dots \dots (549)$$

однородныя функция 2-го порядка, потому что всѣ члены ея 2-го размѣренія относительно переменныхъ.

Всякая однородная функция m -го порядка можетъ быть выражена въ видѣ,

$$x^m f\left(\frac{y}{x}\right) \dots \dots \dots (550)$$

Напримѣръ (549), если въ ней вывести за скобки x , получимъ видъ,

$$x \left[A \sqrt{1 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + 1} + B\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \right]$$

Однороднымъ дифференціальнымъ уравненіемъ съ двумя переменными называется уравненіе вида:

$$M dx + N dy = 0,$$

въ которомъ M и N суть однородныя функціи отъ (x, y) .

Такая уравненія интегрируются слѣдующимъ образомъ. По формулѣ (550) его приводятъ къ виду:

$$x^m f\left(\frac{y}{x}\right) dx + x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Дѣли на x^m , получаютъ:

$$f\left(\frac{y}{x}\right) dx + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0 \dots \dots (551)$$

Дѣлають затѣмъ подстановку:

$$\frac{y}{x} = z.$$

откуда:

$$dy = x dz + z dx.$$

Подставляя эти величины $\left(\frac{y}{x}\right)$, dy въ (551), получаемъ:

$$f(z) dx + \varphi(z) \cdot [x dz + z dx] = 0.$$

или:

$$[f(z) + z \cdot \varphi(z)] dx + x \cdot \varphi(z) \cdot dz = 0.$$

Для обѣ части этого уравненія на $x [f(z) + z\varphi(z)]$, получаемъ уравненіе:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\varphi(z) dz}{f(z) + z \cdot \varphi(z)} = 0 \dots \dots \dots (552)$$

въ которомъ переменныя оказываются отдѣльными.

Изъ (562) получимъ:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{\varphi(z) dz}{f(z) + z \cdot \varphi(z)} = 0 \dots \dots \dots (553)$$

Остается только вычислить интегралы, или, какъ говорить, *поставить* *привести къ квадратурамъ* (къ вычисленію интеграловъ вида $\int F(x) dx$).

Затѣмъ нужно еще вставить $\frac{y}{x}$ вмѣсто z .

Примѣръ. Интегрировать уравненіе:

$$x dy - y dx = dx \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Здѣсь переменныя не отдѣляются: способъ § 298-го непримѣнимъ.

Внося x за скобки, получимъ:

$$dy - \left(\frac{y}{x}\right) dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

или:

$$\left[\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \left(\frac{y}{x}\right) \right] dx = dy;$$

полагая

$$\left(\frac{y}{x}\right) = z, \text{ откуда } dy = x dz + z dx,$$

получимъ:

$$[\sqrt{1 + z^2} + z] dx = x dz + z dx,$$

или:

$$\sqrt{1 + z^2} dx = x dz.$$

Для на $x \sqrt{1 + z^2}$ получимъ:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

Здѣсь переменныя уже отдѣлены. Получимъ:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Вычисляя квадратуры (интегралы), и пользуясь формулою [1] параграфа 270-го, получимъ:

$$\lg x = \lg (x + \sqrt{1 + z^2}) + C (554)$$

Остается замѣнить, обратно, z чрезъ $\frac{y}{x}$; послѣ этой замѣны получимъ:

$$\lg x = \lg \left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right) + C (555)$$

Было бы удобнѣе, пользуясь совершенною произвольностью постояннаго C , дать ему въ (554) видъ $\lg c$. Тогда получили бы:

$$\lg x = \lg (x + \sqrt{1 + z^2}) + \lg c,$$

или:

$$\lg x - \lg c = \lg (x + \sqrt{1 + z^2}),$$

или

$$x = c (z + \sqrt{1 + z^2}).$$

Подставляя, вмѣстѣ z , величину $\frac{y}{x}$, получимъ:

$$x = c \left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right)$$

или:

$$x^2 = c (y + \sqrt{x^2 + y^2})$$

или:

$$(x^2 - cy)^2 = c^2 (x^2 + y^2)$$

или:

$$x^4 + c^2 y^2 - 2cx^2 y = c^2 x^2 + c^2 y^2$$

или:

$$x^4 - 2cx^2 y = c^2 x^2$$

или наконецъ:

$$x^2 = 2cy + c^2 (556)$$

Проверимъ это рѣшеніе дифференцируя, получимъ:

$$2x dx = 2c dy$$

откуда:

$$\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{c} (557)$$

Для (556) на c^2 , получимъ:

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{2y}{c} - 1 = 0$$

откуда, пользуясь (557), получимъ:

$$\frac{r^2}{x^3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{2y}{x} \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

отсюда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}$$

или:

$$x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx,$$

то есть данное дифференціальное уравненіе.

Уравненіе $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x} \right) + f(x) \cdot F\left(\frac{y}{x}\right).$

§ 300. Такою же подстановкою $\frac{y}{x} = z$ приводимъ къ квадратурѣ уравненіе

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x} \right) + f(x) \cdot F\left(\frac{y}{x}\right) \dots \dots \dots (558)$$

Дѣйствительно, полагая $z = \frac{y}{x}$, откуда $dy = x dz + z dx$, получимъ:

$$x dz + z dx = z dx + f(x) \cdot F(z) dx$$

или

$$x dz = f(x) F(z) dx$$

или

$$\frac{dz}{F(z)} = \frac{f(x) dx}{x}$$

откуда:

$$\int \frac{dz}{F(z)} + \int \frac{f(x) dx}{x} \dots \dots \dots (559)$$

Уравненіе вида.

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q.$$

§ 301. Довольно значительный классъ уравненій 1-го порядка сводится въ формулѣ:

$$\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = \varphi(x) \dots \dots \dots (560)$$

при всемъ разнообразіи функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Положимъ, для краткости: $f(x) = P$; $\varphi(x) = Q$, такъ что уравненіе (560) представится въ видѣ.

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \dots \dots \dots (561)$$

Оно интегрируется подстановкою:

$$y = uz \dots \dots \dots (562)$$

А именно: изъ (562) слѣдуетъ:

$$u \frac{dz}{dx} + \frac{du}{dx} z = \frac{dy}{dx}$$

вслѣдствіе чего (561) принимаетъ видъ:

$$u \frac{dz}{dx} + \frac{du}{dx} z + Puz = Q$$

или:

$$u \frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + Pu \right) z + Q \dots \dots \dots (563)$$

Избираемъ такіе u и z , чтобы $\frac{du}{dx} + Pu = 0$.

Для этого нужно, чтобы:

$$\frac{du}{u} = -P dx$$

откуда:

$$\begin{aligned} \lg u &= - \int P dx \\ u &= e^{-\int P dx} \dots \dots \dots (564) \end{aligned}$$

Между тѣмъ (563) при такихъ u и z обратится въ:

$$u \frac{dz}{dx} = Q \dots \dots \dots (565)$$

Но подставляя въ (565) величину u изъ (564), получимъ:

$$e^{\int P dx} \frac{dz}{dx} = Q$$

или:

$$\frac{dz}{dx} = Q e^{\int P dx}$$

Отсюда:

$$z = \int Q e^{\int P dx} dx + C$$

и вслѣдствіе этого согласно (562) и (564):

$$y = uz = e^{-\int P dx} z = e^{-\int P dx} \left[\int Q e^{\int P dx} dx + C \right] \dots \dots \dots (566)$$

Примѣръ. $\frac{dy}{dx} + y = x^2$.

Здѣсь $P = 1$; $Q = x^2$. Слѣдовательно по (566):

$$y = e^{-\int dx} \left[\int x^2 e^{\int dx} dx + C \right] = e^{-x} \left[\int x^2 e^x dx + C \right]$$

или:

$$y = C e^{-x} + e^{-x} \int x^2 e^x dx = (C e^{-x} + e^{-x} (x^2 + 2x + 2)) e^x \dots$$

Условіе интегрируемости полного дифференціала.

§ 302 Мы видели въ § 152-мъ, что, если

$$z = f(x, y), \dots \dots \dots (567)$$

то величина

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \dots (568)$$

называется полнымъ дифференціалъ-мъ функции $f(x, y)$.

Дифференціалъ функции одного переменнаго всегда имѣетъ свой интегралъ, хотя бы его было трудно найти или даже мы не умѣли бы его найти. Дифференціалъ же многихъ переменныхъ не всегда имѣетъ интегралъ. Можетъ найтись такой дифференціалъ, для котораго не существуетъ соответствующаго интеграла. Мы сейчасъ это покажемъ, выяснивъ, каковы условія должны быть соблюдены для того, чтобы данный дифференціалъ обладалъ соответствующимъ ему интеграломъ для того чтобы данный дифференціалъ былъ *полнымъ* дифференціаломъ некоторой функции.

Посмотримъ, именно, какому условію должны удовлетворять дифференціалъ вида:

$$M dx + N dy \dots \dots \dots (569)$$

для того, чтобы обладать интеграломъ. Здѣсь M и N суть некоторыя функции переменныхъ x и y .

Сравнивъ (569) съ (568), видимъ, что:

$$M = \frac{\partial z}{\partial x}; N = \frac{\partial z}{\partial y} \dots \dots \dots (570)$$

Изъ этихъ равенствъ (570) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \dots \dots \dots (571)$$

Вотъ какому условію должны удовлетворять M и N , для того, чтобы дифференціалъ:

$$M dx + N dy$$

имѣлъ бы интегралъ, то есть была бы такая $f(x, y)$, которая, при дифференцировании по x , давала бы M , при дифференцировании по y давала бы N .

Итак, могут существовать такие дифференциалы:

$$M dx + N dy,$$

для которых не имеется функции $f(x, y)$, обладающей сказанными свойствами, то есть нетъ интеграла.

Уравнение (571) называется условием интегрируемости дифференциала $M dx + N dy$. Для того, чтобы $M dx + N dy$ было полным дифференциаломъ, необходимо соблюдение условия (571).

Существование дифференциаловъ, не имѣющихъ интеграла, имѣетъ чрезвычайно важное значеніе въ физикѣ, равно какъ и условие интегрируемости.

Интегрирующій множитель.

§ 303. Покажемъ на дифференциальномъ уравненіи 1-го порядка чрезвычайно важное свойство дифференциальныхъ уравненій.

Рассмотримъ уравненіе

$$f(x, y) \cdot dx + \varphi(x, y) dy = 0. \dots\dots\dots (572)$$

Пусть:

$$F(x, y) = C \dots\dots\dots (573)$$

будетъ его интегралъ. Продифференцировавъ (573), получимъ:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0. \dots\dots\dots (574)$$

Это уравненіе (574) представляетъ связь между dx и dy совершенно такую же какъ уравненіе (572), а такъ какъ существованіе интеграла (573) предполагаетъ опредѣленную связь между dx и dy , то слѣдствительно (574) можетъ отличаться отъ (572) только нѣкоторымъ множителемъ, на который всегда можно помножить уравненіе, не измѣняя его. Пусть M есть тотъ множитель, на который надо помножить уравненіе (572) для того, чтобы получить (574). Отъ такого умноженія на M уравненіе не измѣнится, но левая часть его сообразится полнымъ дифференциаломъ, такъ какъ левая часть (574)-го имѣетъ видъ полного дифференциала $dF(x, y)$.

Итакъ, вотъ къ какому выводу мы пришли для всякаго уравненія:

$$f(x, y) \cdot dx + \varphi(x, y) dy = 0 \dots\dots\dots (575)$$

существуетъ такой множитель, помноженіемъ на который левая часть данного уравненія (575) обращается въ полный дифференциалъ $dF(x, y)$; интегралъ же $F(x, y)$ этого дифференциала, будучи приравненъ постоянному и представитъ собою интегралъ $F(x, y) = C$ данного уравненія.

Изъ сказаннаго соотношенія между уравненіями (572) и (574) слѣдуетъ, что:

$$M \cdot f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \dots\dots\dots (576)$$

$$M \cdot \varphi(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \dots\dots\dots (577)$$

Но:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

потому что обѣ эти величины равны: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$. Следовательно

$$\frac{\partial (M \cdot f(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial (M \cdot \varphi(x, y))}{\partial x} \dots \dots \dots (578)$$

Это уравненіе и служить для опредѣленія множителя M , называемаго *интегрирующимъ множителемъ*.

Еслибы это уравненіе (578) легче интегрировалось, чѣмъ данное уравненіе (572), то получился бы общій способъ интегрированія, но къ несчастью въ большинствѣ случаевъ (578) труднѣе интегрируется, чѣмъ (572). Хотя бываетъ и обратно, какъ увидимъ ниже. Во всякомъ случаѣ, свойство интегрирующаго множителя имѣть капитальное значеніе въ теоріи дифференціальнаго уравненій.

Убѣдимся на примѣрѣ въ существованіи интегрирующаго множителя.

Примѣръ. Уравненіе $(x^m + y) dx - x dy = 0$ мы не умѣемъ интегрировать. Лѣвая часть ея не имѣетъ интеграла, потому что

$$\frac{\partial (x^m + y)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial (-x)}{\partial x} = -1$$

величины 1 и -1 не равны: условие интегрируемости

$$\frac{\partial (x^m + y)}{\partial y} = \frac{\partial (-x)}{\partial x} \text{ не соблюдено.}$$

Но помножимъ данное уравненіе на $\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Получимъ:

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} - x^{m-2} dx = 0; \dots \dots \dots (579)$$

теперь сразу видно, что лѣвая часть этого уравненія есть полный дифференціалъ:

$$d \left[\frac{y}{x} - \frac{x^{m-1}}{m-1} \right].$$

Интегралъ этого дифференціала есть:

$$\frac{y}{x} - \frac{x^{m-1}}{m-1}.$$

Интегралъ даннаго уравненія, следовательно, есть

$$\frac{y}{x} - \frac{x^{m-1}}{m-1} = C.$$

Теперь и условие интегрируемости:

$$\frac{\partial \left(x^{m-2} + \frac{y}{x^2} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{1}{x} \right)}{\partial x}$$

соблюдено, потому что:

$$\frac{\partial \left(x^{m-2} + \frac{y}{x^2} \right)}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{x} \right)}{\partial x} = \frac{1}{x^2}.$$

Интегрирующих множителей данного уравнения существует бесконечное множество.

§ 304. Итак, если имеем дифференциальное уравнение:

$$f(x, y) \cdot dx + \varphi(x, y) \cdot dy = 0 \dots \dots \dots (580)$$

и M есть его интегрирующий множитель, а $F(x, y) = 0$, интеграль, то

$$M \cdot [f(x, y) \cdot dx + \varphi(x, y) \cdot dy] = dF(x, y) = 0.$$

Помножимъ это уравнение еще на какую бы то ни было функцию

$$T[F(x, y)].$$

Получимъ:

$$MT[F(x, y)] \cdot [f(x, y) \cdot dx + \varphi(x, y) \cdot dy] = T[F(x, y)] \cdot dF(x, y)$$

$$= d \int T[F(x, y)] \cdot dF(x, y).$$

Последнее равенство очевидно. Но последнее выражение есть полный дифференциалъ отъ $\int T[F(x, y)] \cdot dF(x, y)$. Следовательно, левая часть уравнения (580) обращается въ полный дифференциалъ не только отъ умножения на M , но и отъ умножения на $MT[F(x, y)]$. Значитъ всякое дифференциальное уравнение 1 го порядка имѣетъ бесконечное множество интегрирующихъ множителей, потому что существуетъ бесконечное множество функций $T[F(x, y)]$. Все интегрирующие множители имѣютъ видъ:

$$MT[F(x, y)]$$

призвеченія M на функцию отъ $F(x, y)$.

Примѣръ: $x \, dy - y \, dx = 0$. Здѣсь:

$$f(x, y) = \text{коэффициентъ при } dx = -y$$

$$\varphi(x, y) = \text{коэффициентъ при } dy = x.$$

Данное уравнение легко преобразовать въ

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\lg y = \lg x + \lg C$$

$$\frac{y}{x} = C.$$

Уравнение: $x dy - y dx = 0$ легко проинтегрировалось, и его интегралъ получается:

$$\frac{y}{x} = C.$$

Слѣдовательно, то, что мы называли $F(x, y)$, есть $\frac{y}{x}$.

Но анимъ выводамъ опредѣлимъ интегрирующій множитель M . Именно: по (576):

$$M \cdot f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}.$$

Въ настоящемъ случаѣ это будетъ:

$$- M \cdot y = \frac{\partial \left(\frac{y}{x} \right)}{\partial x} = - \frac{y}{x^2}.$$

Слѣдовательно:

$$M = - \frac{1}{x^2}.$$

По сказанному всякая величина $MT (F(x, y))$, которая въ настоящемъ случаѣ равна $MT \left(\frac{y}{x} \right)$, будетъ тоже интегрирующимъ множителемъ. Каждый изъ нихъ будетъ обращать лѣвую часть

$$x dy - y dx$$

даннаго уравненія въ полный дифференціалъ. Возьмемъ нѣсколько функций $T \left(\frac{y}{x} \right)$.

1) Положимъ:

$$T \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{y}{x}.$$

$$\text{Множитель будетъ } \frac{My}{x} = - \frac{y}{x^2}.$$

Получимъ:

$$- \frac{y}{x^2} (x dy - y dx) = - \frac{yx dy - y^2 dx}{x^2} = d \left(\frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} \right).$$

2) Положимъ:

$$T \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{\left(\frac{y}{x} \right)} = \frac{x}{y}. \text{ Множитель} = \frac{M}{y} = \frac{1}{xy}.$$

$$\frac{1}{xy} (x dy - y dx) = - \left[\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} \right] = - d \lg \frac{y}{x}.$$

3) Положимъ:

$$T \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}. \text{ Множитель} = - \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 (x dy - y dx) = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Какую бы функцию отъ $\left(\frac{y}{x} \right)$ мы ни взяли, всегда, помноживъ лѣвую часть $x dy - y dx$ данного уравненія на эту функцию и на M , получили бы полный дифференціалъ, точно также какъ получили здѣсь в лѣвые дифференціалы:

$$d \left(\frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} \right); \quad d \lg \left(\frac{y}{x} \right); \quad - d \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \right).$$

Замѣтимъ, что роль $T \left(\frac{y}{x} \right)$ въ настоящемъ случаѣ разумѣется только такая функция, которая не содержитъ никакого другого переменнаго, кромѣ $\left(\frac{y}{x} \right)$. Напримеръ $x + \frac{y}{x}$ уже не годится потому, что въ немъ входитъ еще x . Такая же, напримеръ, функция:

$$\frac{\left(\frac{y}{x} \right)^3 + \left(\frac{y}{x} \right)^2}{1 + 5 \left(\frac{y}{x} \right)}$$

— годится.

Геометрическое значеніе дифференціального уравненія и его интеграла.

§ 305. Дифференціальное уравненіе перваго порядка имѣетъ видъ:

$$f(x, y) \cdot dx + \varphi(x, y) dy = 0. \dots \dots (581)$$

Отсюда:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)}. \dots \dots (582)$$

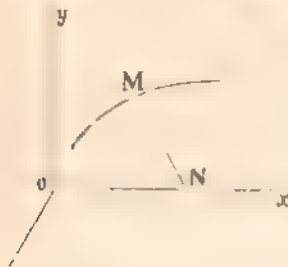
Такимъ образомъ дифференціальное уравненіе представляетъ собою нѣкоторое соотношеніе между производной $\frac{dy}{dx}$ и переменными (x, y) . Геометрически говоря, дифференціальное уравненіе представляетъ нѣкоторое геометрическое свойство касательной или находящихся въ связи съ ка-

сательною линиѣ. Интегралъ же дифференціальнаго уравненія содержитъ въ себѣ произвольное постоянное интегрирания C , и потому получается въ видѣ:

$$F(x, y, c) = 0 \dots \dots \dots (583)$$

и представляетъ собою цѣлый рядъ кривыхъ; для каждаго значенія C получается своя кривая.

Съ геометрической точки зрѣнія, интегрировать дифференціальное съ двумя переменными, значить найти кривыя, обладающія тѣми общими свойствами, которое выражено этимъ уравненіемъ. Свойства же эти относятся, гдѣ или иначе, къ $\frac{dy}{dx}$ равной тангенсу угла наклоенія къ сательной



Фиг. 220.



Фиг. 221.

Примѣръ. Найти кривыя, нормаль которыхъ имѣла бы постоянную, для всѣхъ точекъ этихъ кривыхъ, величину a .

Длина нормали MN (фиг. 220) выражается формулою (308)

$$MN = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a \dots \dots \dots (308)$$

Слѣдовательно, требуемое отъ кривыхъ свойство выражается дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$y^2 + y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2.$$

Для интегрированія представимъ его въ видѣ

$$\begin{aligned} dx &= \frac{y \, dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} \\ \int dx &= \int \frac{y \, dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} \\ x &= \sqrt{a^2 - y^2} + c \\ (x - c)^2 + y^2 &= a^2 \dots \dots \dots (584) \end{aligned}$$

Этотъ интегралъ (584) даннаго уравненія (308) представляетъ себѣ, согласно § 20-ому, окружности радиуса которыхъ равны a , центры же расположены по оси x (фиг. 221). Дѣйствительно, нормали ихъ имѣють постоянную величину во всѣхъ ихъ точкахъ, потому что онѣ равны a .

Особый интеграль.

§ 306. Однако съ перваго взгляда можетъ показаться очель страннымъ, что дифференціальному уравненію (308) удовлетворяють не только линіи, выражаемая интеграломъ (584) при различныхъ значеніяхъ c , но и линія, выражаемая уравненіемъ

$$y^2 = a^2, \dots \dots \dots (585)$$

и горое не получается изъ (584) ни при какомъ значеніи c , и не выражаетъ собой вовсе окружности. Между тѣмъ, дѣйствительно, (585) удовлетворяетъ (308)-ому, потому что изъ него слѣдуетъ: $\frac{dy}{dx} = 0$, и лѣвая часть уравненія (308) обращается въ a^2 , чему равна и правая часть.

Сначала разьясимъ это дѣло геометрически. Уравненіе (585) представляетъ собою пару прямыхъ: $y = +a$; $y = -a$ (фиг. 221), нормали которыхъ равны a , какъ это требуется уравненіемъ (308). Значитъ (585) есть также интеграль (308)-го, но какой-то особенный, не получаемый изъ интеграла (584) ни при какомъ значеніи c .

Разьясимъ дѣло окончательно геометрическими свойствами, требуемыми уравненіемъ (308) обладаетъ не только рядъ кривыхъ, выражаемыхъ интеграломъ (584), но и совокупность этихъ кривыхъ, которая имѣетъ особую, не совпадающую съ этими кривыми, форму и особое уравненіе; въ нашемъ примѣрѣ эта совокупность есть пара прямыхъ.

Интеграль (585) называется *особымъ интеграломъ*. Итакъ, кромѣ обыкновеннаго интеграла

$$F(x, y, c) = 0,$$

дифференціальному уравненію

$$f(x, y) \cdot dx + \varphi(x, y) dy = 0$$

удовлетворяетъ еще *особый интеграль*, который не получается изъ обыкновеннаго ни при какомъ значеніи c , но выражаетъ собою отбивающую кривыхъ, выраженныхъ обыкновеннымъ интеграломъ, и потому (согласно § 184) можетъ быть найденъ исключеніемъ c изъ уравненій

$$F(x, y, c) = 0$$

$$\frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} = 0,$$

изъ коихъ первое есть обыкновенный интеграль данного уравненія, а второе получается приравненіемъ нулю произведной лѣвой части обыкновеннаго интеграла по c .

Такъ и въ нашемъ примѣрѣ, исключая c изъ уравненій

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2 \dots \dots \dots (586)$$

$$2(x - c) = 0,$$

получимъ:

$$y^2 = a^2, \dots \dots \dots (587)$$

представляющее собою особый интегралъ.

Въ подробныхъ курсахъ можно найти болѣе обстоятельное и болѣе строгое изслѣдованіе особыхъ интеграловъ.

Во многихъ вопросахъ надо быть осмотрительнымъ, чтобы не пропустить рѣшенія, доставляемаго особыми интегралами.

Линейное уравненіе n-го порядка.

§ 307. Перейдемъ теперь къ интегрированію *линейнаго* уравненія. Линейнымъ уравненіемъ n-го порядка называется такое, въ которомъ заключаются производныя различныхъ порядковъ, до n-го включительно причѣмъ всѣ онѣ въ первой степени, кромѣ того оно заключаетъ въ себѣ еще *y* въ первой степени и каки бы то ни было функции независимаго переменнаго *x*. Оно имѣетъ видъ:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = V, \dots \dots (588)$$

гдѣ *P, T, ... U, V* суть каки бы то ни было функции *x*.

Линейныя уравненія безъ 2-го члена.

§ 308. Членъ *V* уравненія (588) называется 2-мъ членомъ. Разсмотримъ уравненіе болѣе простое, именно, не заключающее въ себѣ 2-го члена. Такое уравненіе будетъ имѣть видъ.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = 0, \dots \dots (589)$$

Докажемъ его основное свойство, заключающееся въ томъ, что, *если ему удовлетворяютъ n функций: y₁, y₂, y₃, ... y_n, то и сумма этихъ функций (y₁ + y₂ + y₃ + ... + y_n), и даже сумма произведеній этихъ функций на какия-либо постоянныя (c₁y₁ + c₂y₂ + ... + c_ny_n), должны ему удовлетворять.*

Дѣйствительно, положимъ:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n, \dots \dots (590)$$

отсюда вычисляемъ:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + c_n \frac{dy_n}{dx} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= c_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + c_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \dots + c_n \frac{d^2 y_n}{dx^2} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= c_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + c_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \dots + c_n \frac{d^n y_n}{dx^n} \end{aligned}$$

Вставивъ эти величины въ (589), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} & c_1 \left[\frac{d^n y_1}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy_1}{dx} + U y_1 \right] \\ & + c_2 \left[\frac{d^n y_2}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy_2}{dx} + U y_2 \right] \\ & + \dots \dots \dots = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (591)$$

Но, по сдѣланному предположенію, каждая изъ $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ въ отдельности удовлетворяетъ уравненію (589)-му. Вслѣдствіе этого величины, стояща въ скобкахъ лѣвой части уравненія (591)-го, будутъ равны нулю, а потому и уравненіе это удовлетворится. Слѣдовательно, сумма $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ удовлетворитъ уравненію (591)-му, что и требовалось доказать.

Линейное уравненіе безъ 2-го члена и съ постоянными коэффициентами.

§ 309. Въ настоящемъ разсудствѣ мы рассмотримъ только тѣли линейныя уравненія, въ которыхъ нѣтъ 2-го члена V и коэффициенты P, Q, \dots, T, U суть величины постоянныя. Сдѣлаемъ въ такомъ уравненіи подстановку

$$y = e^{\int s \, dx} \dots \dots \dots (592)$$

Замѣтимъ предварительно, что изъ (592) слѣдуетъ по формулѣ (249)

$$dy = e^{\int s \, dx} d \int z \, dx = e^{\int s \, dx} z \, dx,$$

и потому:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{\int s \, dx} z, & \frac{d^2 y}{dx^2} &= e^{\int s \, dx} \left(\frac{dz}{dx} + z s \right); \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= e^{\int s \, dx} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + 3z \frac{ds}{dx} + z^2 s \right) \end{aligned}$$

Подставляя эти величины въ данное уравненіе

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + U y = 0, \dots \dots (593)$$

собрадемъ на $e^{\int s \, dx}$ и сдѣлавъ приведеніе, получимъ:

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots + (z^n + P_1 z^{n-1} + \dots + T_1 z + U) = 0, \dots \dots (594)$$

Если коэффициенты P, Q, \dots, T, U , согласно сдѣланному предположенію, постоянны, то и коэффициенты $P_1, Q_1, \dots, T_1, U_1$, а слѣдовательно и корни уравненія:

$$z^n + P_1 z^{n-1} + \dots + T_1 z + U = 0 \dots \dots (595)$$

постоянны. Положимъ, что эти корни суть: $r_1, r_2 \dots r_n$. Тогда:

$$z = r,$$

гдѣ r есть любой изъ такихъ корней, представляетъ собою интегралъ уравненія (594)-го, потому что, вставляя въ него r вмѣсто z , обратимъ въ нуль величину, стоящую въ скобкахъ, такъ какъ r есть корень уравненія (595)-го; величина же $\frac{a^{n-1}z}{dx^{n-1}}$ будетъ нулемъ, потому что r —постоянное, и уравненіе (594) такимъ образомъ удовлетворится. Но если $z = r$ есть корень уравненія (594)-го, то, согласно (592):

$$y = e^{\int r dx} = ce^{rx}$$

будетъ интеграломъ уравненія (593)-го. Если же такъ, то, на основаніи теоремы предъидущаго параграфа, и

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x} + \dots + c_n e^{r_n x} \dots \dots \dots (596)$$

будетъ интеграломъ даннаго уравненія (593)-го.

Примѣръ: $\frac{d^2 y}{dx^2} - n^2 y = 0$.

Дѣлаемъ подстановку $y = e^{\int s dx}$. Вычисляемъ:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int s dx} s \dots \dots \dots (597)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{\int s dx} \left(\frac{ds}{dx} + s^2 \right) = e^{\int s dx} \left(\frac{ds}{dx} + s^2 \right).$$

Внося эти величины въ данное уравненіе, получимъ:

$$e^{\int s dx} \left[\frac{ds}{dx} + s^2 \right] - n^2 e^{\int s dx} = 0,$$

или,

$$\frac{ds}{dx} + (s^2 - n^2) = 0.$$

Корни уравненія

$$s^2 - n^2$$

суть $r_1 = +n$; $r_2 = -n$. Следовательно, по (596):

$$y = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx} \dots \dots \dots (598)$$

З а м ѣ ч а н і е.

§ 310. Интересующихся интегрированіемъ линейныхъ уравненій съ переменными коэффициентами и со 2-мъ членомъ V и уравненіями не линейными высшихъ порядковъ отсылаемъ къ подробнымъ курсамъ и мемуарамъ.

Здѣсь же мы ограничимся замѣчаніемъ, что степень дифференціальнаго уравненія называется наибольшая степень, въ которъ и въ него вхо-

дугъ производная $\frac{dy}{dx}$ или функция y . Порядкомъ же его называется наибольшій порядокъ входящихъ въ него производныхъ.

Дифференціальныя уравненія съ частными производными.

Образованіе уравненій съ частными производными.

§ 311. Существуютъ такія уравненія, интегралы которыхъ содержатъ уже не произвольныя постоянныя, но произвольныя функции.

Пользуясь, наиримѣръ, что имѣемъ такое конечное (не дифференціальное) уравненіе

$$y - bz = f(x - az), \dots \dots \dots (599)$$

гдѣ f есть произвольная (не извѣстно какая) функция отъ $(x - az)$; z есть функция отъ независимыхъ переменныхъ x и y .

Продифференцировавъ уравненіе (599) по x , получимъ:

$$\begin{aligned} b \frac{\partial z}{\partial x} &= f'(x - az) - a \frac{\partial z}{\partial x} f'(x - az) \\ &= f'(x - az) \cdot \left(1 - a \frac{\partial z}{\partial x}\right) \dots \dots \dots (600) \end{aligned}$$

Продифференцируемъ уравненіе (599) по y . Получимъ:

$$1 - b \frac{\partial z}{\partial y} = - f'(x - az) \left(- a \frac{\partial z}{\partial y} \right) = f'(x - az) \cdot a \frac{\partial z}{\partial y} \quad (601)$$

Исключимъ изъ уравненій (600) и (601) $f'(x - az)$. Получимъ: изъ (600):

$$f'(x - az) = \frac{b \frac{\partial z}{\partial x}}{a \frac{\partial z}{\partial x} - 1}$$

изъ (601):

$$f'(x - az) = \frac{1 - b \frac{\partial z}{\partial y}}{a \frac{\partial z}{\partial y}}$$

а потому:

$$\frac{b \frac{\partial z}{\partial x}}{a \frac{\partial z}{\partial x} - 1} = \frac{\left(1 - b \frac{\partial z}{\partial y}\right)}{a \frac{\partial z}{\partial y}}$$

или:

$$+ ab \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + 1 + ab \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - b \frac{\partial z}{\partial y}$$

или

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1. \dots \dots \dots (602)$$

Это уравнение (602) произошло от дифференцирования уравнения (599) и потому (599) есть его интеграл. Это можно впрочем проверить еще такъ: опредѣлимъ z изъ (599):

$$z = \frac{y}{b} - \frac{f(x - az)}{b}$$

Вставивъ эту величину въ (602) получимъ.

$$a \cdot \frac{\partial \left[\frac{y}{b} - \frac{f(x - az)}{b} \right]}{\partial x} + b \frac{\partial \left[\frac{y}{b} - \frac{f(x - az)}{b} \right]}{\partial y} = 1.$$

Произведя указанные здѣсь дифференцирования, получимъ

$$-\frac{a}{b} f'(x - az) + \frac{a^2}{b} f'(x - az) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{b}{b} + \frac{a}{b} f'(x - az) \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

или

$$-\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{a}{b} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

или

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

Но это уравненіе послужило намъ при проверкѣ исходнымъ пунктомъ. Следовательно z , опредѣленное изъ (599) удовлетворяетъ (602)-ому.

Итакъ (599) есть интегралъ дифференціального уравненія (602), и содержитъ въ себѣ произвольную функцію. Уравненіе (602) и представляетъ собой примѣръ такого уравненія, интегралъ котораго содержитъ произвольную функцію.

Дифференціальные уравненія съ частными производными.

§ 312. Этимъ свойствомъ обладаютъ всѣ дифференціальные уравненія, которыя содержатъ въ себѣ какъ (602) нѣсколько независимыхъ переменныхъ, частныя производныя по нимъ отъ нѣкоторой изъ функций z и самую z . Дифференціальные уравненія съ частными производными имѣютъ, следовательно, видъ:

$$f \left(x, y, \dots, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots \right) = 0. \dots \dots \dots (603)$$

Въ настоящемъ руководствѣ мы рассмотримъ только дифференціальные уравненія 1-го порядка и первой степени (линейныя) съ частными производными или двухъ независимыхъ переменныхъ x, y и ихъ функции z .

Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка съ частными производными.

§ 313. Общий видъ такого уравнения таковъ.

$$\varphi(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + \psi(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y, z), \dots (604)$$

гдѣ φ , ψ и f суть некоторыя функции. Для краткости введемъ слѣдующія обозначенія:

$$\varphi(x, y, z) = P$$

$$\psi(x, y, z) = Q$$

$$f(x, y, z) = R$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \dots \dots \dots (605)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q \dots \dots \dots (606)$$

И слѣдующе обозначимъ частныя производныя отъ z чрезъ p и q по-лучило всеобщее употребленіе. При этихъ сокращенныхъ обозначеніяхъ уравненіе (604) приметъ видъ:

$$Pp + Qq = R \dots \dots \dots (607)$$

И будемъ интегрировать такія уравненія. Мы уже видѣли на примѣрѣ предыдущаго параграфа, что интегралъ уравненія такого вида, какъ (607) можетъ означать произвольную функцию и имѣть видъ:

функция отъ x, y, z — произвольной функции отъ функции x, y, z , подобно уравненію (607). Пусть α и β суть некоторыя функции отъ x, y, z ; допустимъ, что интегралъ уравненія (607) будетъ:

$$\alpha = f(\beta), \dots \dots \dots (608)$$

гдѣ f есть какая произвольной функции, и рассмотримъ какими условіями должны удовлетворять α и β , чтобы (608) было интеграломъ (607)-го. Продифференцируемъ (608) по x и возьмемъ, отдѣльно, по y , помня, что α и β зависятъ отъ x , содержа его во первыхъ явно и, во вторыхъ, содержа z , которое есть функция x и что такая же двойная зависимость существуетъ для y . Дифференцируя (608) по x , получимъ:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = f'(\beta) \left(\frac{d\beta}{dx} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

Дифференцируя (608) по y , получимъ:

$$\frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = f'(\beta) \cdot \left(\frac{d\beta}{dy} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Введя обозначенія (605) и (606), получимъ

$$\frac{dx}{dt} + \frac{\partial x}{\partial z} \cdot p = f'(\beta) \cdot \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \cdot p \right) \quad \dots \quad (609)$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot q = f'(\beta) \cdot \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \cdot q \right) \quad \dots \quad (610)$$

Помноживъ (609) на P (610) на Q и сложивъ, получимъ

$$P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + (Pp + Qq) \frac{\partial x}{\partial z} = f'(\beta) \left[P \frac{\partial \beta}{\partial t} + Q \frac{\partial \beta}{\partial t} + (Pp + Qq) \frac{\partial \beta}{\partial z} \right].$$

Подставляя сюда на сѣхъ мѣстахъ (607) вмѣсто $Pp + Qq$ равную величину R , получимъ:

$$P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{\partial x}{\partial z} = f'(\beta) \left[P \frac{\partial \beta}{\partial t} + Q \frac{\partial \beta}{\partial t} + R \frac{\partial \beta}{\partial z} \right].$$

Это уравненіе обратится въ тождество при такомъ бы то ни было значеніи $f'(\beta)$ если:

$$\left. \begin{aligned} P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} + R \frac{\partial x}{\partial z} &= 0 \\ P \frac{\partial \beta}{\partial t} + Q \frac{\partial \beta}{\partial t} + R \frac{\partial \beta}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (611)$$

Эти же уравненія (611) удовлетворятся если за x и β примемъ такія функціи криволинейныя, будучи приравнены произвольнымъ постояннымъ c и e были бы интегралами уравненій:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad \dots \dots \dots (612)$$

Потому что, действительно, дифференцируя

$$\begin{aligned} x &= c \\ \beta &= e \end{aligned}$$

получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x} dx + \frac{\partial x}{\partial y} dy + \frac{\partial x}{\partial z} dz &= 0 \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} dt + \frac{\partial \beta}{\partial y} dy + \frac{\partial \beta}{\partial z} dz &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (613)$$

называя же эту величину W (тождествомъ (612)) чрезъ W , получимъ изъ (612)

$$dx = PW; \quad dy = QW; \quad dz = RW$$

и вставляя сюда въ (613) величины dx , dy , dz , получимъ:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} PW + \frac{\partial \alpha}{\partial y} QW + \frac{\partial \alpha}{\partial z} RW = 0$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} PW + \frac{\partial \beta}{\partial y} QW + \frac{\partial \beta}{\partial z} RW = 0.$$

Сравняя на W , получимъ уравненія (614).

$$\text{Итакъ:} \quad \alpha = c; \quad \beta = c' \dots \dots \dots (614)$$

суть интегралы уравненій (612).

Сюда по сути все сказанное въ настоящемъ параграфѣ, видимъ, что интегралъ уравненія (607)-го есть:

$$\alpha = f(\beta), \dots \dots \dots (615)$$

гдѣ f есть произвольная функция; α и β суть тѣ функции, которыя будутъ приравнены приемлемымъ постояннымъ c и c' представляющихъ собою интегралы совмѣстныхъ уравненій (612).

Интегрированіе уравненія: $Pp + Qq = R$.

§ 314. Изъ сказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ слѣдуетъ такое правило для интегрированія уравненія:

$$p(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = r(x, y, z) \dots \dots \dots (604)$$

сокращенно обозначаемаго въ видѣ:

$$Pp + Qq = R \dots \dots \dots (607)$$

Составляемъ уравненія:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \dots \dots \dots (612)$$

Интегрируя ихъ получаемъ интегралы:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = c \\ \beta = c' \end{array} \right\} \dots \dots \dots (614)$$

Интегралъ (607)-го будетъ:

$$\alpha = f(\beta) \dots \dots \dots (615)$$

гдѣ f есть совершенно произвольная функция.

Примѣръ 1-ый. $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Сравненно представится въ видѣ:

$$xp - yq = 0.$$

Составляемъ уравненія:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$$

Интегрируя ихъ, имѣемъ:

или $\lg x = \lg y, z = c,$
 или $\lg x + \lg y = \lg(xy) = c_1; z = c,$
 или $z = c$
 $xy = c_1.$

Интеграль даннаго уравненія будетъ:

$$z = f(xy).$$

Повѣрка: дифференцируемъ уравненіе:

$$z = f(xy),$$

получимъ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(xy) \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(xy) \cdot x$$

откуда.

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot y = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot x$$

$$yx - zy = 0. \dots \dots \dots (616)$$

Убѣждаемся, что действительно дифференцирование уравненія

$$z = f(xy)$$

и исключая c произвольной функціи приводитъ къ такому уравненію $yx - zy = 0$, что, следовательно, $z = f(xy)$ есть интеграль уравненія $yx - zy = 0$.

Примѣръ 2-ой. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$. Сокращающе имѣемъ.

$$p - q = 0.$$

Составляемъ уравненіе:

$$\frac{dx}{1} = - \frac{dy}{1} = \frac{dz}{0}.$$

Интегрируя эти уравненія, получаемъ:

$$z = c$$

$$x + y = c_1.$$

Интеграль даннаго уравненія будетъ:

$$z = f(x + y).$$

Примѣръ 3-ій. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$$py - qx = 0$$

$$\frac{dx}{y} = - \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

$$z = c$$

$$x^2 + y^2 = c_1$$

$$z = f(x^2 + y^2).$$

Примѣръ 4-ый $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{a}$. Сокращенно пишемъ:

$$p + q = \frac{z}{a}.$$

Составляемъ:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{a dz}{z}.$$

Отсюда:

$$x - a \lg z = c$$

$$y - a \lg z = c_1$$

$$x - a \lg z = f(y - a \lg z).$$

Образованіе поверхностей.

Замѣчаніе.

§ 315 Дифференціальныя уравненія обладаютъ большою общностью: одно дифференціальное уравненіе охватываетъ весьма много свойствъ весьма многихъ объектовъ. Вислѣдствіи мы это увидимъ особенно ясно въ уравненіяхъ механики. Теперь же покажемъ, какъ однимъ дифференціальнымъ уравненіемъ охватывается цѣлый классъ поверхностей. Тутъ же мы познакомимся съ наиболее интересными классами поверхностей и способами ихъ образованія.

Образующія и направляющія.

§ 316. Если какая-нибудь кривая линия движется въ пространствѣ, то совокупность (или геометрическое мѣсто) всѣхъ ея положенія образуетъ поверхность. Въ этомъ смыслѣ говорить, что поверхность можетъ быть образована движеніемъ линіи.

Напримѣръ, если полуокружность вращается около діаметра (фиг. 222), то геометрическое мѣсто всѣхъ ея положеній, занимаемыхъ ею послѣдо-

вазалье въ пространствѣ при такомъ вращеніи, есть шаровая поверхность. Въ каждомъ своемъ отдѣльнѣмъ положеніи движущаяся окружность представляетъ меридіанъ шаровой поверхности, образованной ея вращеніемъ.



Фиг. 222

Движущаяся линия называется при этомъ *образующею*. Въ приведенномъ примѣрѣ полуокружность есть образующая шаровой поверхности. Отдѣльные положенія образующей тоже называются образующими. Въ приведенномъ примѣрѣ меридіаны суть *образующія*. Движеніе образующей определяется иногда тѣмъ элементомъ, что она должна опираться на нѣк-торую линию называемую *направляющею*.

Напримѣръ если прямая линия образующая опирается на окружность и проходитъ постоянно чрезъ одну и ту же точку, находящуюся на перпендикулярѣ возстановленіи къ центру этой окружности, то ея плоскости т. получается поверхность прямого круглаго конуса. Здѣсь движущаяся прямая есть образующая, окружность же — направляющая.

Цилиндрическія поверхности.

§ 317. Поверхности, образованныя образующими, которыя параллельны между собою называются *цилиндрическими*. Въ элементарной геометріи разсматриваются только тѣмъ цилиндрическія поверхности, направляющею которой есть окружность. Но такъ и бы ли была направляющая — если поверхность образована движущеюся прямолинейною образующею, оставшею постоянно параллельною одной и той же прямой, то такая поверхность называется цилиндрическою.

Пусть уравненія образующей прямой будутъ

$$\begin{aligned} x &= az + \alpha \quad | \\ y &= bz + \beta \quad | \end{aligned} \quad \dots \quad (617)$$

Съ измѣненіемъ α и β измѣняется положеніе образующей, если бы мы стали измѣнять также a или b , то направленіе образующей тоже измѣнилось бы. Если же a и b остаются безъ измѣненія т. е. образующія имѣютъ одно направленіе.

Это известіе изъ слѣдующаго уравненія (617) можно представить въ видѣ:

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - 0}{1},$$

откуда видно (см. § 98), что направленіе прямой (617) измѣняется только съ измѣненіемъ a и b . Итакъ, оставляя a и b въ (617) неизмѣнными, будемъ мѣнять только α и β , получимъ множество параллельныхъ между собою прямыхъ.

Подчинимъ теперь эти прямыя еще тому условию, чтобы онѣ опи-
рались на направляющую:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ F'_1(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (618)$$

Если образующая (617) опирается на направляющую (618), то эти
линии встрѣчаются одна съ другою имѣютъ общія точки. Слѣдова-
тельно существуютъ точки x, y, z , которая удовлетворяютъ 4-мъ урав-
нениямъ (617) и (618). Но три величины x, y, z могутъ удовлетво-
рить 4-мъ уравнениямъ только въ томъ случаѣ, если, опредѣливъ ихъ изъ трехъ
данныхъ уравнений и вставляя полученныя величины въ четвертое, полу-
чимъ верное равенство между коэффициентами. Другими словами, усло-
віе встрѣчи образующей (617) съ направляющей (618), получится, если мы
введемъ изъ (617) и (618) переменныя x, y, z . Оно будетъ имѣть
видъ уравненія заключающаго только коэффициенты уравнений (617) и
(618); среди этихъ коэффициентовъ должны, по условиямъ задачи, счи-
таться переменными только α и β . Итакъ, условие встрѣчи образующей (617)
съ направляющей (618) будетъ имѣть видъ

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0 \dots \dots \dots (619)$$

Но образующая вполнѣ определена и занимаетъ определенное поло-
женіе, когда α и β определены. Если же мы исключимъ α и β изъ урав-
неній (617) и (618), то получимъ уравненіе вида

$$\varphi(x - ax; y - by) = 0, \dots \dots \dots (620)$$

которое вырази́тъ сѣку совмѣщенія съ всѣхъ образующихъ параллельныхъ
между собою и опирающихся на направляющую (618). Это и будетъ, слѣ-
довательно, уравненіе цилиндрической поверхности. Еслия его относи-
тельно $(y - by)$, получимъ:

$$y - by = \varphi(x - ax) \dots \dots \dots (621)$$

Мы получили очень общее уравненіе, годящееся для всѣхъ цилиндриче-
скихъ поверхностей: но оно имѣетъ то неудобство, что содержитъ про-
извольную функцію φ .

Дифференціальное уравненіе цилиндрическихъ поверхностей.

§ 318. Избавимся отъ произвольной функціи φ въ уравненіи (621)
или дифференцированиемъ. Такое дифференцирование и исключеніе
функціи φ нами уже произведено въ § 314, гдѣ мы получили изъ уравне-
нія (599) тождественнаго съ (621), уравненіе:

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \dots \dots \dots (622)$$

Это и есть дифференціальное уравненіе съ частными производными
всѣхъ цилиндрическихъ поверхностей. При такой общности оно уже не

содержит произвольной функции. Принимая обычные обозначения: $\frac{\partial z}{\partial x} = p$; $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, мы его представимъ въ видѣ:

$$ap + bq = 1 \dots \dots \dots (623)$$

Интегрируя его, вернемся къ (621). Дѣйствительно, действуя по правиламъ § 314, получимъ:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1},$$

откуда:

$$x - az = c; \quad y - bz = c_1; \quad y - bz = f(x - az).$$

Коническія поверхности.

§ 319. Коническими называются такія поверхности, прямолинейныя образующія которыхъ, проходя чрезъ одну точку (вершину конуса), опираются на какую-либо направляющую.

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ F_1(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (624)$$

Пусть уравнения образующей будутъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (625)$$

Координаты вершины назовемъ чрезъ: k, m, n . Образующая проходитъ чрезъ вершину. Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} k &= an + \alpha \\ m &= bn + \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (626)$$

Вычитая соответственно уравнения (626) изъ (625), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} x - k &= a(x - n) \\ y - m &= b(x - n) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (627)$$

Исключая x, y, z изъ (627) и (624), получимъ (какъ въ § 317) условіе встречи образующей съ направляющею въ видѣ:

$$\varphi(a, b) = 0 \dots \dots \dots (628)$$

Исключая a и b изъ (628) и (627), получимъ (какъ въ § 317) уравненіе поверхности въ видѣ:

$$\varphi\left(\frac{x-k}{z-n}, \frac{y-m}{z-n}\right) = 0$$

приводимомъ въ виду:

$$\frac{y-m}{z-n} = \mathcal{F}\left(\frac{x-k}{z-n}\right) \dots \dots \dots (629)$$

Это и есть общее уравненіе коническихъ поверхностей.

Дифференціальное уравненіе коническихъ поверхностей.

§ 320. Дифференцируемъ (629) по x , и получимъ, вводя обозначенія p и q для производныхъ $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{-(y-m)p}{(s-n)^2} = \psi' \left[\frac{x-k}{s-n} \right] \cdot \left[\frac{z-n-(x-k)p}{(s-n)^2} \right]$$

$$\frac{(z-n)-(y-m)q}{(s-n)^2} = \psi' \left[\frac{x-k}{s-n} \right] \cdot \left[\frac{-(x-k)q}{(s-n)^2} \right].$$

Исключая $\psi' \left[\frac{x-k}{s-n} \right]$, получимъ:

$$\frac{(y-m)p}{(z-n)-(y-m)q} = \frac{s-n-(x-k)p}{(x-k)q}.$$

или

$$s-n = (x-k)p + (y-m)q \dots \dots \dots (630)$$

Дифференціальное уравненіе всѣхъ коническихъ поверхностей, каковы бы ни были направляющія.

Конoidalныя поверхности.

§ 321. Поверхность, образованная прямыми параллельными данной плоскости, проходящими чрезъ данную прямую и сходящимися на данную направляющую, называется *коноидальными*.

Дифференціальное уравненіе коноидовъ, образующія которыхъ параллельны плоскости (x, y) и проходятъ чрезъ ось z таково.

$$px + qy = 0 \dots \dots \dots (631)$$

Интеграль этого уравненія таково:

$$z = f \left(\frac{y}{x} \right).$$

Изъ коноидальныхъ поверхностей наиболее замѣчательны:

1) Косая винтовая поверхность, описанная въ § 246-мъ, и

2) Коноидъ Пюккера или *цилиндроподобный*. Направляющая этой поверхности представляетъ собою эллипсъ, лежащій въ плоскости перпендикулярной къ плоскости (yz) , но наклонной къ плоскости (xy) и проходящей чрезъ ось x .

Поверхности вращенія.

§ 322. Поверхности, образованныя вращеніемъ криволинейной или прямолинейной образующей около оси, находящейся съ нею въ одной плоскости, называются *поверхностями вращенія*. Мы ихъ уже неоднократно встрѣчали.

Дифференциальное уравнение таких поверхностей вращения, в которых проецирование через начало координат таковы

$$(cy - bz)p + (az - cx)q = lx - ay \dots (632)$$

Интеграл его таковъ:

$$ax + by + cz = f(x^2 + y^2 + z^2) \dots (633)$$

Дифференциальное уравнение таких поверхностей вращения, в которых проецирование по оси z есть частный случай уравнения (632) и имѣетъ видъ:

$$py - qz = 0 \dots (634)$$

Интегралъ его таковъ:

$$z = f(x^2 + y^2) \dots (635)$$

Развертывающіяся поверхности.

§ 323. Представимъ собою такую поверхность, в которой каждая двѣ соседнія образующія взаимно пересѣкаются (фиг. 223). Тутъ могутъ быть слѣдующіе случаи:

1) Если образующія пересѣкаются въ одной точкѣ, получается конусъ или плоскость.

2) Каждая образующая пересѣкается ось симметрии, но въ каждой плоскости въ одной плоскости; получается плоскость.

3) Каждая образующая пересѣкается съ осью симметрии въ определенномъ мѣстѣ, но каждая въ плоскости пересѣкается двукратно и параллельно въ плоскостях a и a' и такъ далѣе. Этотъ послѣдній случай мы и разберемъ.

Видъ послѣдовательныхъ пересѣченій образующихъ образуетъ въ этомъ случаѣ кривую AM (фиг. 223) и при этомъ кривая двойна и кривизны. Образующія же составляютъ нѣкоторую поверхность. Замѣчательное свойство этой поверхности будетъ состоять въ томъ, что ее можно разорвать складать и разрывовъ развернуть на плоскость. Действительно, представимъ собою плоскость a , составленную образующими AB и BC , неподвижно и будемъ вращать около BC плоскость b , составленную образующими BC и CD до тѣхъ поръ, пока она не составитъ продолженія плоскости a ; затѣмъ вращаемъ



Фиг. 223

около CD плоскость c , пока она тоже не совмѣстится съ плоскостью a . Последняя затѣмъ такимъ образомъ, мы и развернемъ всю поверхность на плоскость a .

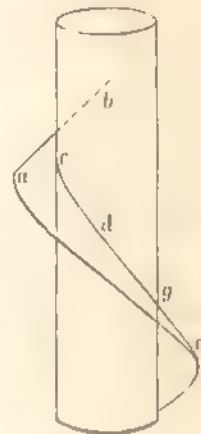
Итакъ: поверхности, представляющія собою геометрическое мѣсто касательныхъ къ кривой двойна и кривизны, можно развернуть на плоскость. Такия поверхности называются *развертывающимися*. Кривая AM , въ ко-

тороп касательны образуящая развертывающейся поверхности, называется *ребром возврата*.

В § 215 мы уже видели такую поверхность *винтовую развертывающуюся*, представляющую собою геометрическое место касательных къ винтовой лини. Для нея эта винтовая лини и служит ребромъ возврата. На (фиг. 223) изображена только одна полость опиываемая однимъ цилиндромъ касательной. На (фиг. 224) мы изображали и другую полость образуемую другимъ концомъ касательной. Изъ одной полости въ другую касательная переходит, не изгибаясь, но тѣмъ не менѣе винтовая лини представляется рѣзко отчерченною на поверхности, и въ сѣченіи, если оно не находится въ плоскости образуемой, получается кривая съ угловою точкою. Вотъ причина названія «ребро возврата»: оно представляетъ собою нѣчто продѣ лезвія. Но каждая образуемая переходитъ черезъ ребро возврата изъ одной полости въ другую не переламываясь. Съ перваго раза, не выдавъ хорошо исполняемыхъ витяжныхъ моделей, не трудно себѣ представить.



Фиг. 224.



Фиг. 225.

Стыкая плоская развертывающаяся поверхность въ конических и цилиндрическихъ, но не исключая ребро возврата въ коническихъ, поверхность линается въ одну точку — вершину, въ цилиндрическихъ же оно представляетъ собою безконечную удаленную точку.

Линейчатая поверхности.

§ 324. Поверхности, образованныя движениемъ прямолинейной образуемой называются *линейчатыми*.

Линейчатая поверхности разделяются на два большихъ рода: 1) поверхности *развертывающіяся* какъ винтовая развертывающаяся и 2) поверхности *косыя*, которыя, какъ однообразныя гиперболы, будучи линейчатыми, не могутъ быть развернуты на плоскость.

Дифференціальное уравненіе развертывающейся поверхности.

§ 325. Въ подробныхъ курсахъ доказывается, что дифференціальное уравненіе развертывающихся поверхностей таково:

$$p = f(q), \dots \dots \dots (636)$$

гдѣ f есть произвольная функція, имѣющая различныи видъ для раз-

личныхъ развѣртывающихся поверхностей. Напримеръ для цилиндрическихъ поверхностей изъ (623) получимъ:

$$p = \frac{1 - bq}{a}.$$

Если захотимъ избавиться отъ этой произвольной функции f дифференцированиемъ, то получимъ уравнение 2-го порядка. Именно: дифференцируя (636) сначала по x , потомъ по y , получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= f'(q) \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= f'(q) \cdot \frac{\partial q}{\partial y}. \end{aligned}$$

Исключая отсюда $f'(q)$, получимъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \dots \dots \dots (637)$$

Припоминая, что $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, получимъ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \right)^2 \dots \dots \dots (638)$$

Обыкновенно принимаютъ слѣдующія сокращения для обозначенія вторыхъ производныхъ отъ z :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial p}{\partial x} = r \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial q}{\partial y} = t \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} &= \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (639)$$

При такихъ сокращеніяхъ уравнение (638) приметъ видъ:

$$rt - s^2 = 0 \dots \dots \dots (640)$$

Вотъ это и есть чрезвычайно важное уравненіе 2-го порядка съ частными производными развѣртывающихся поверхностей.

Огибающія поверхности.

§ 326. Поверхность s , касательная къ различнымъ положеніямъ движущейся и измѣняющейя поверхности s' , называется огибающею, если движеніе и измѣненіе поверхности s' происходитъ отъ измѣненія только одного ея параметра.

Разсуждениями, подобными тѣмъ, которые приведены были въ § 184-мъ, доказывается, что, при измѣненіи параметра α въ уравненіи

$$F(x, y, z, \alpha) = 0 \dots \dots \dots (641)$$

измѣняющейся поверхности, уравненіе огибающей поверхности получится по исключеніи параметра α изъ уравненія

$$\frac{dF(x, y, z, \alpha)}{d\alpha} = 0 \dots \dots \dots (642)$$

и уравненія (641).

Примѣръ. Сфера $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2$ движется такъ, что ея центръ c описываетъ въ плоскости (x, y) окружность:

$$a^2 + b^2 = R^2 \dots \dots \dots (643)$$

Найти огибающую всѣхъ положеній движущейся сферы.

Опредѣляя изъ (643) $b = \sqrt{R^2 - a^2}$ и вставляя въ уравненіе движущейся сферы, получимъ:

$$(x - a)^2 + (y - \sqrt{R^2 - a^2})^2 + z^2 = r^2 \dots \dots \dots (644)$$

Здѣсь остался одинъ только параметръ a . Дифференцируя (644) по a , получимъ:

$$2(x - a) + \frac{2(y - \sqrt{R^2 - a^2}) \alpha}{\sqrt{R^2 - a^2}} = 0,$$

или:

$$(y - \sqrt{R^2 - a^2}) a = (x - a) \sqrt{R^2 - a^2},$$

или:

$$ay = x \sqrt{R^2 - a^2};$$

откуда:

$$a^2 y^2 = R^2 x^2 - a^2 x^2,$$

или:

$$a^2 = \frac{R^2 x^2}{x^2 + y^2} \dots \dots \dots (645)$$

Исключая a изъ (644) и (645), получимъ:

$$\left(x - \frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(y - \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + z^2 = r^2,$$

или:

$$(x \sqrt{x^2 + y^2} - Rx)^2 + (y \sqrt{x^2 + y^2} - Ry)^2 + z^2 (x^2 + y^2) = r^2 (x^2 + y^2);$$

или:

$$x^2 (x^2 + y^2) - 2Rx \sqrt{x^2 + y^2} + R^2 x^2 + y^2 (x^2 + y^2) - 2Ry \sqrt{x^2 + y^2} + R^2 y^2 + (z^2 - r^2) (x^2 + y^2) = 0;$$

или:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2R \sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) + R^2 (x^2 + y^2) + (z^2 - r^2) (x^2 + y^2) = 0.$$

или:

$$(x^2 + y^2) + R^2 + z^2 = r^2 = 2R \sqrt{x^2 + y^2};$$

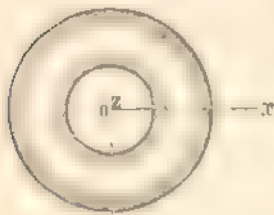
или:

$$[x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2]^2 = 4R^2 (x^2 + y^2).$$

Вот и новое уравнение тубчатой поверхности. Она имеет вид кольца и называется *тора* (фиг. 226).

Трубчатая поверхности.

§ 327. Поверхности, образованные вращением шара называются *тубчатыми*. Не надо смешивать тубчатых поверхностей с цилиндрическими у цилиндрических поверхностей образующие прямодлинные и параллельны между собою, тубчатые поверхности, вообще говоря, не имеют прямодлинных образующих. Только прямой круглый цилиндр есть в одно и то же время и цилиндрической и тубчатая поверхность. Модель тубчатой поверхности может служить всякая форма принимаемая при различных вращательных, ось вращения, сугуберчевой трубки из которой можно соснуть модель *тора*.



19

Фиг. 226

Примером тубчатой поверхности может еще служить *тубчатая спиральная поверхность*, представляющая собою огибающую различных положений шаря, центр которого движется по винтовой линии.

Тубчатые поверхности не дилатативны и потому неразвертывающиеся кромь прямого круглого цилиндра.

Второй способ образования развертывающихся поверхностей.

§ 328. Представим себе плоскость:

$$z = xf'(x) + y\varphi(x) + F(x), \dots \dots \dots (646)$$

движущаяся при изменении параметра x . Посмотрим, как она будет огибаться различными положениями этой плоскости.

Чтобы найти огибающую, нужно, согласно § 326, исключить x из (646) и его производной по x :

$$0 = xf'(x) + y\varphi'(x) + F'(x) \dots \dots \dots (647)$$

Чтобы исключить и промежуточные функции f' , φ , F' , дифференцируем (646) по x и потом по y , получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(x), \dots \dots \dots (648)$$

Из третьей из уравнений α , получим уравнение для

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right);$$

или

$$p = F(q, \dots \dots \dots) \quad (619)$$

Поэтому это дифференциальное уравнение разветвляется на поверхности.

Плоская разветвляющаяся поверхность есть огибающая плоскостей касательных к которой проходят все изменения *одного* параметра.

Кривизна поверхностей и линий, лежащих на поверхности.

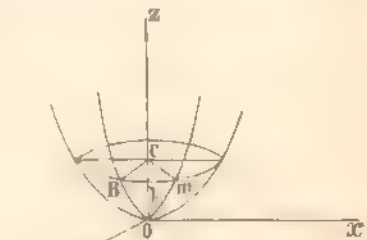
Замѣчаніе.

§ 329. Изъ всѣхъ геометрическихъ истинъ едва ли можно встрѣтить болѣе архаичныя и имѣющія столь общій характеръ какъ тѣ, которыя относятся къ теоріи кривизны поверхностей и линий, проведенныхъ на поверхностяхъ. Приведая къ числу вѣдѣвшихъ по этому делу теоріи, мы начинаемъ съ разсмотрѣнія кривизны, которую имѣютъ въ данной точкѣ каково-либо поверхности линіи, проведенныя на этой поверхности чрезъ данную точку.

Индикатриса.

§ 330. Возьмемъ начало координатъ (фиг. 227) въ данной точкѣ поверхности и примемъ за z ось z , x и y какъ случайная плоскость. Пусть же ось x пойдетъ по нормали, проведенной къ поверхности чрезъ данную точку O . Разсмотримъ точки безконечно близкія къ O . Разложимъ z по формулѣ (296):

$$z = z_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_0 y + \frac{1}{1 \cdot 2} \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_0 y \right]^2 + \dots$$



Фиг. 227.

Пользуясь сокращенными обозначеніями:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t;$$

получимъ:

$$z = z_0 + p_0 x + q_0 y + \frac{1}{2} r_0 x^2 + s_0 xy + \frac{1}{2} t_0 y^2 + \dots \dots \dots (620)$$

Но при $x = 0$; $y = 0$ величина $z_0 = 0$; $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, такъ какъ послѣднія двѣ суть тангенсы наклона касательныхъ параллельныхъ осямъ x и y къ этимъ осямъ; но при $x = 0$, $y = 0$, то есть въ точкѣ O , эти касательныя сливаются съ осями x и y . Поэтому:

$$z = \frac{1}{2} rx^2 + sxy + \frac{1}{2} ty^2 + \dots \dots \dots (651)$$

Полагая въ этомъ уравненіи $z = h$, гдѣ h весьма мало, получимъ уравненіе сѣченія mB данной поверхности плоскостью параллельною плоскости (x, y) и отстоящею отъ (x, y) на весьма малое разстояніе $h = OC$ (фиг. 227). Величинами высшихъ порядковъ малости можемъ пренебречь и получимъ уравненіе сѣченія mB въ видѣ:

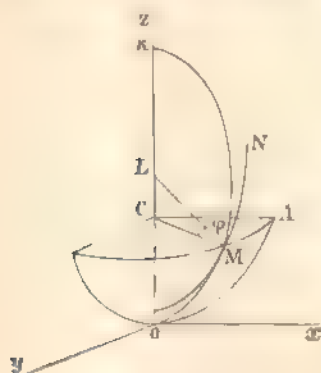
$$h = \frac{1}{2} rx^2 + sxy + \frac{1}{2} ty^2 \dots \dots \dots (652)$$

Это уравненіе 2-го порядка, и потому представляетъ собою эллипсъ или гиперболу.

Кривая (652) называется индикатрисою. Само по себѣ чрезвычайно интересно, что пересѣкая какую бы то ни было непрерывную и допускающую разлженіе (650) поверхность плоскостью весьма близькою къ касательной плоскости и параллельною ей, получаемъ либо эллипсъ, либо гиперболу. Сейчасъ увидимъ, какое важное значеніе имѣетъ индикатриса и почему ей дано такое названіе (индикатриса = указательница).

Кривизна нормальныхъ сѣченій.

§ 331. Разсмотримъ кривая, производящая отъ пересѣченія дугной поверхности плоскостями, проходящими чрезъ нормаль OZ . Эти кривыя называются *нормальными сѣченіями* поверхности въ точкѣ O . Пусть OMN будетъ одна изъ такихъ кривыхъ (фиг. 228).



Фиг. 228.

Радиусъ кривизны кривой OMN въ точкѣ O будетъ радиусомъ круга, представляющаго собою предѣлъ круга проведеннаго чрезъ O и M . Пусть L есть центръ окружности проведенной чрезъ O и M , пусть MC есть перпендикуляръ, спущенный изъ M на диаметръ OK . Изъ геометріи извѣстно, что:

$$\frac{OK}{OM} = \frac{OM}{OC}.$$

Въ предѣлѣ, при приближеніи M къ O , получимъ $OL = r =$ радиусу кривизны. Слѣдовательно:

$$\frac{2r}{OM} = \frac{OM}{OC}.$$

или

$$\rho = \lim \frac{OM^2}{2OC} = \lim \frac{OM^2}{2h}$$

Но мы знаем, что $\lim \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$. Следовательно и предель отношение $\lim \frac{OM}{OC}$, хорда к CM , равна 1. Поэтому, в предель, можно OM заменить через CM . Получимъ:

$$\rho = \frac{CM^2}{2h} \dots \dots \dots (653)$$

Обозначимъ уголъ ACM , составляемый прямою CM съ плоскостью (x, z) чрезъ φ . Тогда:

$$x = CM \cdot \cos \varphi$$

$$y = CM \sin \varphi.$$

Вставивъ эти величины въ уравнение (652) и вычитаем, получимъ:

$$CM^2 (r \cos^2 \varphi + 2s \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + t \sin^2 \varphi) = 2h$$

Определяя отсюда CM и вставивъ въ (653), получимъ:

$$\rho = \frac{2h}{r \cos^2 \varphi + 2s \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + t \cdot \sin^2 \varphi} \dots \dots (654)$$

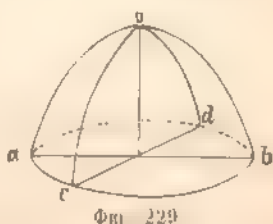
Эта замечательная формула даетъ радиусъ кривизны для всякаго нормальнаго сѣченія, проходящаго чрезъ точку O , какъ функцию угла φ составляемаго плоскостью такого сѣченія съ плоскостью (x, z) . Кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r \cos^2 \varphi + 2s \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + t \cdot \sin^2 \varphi}{2h} \dots \dots (655)$$

Но и самое уравнение (653) даетъ уже много для соображенія о кривизнѣ нормальныхъ сѣченій. Именно оказывается, что ρ пропорциональны радиусамъ-векторамъ индикатрисы проведеннымъ изъ ея центра. Вотъ почему она и названа индикатрисой (указательницею), потому что ея радиусы-векторы, проведенные изъ центра, пропорциональны радиусамъ кривизны нормальныхъ сѣченій, и сѣчени всѣхъ которыхъ проходитъ чрезъ этотъ радиусъ-векторъ CM .

Закономерность распределенія кривизны нормальныхъ сѣченій.

§ 332. Но мы знаемъ, что какъ въ эллипсѣ, такъ и въ гиперболѣ, центральные радиусы-векторы имѣютъ максимальную и минимальную величину по осямъ и что оси ихъ перпендикулярны. Теория индикатрисы показываетъ, слѣдъ вѣдливо, что *такая существуетъ она взаимно перпендикулярныхъ нормальныхъ сѣченій: одно съ наибольшей, а другое съ наименьшей кривизной*. Эти сѣченія aob и coo (фиг. 229) называются *главными*, ихъ радиусъ кривизны мы будемъ обозначать чрезъ R и R' .



Определение положенія главныхъ сѣченій.

§ 333. Напомнимъ теперь тѣ углы φ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$, которые составляютъ плоскость (x, z) главные нормальныя сѣченія. Такъ какъ эти сѣченія соответствуютъ наибольшему и наименьшему значенію ρ , то для нахождения определяющихъ ихъ угловъ φ можно (см. § 140) приравнять нулю производную съ знаменателемъ выраженія (654). Получимъ

$$\frac{d [r \cos^2 \varphi + 2s \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + t \sin^2 \varphi]}{d \varphi} = 0,$$

или

$$2r \cos \varphi \sin \varphi + 2s \cdot \cos \varphi - 2s \cdot \sin \varphi + 2t \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0,$$

или

$$(t - r) \sin \varphi \cdot \cos \varphi + s (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0;$$

или

$$s \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi + (r - t) \cdot \operatorname{tg} \varphi - s = 0 \dots \dots (656)$$

Изъ уравненія имѣетъ два для двучленныхъ термовъ $\operatorname{tg} \varphi$, которыхъ произведение — коэффициенту при послѣднемъ членѣ этого квадратнаго уравненія = 1. Следовательно углы будутъ отличаться одинъ отъ другаго на $\frac{\pi}{2}$, такъ какъ $\operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$.

Определение R и R' .

§ 334. Опредѣлимъ теперь радиусы кривизны R и R' главныхъ сѣченій. Для этого примемъ плоскости главныхъ сѣченій за плоскости (x, z) и (y, z) , такъ что уголъ φ определяемая ими плоскость будетъ перпендикулярна къ плоскости (x, z) и этого перпендикулярна къ плоскости (y, z) и будетъ промежуточнаго сѣченія, при чемъ величины φ соответствующія наибольшему и наименьшему ρ будутъ теперь 0 и $\frac{\pi}{2}$. По уравненію (656) только въ томъ случаѣ могутъ быть значенія 0 и ∞ для $\operatorname{tg} \varphi$, соответствующія значеніямъ $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. $s = 0$. Поэтому при такой системѣ координатъ $s = 0$, и формула (654) обращается въ

$$\rho = \frac{2h}{r \cdot \cos^2 \varphi + t \cdot \sin^2 \varphi} \dots \dots (657)$$

При $\varphi = 0$ и при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получимъ изъ этой формулы радиусы кривизны R и R' главныхъ сѣченій:

$$R = \frac{2h}{r} \dots \dots (658)$$

$$R' = \frac{2h}{t} \dots \dots (659)$$

Откуда:

$$r = \frac{2h}{R}; \quad t = \frac{2h}{R'}.$$

Но вѣдь:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

То, что мы видаемъ, показываетъ, геометрически значеніе главныхъ производныхъ 2-го порядка — они суть величины, пропорциональны тривинизъ главныхъ сеченій — если за плоскость (x, y) принять касательная плоскость, и нормаль — за ось z .

Изъ (657) имѣемъ: $\frac{2h}{\rho} = r \cos^2 \varphi + t \sin^2 \varphi$. Опредѣливъ изъ (658) и (659) r и t и вставляя въ это выраженіе $\frac{1}{\rho}$, получимъ:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R'} \sin^2 \varphi \quad \dots \quad (660)$$

По этой формулѣ представляется кривизна $\frac{1}{\rho}$ изъ безконечнаго нормальнаго сеченія — радиусамъ кривизны R и R' главныхъ сеченій. Для кривизны $\frac{1}{\rho}$ сѣченія перпендикулярнаго тому, кривизны кривоизогнаго радиуса $\frac{1}{\rho}$ будемъ выраженіе, замѣнивъ въ (660), φ чрезъ $(\varphi + \frac{\pi}{2})$. Получимъ:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} \sin^2 \varphi + \frac{1}{R'} \cos^2 \varphi \quad \dots \quad (661)$$

Складывая (660) и (661), получимъ:

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \quad \dots \quad (662)$$

Сумма кривизны вообще нормальныхъ сеченій плоскости которыхъ взаимно перпендикулярны, есть величина для данной точки поверхности постоянная, равная суммѣ кривизны главныхъ сеченій.

Вставляя въ (660), вмѣсто φ , эту величину изъ равенства:

$$x = CM \cos \varphi; \quad y = CM \sin \varphi,$$

получимъ:

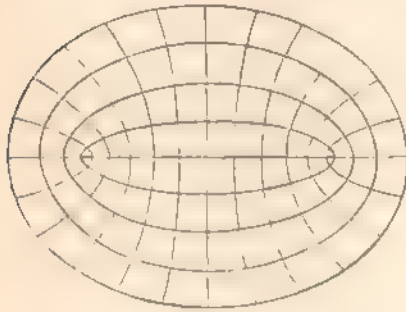
$$\frac{1}{\rho} = \frac{x^2}{R CM^2} + \frac{y^2}{R' CM^2}.$$

Линіи кривизны.

§ 335. *Линією кривизны на поверхности называется линія касательная во всякой своей точкѣ къ главнымъ сеченіямъ поверхности въ этой точкѣ. Въ каждой точкѣ поверхности имѣются два взаимно перпендикулярныя главные сеченія; следовательно чрезъ каждую точку поверхности проходитъ двѣ взаимно-перпендикулярныя линіи кривизны. Вся поверхность, поэтому, покрыта сплошь двумя семействами линій кривизны.*

три четь линии одного семейства пересѣкають иль прямыми углами линии другого семейства, это значить, что элементы ихъ въ точкахъ пересѣченія взаимно-перпендикулярны, следовательно и касательныя, проведенныя въ точкѣ пересѣченія взаимно-перпендикулярны. Таки линии изываются *взаимно-ортогональными*. Игакъ, два семейства линий кривизны взаимно-ортогональны.

На поверхности стѣхъ вращенія, напримѣръ, одно изъ семействъ линий кривизны состоитъ изъ меридиановъ (образуемыхъ пересѣченіемъ поверхности



Фиг. 230

плоскостями, проходящими чрезъ ось вращенія), а другое семейство линий кривизны состоитъ изъ параллелей (образуемыхъ пересѣченіемъ поверхности плоскостями, перпендикулярными къ оси вращенія).

На (фиг. 230) изображены линии кривизны трехоснаго эллипсоида: онѣ представляются на плоскомъ чертежѣ въ видѣ софокусныхъ эллипсовъ и гиперболъ. Въ подробныхъ курсахъ доказывается, что данное выше опреде-

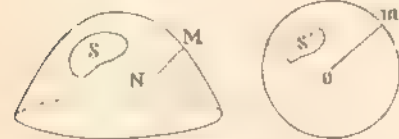
леніе линий кривизны равносильно такому определенію: *линии кривизны* суть такия линии на данной поверхности, нормали которыхъ, проведенныя чрезъ двѣ соседнія точки, взаимно пересѣкаются.

Кривизна поверхности.

§ 336 Математики видѣли, что понятие о кривизнѣ линий весьма плодотворно, и потому хотѣли съ такою же точностью определить понятие о кривизнѣ поверхности. Но долго не могли этого сдѣлать. Наконецъ Гауссъ определилъ точно, что именно надо разумѣть подъ кривизною поверхности въ данной ея точкѣ. Какъ увидимъ,

Гауссово определеніе кривизны поверхности, съ перваго взгляда не имѣющее ничего похожего на определеніе кривизны линии, оказывается вполне съ нимъ сходнымъ.

Гауссъ *) сравниваетъ линии, начерченныя на какой-либо поверхности



Фиг. 231

съ линиями, проведенными на шарѣ, радиусъ котораго равенъ единицѣ (фиг. 231). Онѣ называются *соответственными* такуу точкѣу на поверх-

*) Гауссъ Gauss, 1777 г. — 1855 г. профессоръ въ Геттингенѣ одинъ изъ величайшихъ геометровъ восточнаго голланд. его называли *dux imperii mathematicorum*—глава математиковъ.

ности и такую точку на сферѣ нормалю которую взаимно параллельны. Каждой точкѣ поверхности соответствуетъ въ этомъ смыслѣ своя точка на шарѣ; следовательно и каждой линіи, проведенной на поверхности, соответствуетъ своя линія на шарѣ. Проведемъ на поверхности замкнутый контуръ S , ему будетъ соответствовать замкнутый контуръ (фиг. 231) S' на шарѣ. *Полною кривизною* части, ограниченной контуромъ S , Гауссъ называетъ площадь S' соответствующаго контура на шарѣ.

Среднюю кривизною части S называется отношеніе $\frac{S'}{S}$ одной кривизны къ площади контура S , вѣятаго на поверхности.

Кривизною поверхности въ данной ей точкѣ Гауссъ называетъ среднюю кривизну бесконечно малаго элемента поверхности, окружающаго данную точку.

Укажемъ сходство Гауссова определения съ определеніемъ кривизны линій.

Полная кривизна дуги = углу, составляемому касательными, проведенными въ ея концахъ = углу составляемому нормальми проведенными въ концахъ дуги = дугѣ круга (радіуса = 1), заключенной между радіусами параллельными нормальмъ, проведеннымъ въ концахъ дуги кривой.

Средняя кривизна дуги = отношенію $\frac{\alpha}{s}$ = отношенію угламнугой дуги окружности къ дугѣ кривой.

Кривизною кривой въ данной ей точкѣ называется средняя кривизна элемента кривой.

Полная кривизна части поверхности, ограниченной контуромъ S = равна площади соответствующаго контура на шарѣ, заключеннаго между нормальми параллельными нормальмъ, проведеннымъ въ точкахъ контура S поверхности.

Средняя кривизна части поверхности, ограниченной контуромъ S , = $\frac{S'}{S}$ = отношенію площади упомянутаго контура на шарѣ къ площади контура на поверхности.

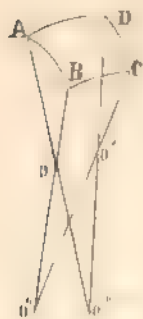
Кривизною поверхности въ данной точкѣ называется средняя кривизна ея элемента.

Величина кривизны поверхности.

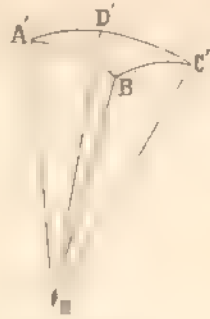
§ 337. Оказывается, что величина Гауссовской кривизны превосходно определяется знакомыми намъ изъ §§ 332, 334 радіусами R и R' кривизны главныхъ сѣченій. А именно:

Разсмотримъ на данной поверхности весьма малый прямоугольникъ $ABCD$ (фиг. 232, *a*), ограниченный линіями кривизны AB и CD одного семейства и линіями кривизны BC и DA другого семейства. Нормалю соѣдинихъ точекъ каждой линіи кривизны взаимно пересѣкаются. Проведемъ ихъ на чертѣжѣ (фиг. 232, *a*). Назовемъ чрезъ dx и $d\beta$ стороны

прямоугольника $ABCD$. На фиг. 232, *b*) изображено соответственное построение на Гауссовском шарѣ радиуса равенъ единицѣ. На шарѣ нормали суть его радиусы и потому все они свѣдуться въ центръ шара.



Фиг. 232 а



Фиг. 232 б

Линіи кривизны, а потому и стороны прямоугольника $A'B'C'D'$, суть дуги большихъ круговъ. Известно, что для окружности: дуга = произведенію радиуса на уголъ:

$$S = r\varphi.$$

Слѣдовательно

$$\varphi = \frac{S}{r}.$$

Поэтому, и по установленному соотвѣтствію, центральные углы, опи-

рающиеся на стороны прямоутольника $A'B'C'D'$, лежащаго на шарѣ, равны $\frac{d\alpha}{R_1}$, $\frac{d\beta}{R_2}$, гдѣ R_1 и R_2 суть радиусы кривизны линій кривизны, ограничивающихъ прямоугольникъ $ABCD$ на поверхности; они равны слѣдовательно радиусамъ кривизны главныхъ и вторыхъ сеченій поверхности въ той же точкѣ около которой взяты элементъ $ABCD$. Площадь $A'B'C'D'$ равна слѣдовательно $\frac{d\alpha}{R_1} \cdot \frac{d\beta}{R_2}$.

$$A'B'C'D' = \frac{d\alpha \cdot d\beta}{R_1 \cdot R_2}.$$

Отношеніе этой площади къ площади $d\alpha d\beta$ прямоугольника $ABCD$ и есть, по Гауссу определеніе, кривизна поверхности. Слѣдовательно

$$\text{кривизна поверхности} = \frac{A'B'C'D'}{ABCD} = \left(\frac{d\alpha d\beta}{R_1 R_2} \right) : d\alpha d\beta = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Итакъ,

$$\text{кривизна поверхности} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1 R_2} \dots \dots \dots (663)$$

Кривизна поверхности въ данной ся точкѣ = произведенію кривизнъ главныхъ сеченій, проведенныхъ въ этой точкѣ.

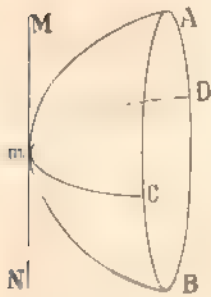
Раздѣленіе точекъ поверхности на 4 вида.

§ 338 Замѣтимъ, что радиусы кривизны кривыхъ, обращенныхъ выпуклостями въ разныя стороны, противоположны, потому что центры кривизны, по самому определенію, всегда находятся съ вогнутой стороны кривой.

Кривизна поверхности $\frac{1}{RR}$ положительна въ томъ случаѣ, если R и R_1 , или оба положительны или оба отрицательны. Въ этомъ случаѣ,

следовательно, главные нормальные сечения обращены вогнутостями в одну сторону (фиг. 233), а потому и промежуточные нормальные сечения обращены вогнутостями в одну сторону. Следовательно, из случая *положительной* Гауссовой кривизны, часть поверхности, прилежащая к точке *m*, вся находится по одну сторону от касательной *МN*. Точки *m*, в которых Гауссова кривизна $\frac{1}{R_1 R_2}$ *положительна*, называются *синклястическими* или *точками положительной кривизны*, мы бы предложили их называть *бугорчатыми*.

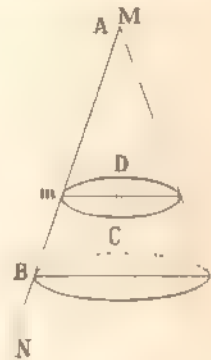
Кривизна поверхности $\frac{1}{R_1 R_2}$ может быть только тогда отрицательной, если *R* положительна, а *R₂* отрицательно или, наоборот, *R* отрицательно, *R₂* положительна, одним словом когда *R* и *R₂* имеют противоположные знаки. В этом случае главные нормальные сечения *AB*



Фиг. 233.



Фиг. 234.



Фиг. 235.

и *CD* обращены вогнутостями в разные стороны (фиг. 234); поверхность около такой точки складывается и распространяется по обе стороны касательной плоскости *МN*. Точки *m*, в которых Гауссова кривизна отрицательна, называются *антиклястическими* или *точками отрицательной кривизны*. Мы бы предложили называть их *седловинными*.

Если одна из величин, *R* или *R₂*, равна безграничности то Гауссова кривизна $\frac{1}{R_1 R_2} = 0$. В этом случае нормальное сечение, радиус кривизны которого ∞ , есть прямая (фиг. 235). Точки *m*, в которых Гауссова кривизна $= 0$, называются *точками нулевой кривизны*.

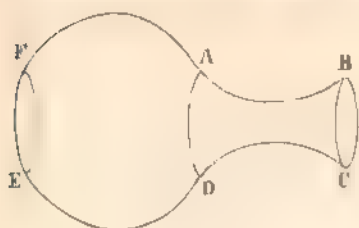
Наконец могут быть такие особые точки поверхности, в которых производные *p, q, r, t, s* претерпевают перерыв или иметь неопределенное значение. В таких точках имеется или острое ребро, или рзкая складка или острие (вершина конуса) и к ним обычная теория кривизны поверхностей неприменима. Это *особые точки*.

Одна и та же поверхность может иметь и точки положительной и точки отрицательной кривизны. Например поверхность (фиг. 236), образованная вращением синусоиды, имеет в поясе *ABCD* только точки

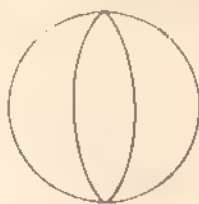
отрицательной кривизны (седловидная), тогда какъ въ полъ $EFAD$ только точки положительной кривизны (обугорчатая).

Но бываютъ также поверхности, обладающія точками только одного вида. Напримеръ эллипсоидъ есть поверхность положительной кривизны; гиперболоидъ съ одной ветвью — отрицательной кривизны.

Могутъ быть даже тѣлы поверхности, въ которыхъ для каждой точки



Фиг. 236.



Фиг. 237.

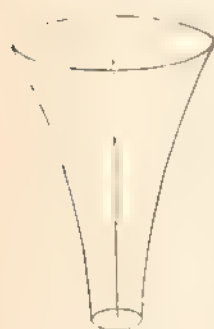


Фиг. 238.

Гладкая кривизна $\frac{1}{R_1 R_2}$ имѣетъ одну и ту же величину. Эти поверхности называются *поверхностями постоянной кривизны*.

Поверхности постоянной положительной кривизны суть: 1) поверхность шара и 2) поверхность *меридианобразная*, получаемая изъ поверхности шара, если изъ нея вырѣзать часть между двумя меридианами (фиг. 237)

и оставшуюся часть сложить краями (фиг. 238).



Фиг. 239.



Фиг. 240.

Поверхности постоянной отрицательной кривизны имѣютъ множество удивительныхъ свойствъ. Къ нимъ относятся: *псевдосфера* Бельтрами (фиг. 239), на которой справедлива геометрія Лобачевского, отвергающая постулатъ о параллельныхъ линияхъ. *Алиссейда*, происходящая отъ вращенія *цѣпной*

линии AB то есть линии, вѣтъ которой принимаетъ тяжелый цѣпь, вращенная въ двухъ точкахъ. Поверхности мыльных переносковъ, образовавшихся при выжиманьи изъ мыльной воды проводящихъ фигуръ (кабюль, шпатель —), суть тоже поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Аналитическіе признаки точекъ различныхъ видовъ.

§ 339. Мы видѣли въ § 62-мъ, что кривая 2-го порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

будетъ эллипсомъ или гиперболою, смотря по тому будетъ ли $B^2 < 4AC$

меньше или больше нуля. Приложим этот признак к индикатрисе (652).

В ней $A = \frac{1}{2} r$; $B = s$; $C = \frac{1}{2} t$.

$$B^2 - 4AC = s^2 - \frac{1}{2} rt = s^2 - rt.$$

Итак индикатриса будет гиперболою или эллипсом, смотря по тому, будет ли:

$$s^2 - rt$$

больше или меньше нуля.

Если $s^2 - rt > 0$, то индикатриса — гипербола, тогда во второй части уравнения (660) между членами будет знак —, то есть одна из величин R_1 или R_2 отрицательна. Итак, в точках *отрицательной* кривизны индикатриса — *гипербола*, и

$$s^2 - rt > 0.$$

Если $s^2 - rt < 0$, то индикатриса — эллипс, тогда в уравнении (670) оба R имеют одинаковые знаки. Итак, в точках *положительной* кривизны индикатриса — *эллипс*, и:

$$s^2 - rt < 0.$$

Если $s^2 - rt = 0$, то (662) обращается в

$$h = \frac{1}{2} rx^2 + rt xy + \frac{1}{2} ty^2;$$

или:

$$h = \left(\sqrt{\frac{r}{2}} x + \sqrt{\frac{t}{2}} y \right)^2.$$

Это уравнение разбивается на 2 уравнения 1-й степени:

$$+ \sqrt{h} = \sqrt{\frac{r}{2}} x + \sqrt{\frac{t}{2}} y$$

$$- \sqrt{h} = \sqrt{\frac{r}{2}} x + \sqrt{\frac{t}{2}} y$$

и представляет поэтому пару прямых. Что же это значит?

Впросъ разъясняется тѣмъ, что само условие $s^2 - rt = 0$, есть уравнение (640) развѣтывающихся поверхности стѣи, въ кторыхъ чрезъ данную точку всегда проходить прямолинейная образующая, сплошь лежащая въ касательной плоскости и потому перпендикулярная къ нормали, она и будетъ тѣмъ нормальнымъ сѣчениемъ, радиусъ кривизны котораго $R_1 = \infty$. Поэтому это будетъ случай когда Гауссова кривизна $\frac{1}{R_1 R_2}$ равна нулю.

Не забудемъ, что $r = \frac{\partial z}{\partial x}$, $t = \frac{\partial z}{\partial y}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ можно вычислить по уравнению поверхности. Подставляя здѣсь въ вѣхъ 14. значения x , y , z , иoria соответствующимъ данной точки поверхности, исчисляемъ, какова получается величина $s^2 - rt$, в по этому, на основании сказаннаго, будемъ судить, какова кривизна въ данной точкѣ, положительная, нулевая или отрицательная.

Геодезическія линіи.

§ 340. На плоскости кратчайшая линія между двумя точками — прямая, на шарѣ кратчайшая линія между двумя точками — дуга большого круга. Кратчайшія линіи на поверхности между двумя ея точками называются *геодезическими линіями*.

Часть III.

Основанія раціональной механики.

ВСТУПЛЕНІЕ.

Опредѣленіе науки.

§ 341. *Механика есть наука о движеніи.* Въ процессѣ неограниченной природы сводятся, съ развитіемъ нашихъ знаний, въ сѣть и являють различнаго рода движенія. Отсюда и вытекаютъ виды означенной механики, сводящіяся къ самымъ настоящимъ красивѣйшимъ камнямъ астрономической, химической и минералогической наукъ. Она, кромѣ того, отличается дѣятельною же достовѣрностью къ математикѣ, и именно посредствомъ механики математика овладѣваетъ постепенно другими науками, въ силу истинности и точности. Механика стоитъ на рубежѣ чистой математики и естественныхъ наукъ, потому что она основывается на наименьшемъ числѣ данныхъ, полученныхъ опытомъ, наибольшее свое развитіе и чистоту въ духѣ чистой математики и даже прямо методами чистой математики.

Науки сходныхъ съ механикою названій.

§ 342. Движеніе небесныхъ тѣлъ изучается *небесною механикою*, составляющею часть *астрономии*. *Математическая физика* можетъ быть названа механикою физическихъ явленій. Наука, изучающая движеніе машинъ, называется *практическою механикою*. Наука, изучающая силы, дѣйствующія на части построекъ, называется *строительною механикою*.

Всѣ эти науки, однако, пользуются тѣми же механическими законами о движеніи, но каждая изъ нихъ преслѣдуетъ свои спеціальныя цѣли. Всѣмъ сходно отъ нихъ механика, какъ наука, имѣющая цѣлью самое изслѣдованіе движенія, называется иногда *раціональною механикою*. Она можетъ быть, какъ увидимъ впоследствии, сведена на интегрированіе нѣкоторыхъ уравненій; если она пользуется только этимъ методомъ, то ее называютъ *аналитическою механикою*.

Основные методы изучения природы.

§ 343 При изучении природы человечество пользовалось до сих пор тремя методами, включившимися на одной из трех основ: 1) наблюдение, 2) опыт, 3) математика.

Нельзя думать, совершающийся в природе человек занимается всегда, и такъ основа научного метода, наблюдение выставлено было Аристотелем. Наблюдением человек изучает факты въ томъ виде, какъ они даны природою.

Въ опыте человек создает особую искусственную обстановку для выделения тех фактов, которые онъ хочет изучить. Отцомъ опытного метода считывают Бэкона Верulamского (1560—1626).

Математика применяется къ изучению природы, болѣе всего чрезъ механику.

Если сравнить движение науки впередъ и совершаемое ею постепенное превращение области неведения въ область знания съ армией, завоевывающей непритворную страну, то метафизическія соображенія, основанныя на логическихъ терминахъ, философія, посредственномъ разсужденіи и проч., мало сравнятся съ лучшими передовыми отрядами, быстро и далеко проникающими въ непритворную страну, и не столь же быстро одоливаемыми. Наблюдение и опытъ — это главное ядро армии философа, приликаящая впередъ медленно, но ослепительно. Математика же можетъ быть устобна и ваверамъ, строящимъ въ непритворной странѣ свои крепости, съ тѣмъ только различіемъ, что крепости и строения математика уже не сдаются обратно.

Къ тому надо еще прибавить войну, безъ которой наша армия двинулась бы въ непроглядной тьмѣ.

Тутъ каждому методу водостоять по заслугамъ: человечество не можетъ, по основнымъ свойствамъ своего пылкого духа, ждать, пока математика изобрететъ вѣдъ свои крепости, даже не можетъ ждать терпѣливо медленнаго движения армии наблюденья и опыта но оно должно имѣть и инженерную, чтобы завоеваніе оказалось прочнымъ. Математика и проникаетъ постепенно въ другія науки. Небесная механика уже подчинена ей безвозвратно, въ физикѣ — на полная хемія уже съ каждымъ годомъ все болѣе ей подчиняется и такъ дѣлѣ. Но она дѣлѣ и не забываетъ такъ дѣлѣ, какъ психологія или политическая экономія. Мы увидимъ, однако, что путь, которымъ она войдетъ въ науки, пока одна съ нею соприкасающаяся, уже намѣчена твердою рукою Лагранжа.

Положеніе механики между математикою и опытными науками.

§ 344 Изучая движение, механика не можетъ обойтись безъ опыта, и недовѣрчивому она стремится быть основанной на наименьшемъ числѣ и ложливѣ, данныхъ опытомъ. Эти стремленія являются основными за-

конами механики. Они могут быть сгруппированы различнымъ образомъ и наиболее удачная группировка этихъ законовъ была дана Ньютономъ въ его *Philosophiae Naturalis Principia* 1687 г.

Основные законы Ньютона.

§ 345. Ньютонъ высказалъ эти законы въ такой формѣ.

1-й законъ. Каждое тѣло пребываетъ въ своемъ состояніи покоя или равномернаго прямолинейнаго движенія, если дѣйствующія на него силы не принуждаютъ его измѣнить такое состояніе.

2-й законъ. Измѣненіе движенія пропорционально приложенной дѣйствующей силѣ и происходитъ по той прямой линіи, по которой дѣйствуетъ сила.

3-й законъ. Всякому дѣйствию соответствуетъ противодѣйствіе равное и направленное въ обратную сторону, то есть дѣйствія двухъ тѣлъ, одно на другое, всегда равны и направлены противоположно.

Эти законы установлены не однимъ или немногими опытами, но основаны на цѣломъ рядѣ наблюденій и опытовъ. Ньютону предшествовалъ Галилей, исследовавшій опытнымъ путемъ съ необыкновенною прилежательностью движеніе падающихъ тѣлъ и открывшій законы ихъ паденія. Галилей и считается отцомъ механики (1564—1642).

Но подобравъ основные законы такъ, чтобы ихъ было только три и чтобы они были достаточны для построения на нихъ всей механики это дѣло могло быть исполнено только такимъ гигантомъ науки, неизмѣнчивъ собой равнотю, какимъ былъ Ньютонъ, обладавшій движеніемъ небывалыхъ свѣтилъ законамъ тяготѣнія и непрерывное измѣненіемъ производною.

ГЛАВА I.

Механика точки.

Уравненія движенія точки.

§ 346. Движеніе точки задано, если ея координаты (x, y, z) даны въ видѣ явныхъ функций времени t , считаемого отъ какого нибудь момента. Другими словами, по даннымъ уравненіямъ вида

$$\left. \begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= f(t) \\ z &= \varphi(t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (664)$$

можно вполне прослѣдить все подробности движенія точки (x, y, z) . Дѣйствительно, по этимъ уравненіямъ опредѣляется (x, y, z) , соответствующее любому времени t , значитъ опредѣляется, гдѣ въ такое время находится точка. Эти уравненія (664) называются *уравненіями движенія точки*.

Если въ уравненіяхъ (664) время t , то получимъ два уравненія, содержащая переменныя x, y, z , они представляютъ, следовательно, нѣкоторыя

риво кривою, которая будет геометрическим мѣстомъ тѣхъ точекъ, проходящихъ черезъ точку движущуюся и чья проекція — это будетъ линия и описываемая точкой. Такая линия описываемая точкою при ея движеніи и является *траекторіею* движущейся точки.

Пусть по исключеніи времени t изъ уравненій (664) движущей точки, исключаются два уравненія, выражающіяся траекторію

Примѣръ. Даны уравненія движенія точки слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos t \\ y &= R \sin t \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (665)$$

опредѣлить траекторію точки?

Для исключенія времени t возьмемъ въ квадратѣ эти уравненія въ томъ же порядкѣ и сложимъ почленно $x^2 + y^2 = R^2$. Следовательно уравненія траекторіи будутъ:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Уравненіе $z = 0$ указываетъ, что траекторія лежитъ во плоскости xy . Уравненіе $x^2 + y^2 = R^2$ указываетъ, что она представляетъ сѣкущую окружностію сф. 241, имеющую радиусомъ R и въ началѣ координатъ

z

Данныя уравненія движенія (665) показываютъ, что при $t = 0$, должно быть: $x = R$; $y = 0$. Значитъ время считается отъ того момента, когда точка проходитъ чрезъ пересѣченіе упомянутой окружностію съ осью x . Затѣмъ изъ уравненій (665) видно, что уголъ, составляемый радиусомъ, проведеннымъ изъ начала въ движущуюся точку, равенъ t . Следовательно точка движется по окружности въ направлении указанномъ стрѣлкою и дуга, описанная ею



Фиг. 241

дл. с теченіемъ времени t и считаемая отъ A , равна $\frac{2\pi R}{2\pi} t$ (с. 241). Время $t = \frac{\pi}{2}$, т. е. ст. прохожденія чрезъ A , точка приходитъ въ пересѣченіе B радиусами съ осью y . Вобщемъ весь процессъ движенія можно прослѣдить по ея уравненіямъ движенія. Опредѣлить движеніе точки значить найти ея уравненія движенія, измѣдованія, которыхъ суть полную картину движенія.

Равномѣрно-прямолинейное движеніе точки.

§ 347 Рассмотримъ движеніе, опредѣляемое наиболее простыми уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + bt \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (666)$$

Уравнения $y = 0$, $z = 0$ пока выкажут, что точка не сходитъ съ оси x , и следовательно, следовательно, прямолинейное движение по оси x . Уравнение $x = a + bt$ показываетъ, что при $t = 0$, координата x была a . Следовательно въ началѣ времени въ эту минуту, отъ которой отсчитывается время, точка находится на разстояніи a отъ начала.

Если рассмотримъ координату точки въ два различныя момента t_0 и t_1 . Тогда если чрезъ x_0 , x_1 означимъ координаты этихъ моментовъ, получимъ:

$$x_0 = a + bt_0$$

$$x_1 = a + bt_1.$$

Вычитая 1-е изъ этихъ уравненій, а 2-го, получимъ

$$x_1 - x_0 = b(t_1 - t_0) \quad (667)$$

$x_1 - x_0$ — разность двухъ координатъ точки въ точкахъ времени $t_1 - t_0$. Если этотъ промежутокъ времени равенъ 1, то изъ (667) получимъ $x_1 - x_0 = b$. Итакъ b есть число, проходящее точкою въ единицу времени. Изъ (667) видно, что въ равныя промежутки времени точка проходитъ равныя пути. Это движение называется *равномерно прямолинейнымъ*.

Прич. 1. *Представьте точку въ каждую единицу времени, называемую скоростью точки, въ равномерно-прямолинейномъ движении. Въ равномъ промежутке времени $t_1 - t_0$ b есть величина постоянная.*

Изъ (667) имеемъ

$$b = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

Итакъ видно, что въ равномерно-прямолинейномъ движении скорость равна частному отъ разности координатъ при два время, отъ точки которой она пройдена.

Прямолинейное движение съ переменной скоростью.

§ 348 Если мы будемъ разсматривать мельчайшія частицы матеріи и представимъ *материальную точку*, безъ которой мале материальныя частицы, то и 1-му закону Ньютона равнодействующее равно результирующему параграфу равно-прямойлинейное движение и есть 1-е самое движение, которое стремится сохранить материальную точку. Если же на точку действуетъ какой нибудь причина начавшаяся *системою* то движение можетъ измениться и перестать быть равно-прямойлинейнымъ. Но 2-му закону направленно-измѣненія движения совпадаетъ съ направленною силой. Следовательно, если сила направлена по оси x , по которой точка двигалась равномерно, то измѣненіе движения произведетъ тоже движение въ томъ или другомъ ея направленіи и точка всегдѣ не съидетъ съ оси x . Въ чемъ же будетъ состоять измѣненіе ея движения? Скорость движения можетъ измениться. Итакъ, подъ дѣйствіемъ силы, точка можетъ двигаться прямоли-

пейно такимъ образомъ, что скорость ея будетъ мѣняться. Но что же такое будетъ скорость въ такомъ движеніи?

Прямолинейное движеніе съ переменною скоростью можетъ быть разсматриваемо какъ рядъ послѣдовательныхъ безконечно малыхъ движеній равномерно-прямолинейныхъ. Пусть въ теченіе безконечно малаго времени dt материальная точка проходитъ путь dx по оси x . На безконечно маломъ пути dx , прѣдленномъ въ теченіи бесконечно малаго времени dt всякое прямолинейное движеніе можн разсматривать какъ равномерное, а потому скорость, съ которою точка проходитъ путь dx оуеть, по прѣдидущему параграфу, равно частному отъ раздѣленія dx на dt . Называя скорость буквою V получимъ

$$V = \frac{dx}{dt} \dots \dots \dots (668)$$

Въ слѣдующій моментъ dt скорость сдѣлается другою, но и величина пути dx измѣнится и въ каждый моментъ.

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Итакъ, во всякомъ прямолинейномъ движеніи скорость v равна первой производной $\frac{dx}{dt}$ отъ пути по времени.

Ускореніе въ прямолинейномъ движеніи.

§ 349. Прямолинейное движеніе можетъ быть только измѣненіе скорости. Положимъ, что въ теченіи безконечно малаго промежутка времени dt скорость v измѣнилась на dv , такъ, что нынѣ обратилась въ $v + dv$.

Пусть движеніе по оси x определено уравненіями $y = 0$; $z = 0$, $x = f(t)$. Тогда по прѣдидущему параграфу:

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

Слѣдовательно:

$$dv = d\left(\frac{dx}{dt}\right) = f''(t) \cdot dt$$

Такое приращеніе получаетъ скорость въ теченіи времени dt .

Какъ скорость мы относимъ къ 1 времени, такъ и приращеніе ея относимъ къ 1 времени. Еслибы точка продолжала двигаться съ тѣмъ же приращеніемъ скорости dv въ каждое dt , то въ 1 времени она получила бы приращеніе:

$$\frac{dv}{dt} = f''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Это и есть приращеніе скорости отношенное къ 1 времени; оно называется *ускореніемъ* и обозначается буквою a .

Правило: во всяком прямолинейном движении ускорение j равно первой производной от скорости по времени или второй производной от пути по времени.

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \dots \dots \dots (669)$$

Разъясненія понятій v и j .

§ 350. Когда мы говоримъ, что въ данный моментъ точка, движущаяся съ переменною скоростью, имѣетъ скорость 100 метровъ въ секунду, это значить, что еслибы отъ даннаго момента скорость не измѣнялась, то въ 1 секунду точка прошла бы 100 метровъ, на самомъ же дѣлѣ, благодаря переменности скорости, она можетъ быть пройдена и другое разстояніе.

Напримѣръ: поѣздъ вышелъ со станціи тихо, потомъ идетъ все скорѣе и подходитъ къ слѣдующей станціи опять тихо. Мы можемъ сказать, что въ извѣстный моментъ не доходя до станціи, положимъ 10 верстъ, поѣздъ идетъ со скоростью 60 верстъ въ часъ. Это не значить еще, что черезъ часъ онъ продвинется на 60 верстъ, потому что онъ можетъ и замедлить свой ходъ и даже остановиться на станціи часа на два и слѣдовательно въ теченіи часа продвинуться отъ разсматриваемаго момента только на 10 верстъ, это значить, что, *не измѣняя своей скорости* отъ разсматриваемаго момента поѣздъ черезъ часъ продвинулся бы на 60 верстъ.

Когда мы говоримъ, что въ данный моментъ точка, имѣющая скорость 100 метровъ въ секунду, имѣетъ ускореніе 5 метровъ въ секунду, это значить, что *если бы точка не измѣняла своего ускоренія* отъ даннаго момента, то, черезъ 1 секунду скорость ея увеличилась бы на 5 метровъ и сдѣлалась бы равною 105 метрамъ въ секунду. На самомъ же дѣлѣ скорость чрезъ 1 секунду можетъ быть и не будетъ = 105 метрамъ, благодаря переменности ускоренія.

Скорости и ускоренія, имѣющіяся въ данный моментъ, мы относимъ къ 1 времени, предполагая ихъ за эту 1 времени не мѣняющимися, но не забывая, что они на самомъ дѣлѣ мѣняются, и поэтому въ слѣдующій моментъ имѣютъ другія величины. Мы можемъ напримѣръ сказать: въ данный моментъ точка обладаетъ скоростью 10 метровъ въ секунду, чрезъ $\frac{1}{10}$ секунды она имѣетъ скорость 15 метровъ въ секунду.

С и л а.

§ 351. Точка можетъ двигаться неравномѣрно (съ переменною скоростью), но прямолинейно по оси x подъ дѣйствіемъ некоторой силы направленной по оси x . По 2-му закону Ньютона измѣненіе движения пропорціонально силѣ: значить сила равна произведенію измѣненія движения на некоторый постоянный коэффициентъ m , и припомнимъ, что измѣненіе движения равно ускоренію j . Назовемъ силу чрезъ P , Ньютоновы

2-й законъ выразится такъ:

$$P = m\gamma \dots \dots \dots (670)$$

Здѣсь коэффициентъ m называется массой. Уравненіе (670) показываетъ, что во всякомъ прим. дѣйствіи *сила равна произведенію массы на ускореніе*.

По (669) можно сказать, что:

$$P = m \frac{dv}{dt} \dots \dots \dots (671)$$

или:

$$P = m \frac{d^2x}{dt^2} \dots \dots \dots (672)$$

Мы будемъ обозначать силы, дѣйствующія по направленію осей, большими буквами, соответствующими названіямъ осей. Такъ, что уравненіе (672) изобразимъ такъ:

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} \dots \dots \dots (673)$$

М а с с а.

§ 352. Изъ (670) получается:

$$m = \frac{P}{\gamma} \dots \dots \dots (674)$$

масса равна частному отъ раздѣленія силы на ускореніе. Изъ (670) имѣемъ также:

$$\gamma = \frac{P}{m} \dots \dots \dots (675)$$

Эта формула показываетъ, что, при той же самой силѣ P , ускореніе γ тѣмъ меньше, чѣмъ больше масса m .

Вещество лежащее на чашкѣ вѣсовъ подвержено одной силѣ земному притяженію, величина этой силы называется *вѣсомъ* тѣла. Ускореніе, вызываемое земнымъ притяженіемъ на поверхности земли, различно въ различныхъ мѣстахъ земного шара. Въ среднемъ оно равно 9,81 метръ въ секунду. Его мы обозначимъ буквою g . По (670) имѣемъ:

$$\text{вѣс. тѣла} = (\text{масса}) (g) = (\text{масса}) (9,81 \text{ метр.}).$$

Но вѣс. опредѣляется опытнымъ путемъ на вѣсахъ, а именно массу — то посредственнымъ опытомъ мы не опредѣляемъ; мы только знаемъ, что она пропорциональна вѣсу. Масса опредѣляется изъ (674):

$$\text{масса} = \frac{\text{вѣсу}}{g} = \frac{\text{вѣсу}}{9,81 \text{ метр.}} *) \dots \dots \dots (676)$$

Движеніе падающей точки.

§ 353. Теперь мы можемъ изучать движеніе, производимое данной силой, по данной силѣ находить уравненіе движенія. Разсмотримъ одно

*) См. примѣчаніе въ концѣ книги.

такоє движеніє и по нему познаємимся со многими важьбйшими понятіями и приємами механіки.

Въ началѣ координатъ O (фиг. 242) находится тяжелая точка m , имѣющая массу m . Въ нѣког рый моментъ, съ котораго считаемъ время, слѣдовательно при $t = 0$, предоставляемъ гѣлу свободу падать подъ вліяніемъ земного притяженія. Опредѣлимъ движеніє гѣла.

Возьмемъ ось x по вертикали внизъ. Дѣйствующая сила есть вѣсъ гѣла, который по (670) равенъ mg . По (671) эта сила равна $m \frac{dv}{dt}$. Слѣдовательно.

$$X = mg = m \frac{dv}{dt}$$

откуда:

$$g = \frac{dv}{dt}$$

или:

$$dx = g dt (677)$$

Это уравненіє надо интегрировать. Получимъ:

$$\int dv = g \int dt .$$

откуда:

$$v = gt + c_1 (678) \quad \text{Фиг. 242.}$$

Для опредѣленія и постояннаго интегрирванія c_1 , разсуждаемъ гѣлу: при $t = 0$, скорость была еще равна нулю; слѣдовательно, въ началѣ движенія, уравненіє (678) имѣло видъ:

$$0 = g \cdot 0 + c_1$$

откуда $c_1 = 0$. Слѣдовательно (678) въ теченіи всего движенія будетъ гѣлово:

$$v = gt (679)$$

По мы знаемъ по (668), что $v = \frac{dx}{dt}$. Слѣдовательно (679) можно написать гѣло:

$$\frac{dx}{dt} = gt .$$

или:

$$dx = gt dt (680)$$

Интегрируя получимъ:

$$\int dx = g \int t dt ;$$

или.

$$x = g \frac{t^2}{2} + c_2 (681)$$

гдѣ c_2 постоянное интегрирания. Опредѣляемъ его изъ начальныхъ данныхъ при $t = 0$, точка находилась въ началѣ 0, следовательно тогда было $x = 0$. Поэтому уравненіе (681), приложенное къ началу движенія, таково

$$0 = \frac{g \cdot 0^2}{2} + c_2.$$

откуда $c_2 = 0$. Следовательно:

$$x = \frac{gt^2}{2} \dots \dots \dots (682)$$

Уравненіе (679) показываетъ, что скорость увеличивается пропорціо-
нально времени. Такое движеніе называется *равномерно ускореннымъ*.

Уравненіе (682) есть именно уравненіе движенія; оно опредѣляетъ x для каждаго времени t . Оказывается, что пройденные точкою пути пропорціональны квадрату времени.

Планъ, по которому рѣшена была задача, таковъ: по законамъ Ньютона составляемъ дифференціальное уравненіе движенія $mg = m \frac{dv}{dt}$; сокращаемъ его на m , интегрируемъ, опредѣляемъ постоянное c_1 по начальнымъ дан-
нымъ, интегрируемъ полученное уравненіе $\frac{dx}{dt} = gt$, опредѣляемъ постоян-
ное c_2 по начальнымъ даннымъ, получимъ уравненіе движенія.

Такииъ образомъ рѣшаются задачи, въ которыхъ, по даннымъ силамъ, требуется найти уравненіе движенія. Въ нихъ приходится два раза инте-
грировать, при чемъ постоянныя интегрирания опредѣляются изъ начальныхъ
данныхъ.

Работа

§ 354. *Работою*, которую производитъ данная сила, дѣйствующая на свободную точку, называется произведение $P \cdot h$ силы P на путь h , пройденный точкою. Въ приведенномъ въ § 353-емъ примѣрѣ падающей точки работа силы тяжести (вѣса) mg будетъ, при прохожденіи точкою расстоянн $x_1 - x_0$, равна

$$(x_1 - x_0) mg; \dots \dots \dots (683)$$

работа же силы тяжести mg , при прохожденіи точкою пути отъ начала движенія на разстояніе x , будетъ:

$$mgx. \dots \dots \dots (684)$$

Если точка не свободна, а принуждена двигаться по опредѣленному пути, (напримѣръ если она заключена въ прямойлинейной трубкѣ) то *рабо-
та* T равна произведенію

$$Ph = T, \dots \dots \dots (685)$$

если сила направлена по пути, проходимому точкою (фиг. 243).

Если же направленіе силы составляетъ съ направленіемъ пути уголъ φ , то разлагаемъ такъ (фиг. 244). Разлагаемъ силу P на двѣ: на силу p , направленную по пути и на силу q , перпендикулярную къ пути. Замѣ-

темъ, что q только прижимаетъ точку къ тому, что препятствуетъ ей сойти съ пути, двигаетъ же точку только проложеніе p силы P на путь. Поэтому работа здѣсь будетъ равна

$$T = p \cdot s \dots \dots \dots (686)$$

произведенію пути s на проложеніе p силы P на направленіе пути.

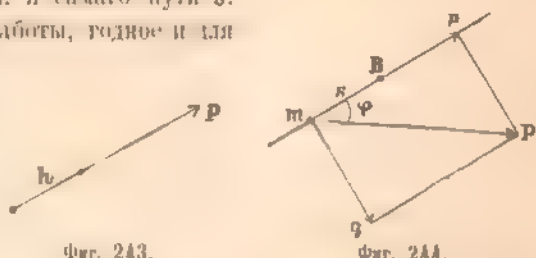
Но изъ чертежа (фиг. 244) видно, что $p = P \cos \varphi$, Следовательно:

$$T = P \cdot \cos \varphi \cdot s \dots \dots \dots (687)$$

Работа равна произведенію силы P , косинуса угла, составляемаго направленіями пути и силы, и самаго пути s .

Это самое общее выраженіе работы, годное и для криволинейнаго движенія, если за φ будемъ принимать уголъ, составляемый силой P и элементомъ траекторіи.

Работа не зависитъ отъ времени и измѣняется килограммметрами (Одинъ килограммметръ = работѣ, потребной для поднятія одного килограмма на одинъ метръ).



Живая сила.

§ 355. Произведеніе $\frac{mv^2}{2}$ массы на половину квадрата скорости называется живою силою.

Интегралъ живыхъ силъ.

§ 356. Во многихъ случаяхъ (въ какихъ имъно, увидимъ впоследствии) оказывается вѣрною следующая теорема называемая *интеграломъ живыхъ силъ*. Работа равна приращенію живой силы. Прослѣдимъ, какъ выполняется эта теорема на примѣрѣ падающей точки, приведенномъ въ § 353-емъ.

Рассмотримъ движеніе точки, происходящее въ теченіе времени $t_1 - t_0$ въ промежутокъ между моментами t_0 и t_1 . Пусть абсцисса, и скорость въ моментъ t_0 будутъ x_0 и v_0 ; тѣ же величины въ моментъ t_1 назовемъ чрезъ x_1 и v_1 . Приращеніе живой силы въ теченіи времени $t_1 - t_0$ будетъ:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \dots \dots \dots (688)$$

Работа, совершенная силой тяжести mg за время $t_1 - t_0$, будетъ:

$$mg(x_1 - x_0) = T \dots \dots \dots (689)$$

Выразимъ обѣ эти величины (688) и (689) чрезъ t . По (679) $t = gt$.

Следовательно приращение (688) живой силы будет

$$\frac{mg^2 t_1^2}{2} - \frac{mg^2 t_0^2}{2} \dots \dots \dots (690)$$

По (682) $v = gt$, следовательно работа (689) будет

$$T = mg \left(\frac{gt_1^2}{2} - \frac{gt_0^2}{2} \right) = \frac{mg^2 t_1^2}{2} - \frac{mg^2 t_0^2}{2} \dots \dots \dots (691)$$

Сравнивая (690) с (691), видим, что в движении падущей точки теорема интеграла живой силы справедлива.

$T =$ приращению живой силы, или:

$$T = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \dots \dots \dots (692)$$

Количество движения.

§ 357 Произведение mv массы на скорость называется количеством движения.

$mv =$ количество движения.

Движение точки брошенной вверх.

§ 358. Изучим движение точки, брошенной вверх. Точка брошена вверх со скоростью v_0 , значит начальная скорость точки $= v_0$. Например, пуля выброшенная из ружья имеет начальную скорость 200 метров в секунду.

Итак, задача такова, исследовать ускорению $g = 9,81$ метров силы земного тяготения и по данной начальной скорости v_0 вертикально направленного вверх движение точки, когда же точка брошена в момент $t = 0$, с которого начинаем считать время.

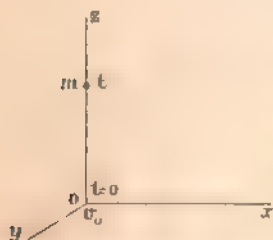
Точку пространства, из которой выбрасывается точка m , примем за начало координат (фиг. 245). Возьмем ось z по вертикали вверх.

Сила mg действует тоже по вертикали, но в сторону отрицательных z : точка не сойдет с оси z . В течение движения будем иметь $x = 0$, $y = 0$. Сила $Z = mg$ по (671) она равна $m \frac{dv}{dt}$. Итак

$$Z = -mg = m \frac{dv}{dt}.$$

Сокращая на m получим

$$-g = \frac{dv}{dt}.$$



Фиг. 245

или:

$$dv = -g dt,$$

откуда:

$$\int dv = -g \int dt;$$

или:

$$v = -gt + c_1. \dots \dots \dots (693)$$

При $t = 0$ скорости $v = v_0$; следовательно (693) в начале движения имѣеть видъ:

$$v_0 = 0 + c_1; \text{ откуда: } c_1 = v_0.$$

Слѣдовательно, въ теченіи движенія (693) имѣеть видъ

$$v = -gt + v_0. \dots \dots \dots (694)$$

Но (694) имѣемъ:

$$v = -gt + v_0 = \frac{dz}{dt};$$

откуда:

$$dz = -gt \cdot dt + v_0 dt;$$

Интегрируя, находимъ:

$$\int dz = -g \int t dt + v_0 \int dt;$$

или:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + c_2. \dots \dots \dots (695)$$

При $t = 0$, координата $z = 0$. Слѣдовательно,

$$0 = 0 + 0 + c_2, \text{ откуда: } c_2 = 0.$$

По этому:

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \dots \dots \dots (696)$$

Опредѣлимъ наибольшую высоту, до которой поднимется точка. Иначе говоря, найдемъ максимумъ выраженія (696). Для этого, по правилу II, § 170-го, приравняемъ производную съб. (696) нулю:

$$v_0 - gt = 0;$$

откуда $t = \frac{v_0}{g}$. Итакъ точка достигнетъ наибольшей высоты поднятаи чрезъ $\frac{v_0}{g}$ секундъ послѣ вылета изъ 0. Вслѣдствіе этого значенія $\frac{v_0}{g}$ имѣемъ t въ (696), чтобы получить z равна е наибольшей высотѣ поднятаи. Положимъ эту высоту чрезъ h . Получимъ:

$$z = h = \frac{v_0 \cdot v_0}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Итакъ:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}. \dots \dots \dots (697)$$

Отсюда:

$$v_0 = \sqrt{2gh}. \quad (698)$$



Фиг. 246.

Формула (698) определяет ту начальную скорость, сь которою точка должна быть брошена (въ безвоздушномъ пространствѣ), чтобы наибольшая высота поднятія ея была h .

Въ приложеніи къ движению жидкости формула (698), пренебрегая дѣйствіемъ воздуха, выражаетъ скорость v_0 вылета воды изъ фонтана (фиг. 246) по данной высотѣ h его струи. Въ приложеніи къ жидкости формула (698) называется закономъ Торричелли.

Потенціальная функція.

§ 359. Для всѣхъ силъ природы существуютъ такія функціи U координатъ x, y, z движущейся точки, производныя которыхъ по этимъ координатамъ равны проложеніямъ силы на оси координатъ, тѣмъ проложеніямъ, которыя мы условились называть чрезъ X, Y, Z , такъ что:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z. \quad (699)$$

Такая функція называется *потенціальною* или потенциаломъ.

Въ движеніи точки брошенной вверхъ (§ 358), потенциалъ будетъ:

$$U = mgz, \quad (700)$$

потому что сила $Z = -mg$; следовательно:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -mg = Z.$$

Законъ сохраненія живой силы.

§ 360. Въ всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда точка, или система точекъ, или свободны или принуждены двигаться по поверхностямъ и линиямъ, не мѣняющимъ свою форму, существуетъ законъ *живая сила равна суммѣ потенциала съ постояннымъ количествомъ*:

$$\frac{mv^2}{2} = U + C. \quad (701)$$

Если U есть $f(x, y, z)$, то, при возвращеніи въ прежнее положеніе, живая сила пріобрѣтаетъ прежнюю величину—сохраняется.

Проверимъ существованіе этого закона на разсмѣривномъ въ предыдущемъ параграфѣ движеніи точки брошенной вверхъ.

Тамъ $U = mgz$; выразимъ его чрезъ время вставки, вылетъ z ,

его выражения (696) чрез t . Получимъ:

$$U = mg \left(v_0 t + \frac{gt^2}{2} \right) = mgv_0 t + \frac{mg^2 t^2}{2} \dots (702)$$

Выразимъ теперь живую силу $\frac{mv^2}{2}$ чрезъ t . Для этого вставимъ въ нее, вмѣсто v , ея выражение (694) чрезъ t . Получимъ.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left(v_0 + gt \right)^2 = \frac{mv_0^2}{2} + mv_0 gt + \frac{mg^2 t^2}{2} \dots (703)$$

Сравнивая (702) съ (703) видимъ, что:

$$\frac{mv^2}{2} = U + \frac{mv_0^2}{2} = -mgx + \frac{mv_0^2}{2}$$

Идетъ ли точка чрезъ положеніе A къверху или возвращается (фиг. 247), всегда въ A живая сила имѣетъ ту же величину $-\frac{mv^2}{2} = mg \cdot (OA) + \frac{mv_0^2}{2}$.

Но $\frac{mv^2}{2}$ есть величина постоянная для всего движенія, потому что и m и начальная скорость очевидно не мѣняются въ теченіи движенія. Слѣдовательно, законъ:

$$\frac{mv^2}{2} = U + C$$

справедливъ для движенія точки, брошенной вверхъ.

Законъ сохраненія энергіи.

§ 361. Живую силу $\frac{mv^2}{2}$ называютъ также *кинетическою энергіею движущейся точки*, потому что она (по интегралу живыхъ силъ (§ 356) способна переходить въ работу).

Потенциальная функція, взятая съ обратнымъ знакомъ ($-U$), называется *потенциальною энергіею* движущейся точки.

Сумма потенциальной и кинетической энергіи называется *полною энергіею*

$$\frac{mv^2}{2} + (-U),$$

то есть:

$$\frac{mv^2}{2} - U = \text{полная энергія} \dots (704)$$

Изъ (704) слѣдуетъ:

$$\frac{mv^2}{2} - U = C \dots (705)$$

полная энергія движущейся точки есть величина постоянная.

Этотъ законъ есть знаменитый законъ сохраненія энергіи. Овъ, какъ мы видимъ, тождественъ съ закономъ сохраненія живой силы.

A

B

Фиг. 247.

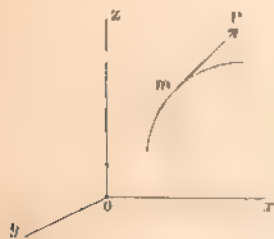
Система точекъ.

§ 362. Совокупность материальных точек, будетъ ли это сплошное тѣло, или жидкость, или отдѣльныя точки, называется *системою*. Живую силу системы называютъ сумму живыхъ силъ составляющихъ ея точекъ. Знакъ суммы такой: Σ .

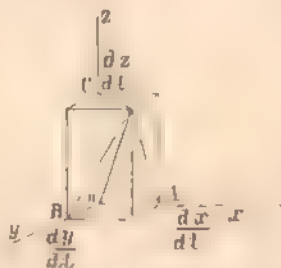
Криволинейное движеніе точки.

Скорость въ криволинейномъ движеніи.

§ 363. Каждый элементъ кривой мы разсматриваемъ какъ безконечно малую прямую линію и скорость, которая направлена по элементу, изображаемъ геометрически въ видѣ прямолинейнаго отрезка (*вектора*), длина котораго была бы пропорциональна скорости (фиг. 248) и который начинался бы отъ движущейся точки m . Но такіе стрѣлки (векторы) было бы затруднительно разсматривать даже въ движеніи одной точки. Поэтому мы предпочитаемъ (см. § 73) зрѣть векторы не въ координатъ и самую точку



Фиг. 248.



Фиг. 249.

пролагаемъ на оси. То есть разсматриваемъ не движеніе точки, а движеніе ея проекцій A , B и C (фиг. 249). Не разсматриваемъ самую скорость V , но проекціи V_x , V_y , V_z скорости на оси. Когда

движется точка m и если ей предложены двѣ точки A и B (и можно объ этомъ въ подробныхъ курсахъ это доказать), то скорости движенія *проежекцій* равны *проеженіямъ* V_x , V_y , V_z скорости V на оси.

Такимъ образомъ разсмотрѣніе скорости криволинейнаго движенія приводитъ къ разсмотрѣнію скорости прямолинейныхъ движеній проекцій A , B и C движущейся точки. Нужно только обозначить себѣ возможность опредѣленія V и ея направленія по V_x , V_y , V_z . Но (668), называя чрезъ x , y , z координаты движущейся точки m и получимъ

$$V_x = \frac{dx}{dt}.$$

$$V_y = \frac{dy}{dt}.$$

$$V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Называя чрез α, β, γ углы наклона скорости V къ осямъ координатъ, получимъ по (115):

$$V_x = V \cos \alpha; \quad V_y = V \cos \beta; \quad V_z = V \cos \gamma.$$

Введемъ эти равенства въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$(V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2 = V^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma).$$

Но по (126) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Следовательно

$$(V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2 = V^2$$

или

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \dots \dots \dots (706)$$

Чтобы эту формулу, мы всегда по известнымъ V_x, V_y, V_z можемъ определить скорость V .

Изъ 668 слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha = \frac{V_x}{V} &= \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\ \cos \beta = \frac{V_y}{V} &= \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\ \cos \gamma = \frac{V_z}{V} &= \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \end{aligned} \right\} (707)$$

а эти формулы позволяютъ определить направление V .

Примѣръ. Определить скорость и ея направление въ движении, рассмотрѣнномъ въ § 346 и опредѣляемомъ уравненіями

$$x = R \cos t$$

$$y = R \sin t$$

$$z = 0.$$

Имѣемъ:

$$\frac{dx}{dt} = -R \sin t; \quad \frac{dy}{dt} = R \cos t; \quad \frac{dz}{dt} = 0. \dots \dots \dots (708)$$

Вставляя въ (706), получимъ:

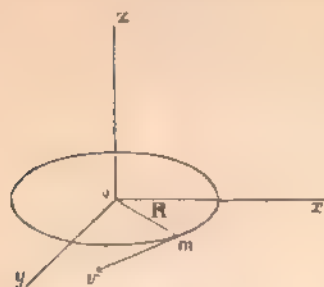
$$V = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = \sqrt{R^2} = R.$$

Скорость равна радиусу. Направление ее определим, вставив величины (708) в (707). Получимъ:

$$\cos \alpha = \frac{R \sin t}{R} = \sin t$$

$$\cos \beta = \frac{R \cos t}{R} = \cos t$$

$$\cos \gamma = 0.$$



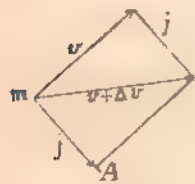
Фиг. 250.

Эти уравнения показываютъ, что скорость (какъ это и видно изъ простаго разсмотрѣнія того, что скорость направлена по элементу траекторіи) перпендикулярна радиусу (фиг. 250).

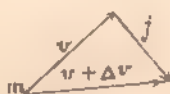
Ускореніе въ криволинейномъ движеніи.

§ 364. Несколько сложнѣе обстоятъ дѣло съ ускореніемъ въ криволинейномъ движеніи, потому что прежде всего еще надо разсмотрѣть, что именно слѣдуетъ разумѣть подъ словомъ ускореніе въ криволинейномъ движеніи.

Ускореніе — это то, что Ньютонъ разумѣлъ подъ словомъ «измѣненіе движенія». Въ прямолинейномъ движеніи мѣнялась только скорость (конечно и координата мѣнялась, но безъ этого не было бы и движенія). Въ криволинейномъ движеніи мѣняется и направленіе движенія, направленіе скорости. Пусть v есть скорость точки въ моментъ t (фиг. 251), тогда какъ въ слѣдующій моментъ $t + \Delta t$ скорость уже измѣнится по величинѣ и по направленію и превратится въ $v + \Delta v$. Ускореніе j можно разсматривать какъ нѣкоторую добавочную скорость, которую надо приложить къ скорости v , чтобы получить $v + \Delta v$. Скорости складываются какъ силы по правилу параллелограмма: равнодѣйствующая двухъ скоростей v и j равна, по величинѣ и по направленію, діагонали параллелограмма, построеннаго на смежныхъ сторонахъ v и j .



Фиг. 251.



Фиг. 252.

Или, что то же (фиг. 252), $v + \Delta v$ есть послѣдняя сторона треугольника, двѣ другія стороны котораго суть v и j .

Можно также сказать, что ускореніе j равно, по величинѣ и направленію, замыкающей сторонѣ треугольника, построеннаго на v и $v + \Delta v$ по тѣмъ же правиламъ, какъ и въ первомъ случаѣ, только приложено оно къ точкѣ m , какъ линия mA на (фиг. 251).

Самое важное заключеніе, которое мы вынесемъ изъ этого рассужденія, состоитъ въ томъ, что *направленіе ускоренія, вообще говоря, не совпадаетъ съ направлениемъ скорости въ криволинейномъ движеніи.*

Срѣя еще не указавъ только что свое бы отъ точки m , мы изобразимъ его по величинѣ и направленію нѣкоторымъ векторомъ.

Затѣмъ мы разсматриваемъ не самое ускореніе, а его проложенія на оси. Въ подробныхъ курсахъ доказывается, что: ускоренія проложеній *A*, *B*, *C* точки равны проложеніямъ j_x, j_y, j_z ускоренія *j*. Проложенія *A*, *B*, *C* точки движутся по осямъ прямолинейно, поэтому къ нимъ применима формула (669), по которой:

$$\left. \begin{aligned} j_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ j_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ j_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (709)$$

Отсюда, совершенно такъ же, какъ въ § 363 омъ, выводимъ:

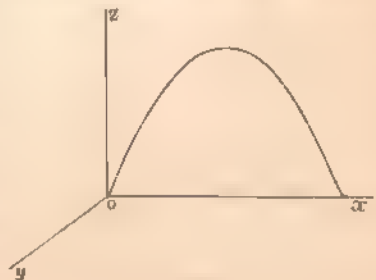
$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}; \dots \dots (710)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(j, x) &= \frac{j_x}{\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}} = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} \\ \cos(j, y) &= \frac{j_y}{\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} \\ \cos(j, z) &= \frac{j_z}{\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}} \end{aligned} \right\} (711)$$

Движеніе тяжелой точки, брошенной наклонно къ горизонту.

§ 365. Какъ примѣръ изслѣдованія криволинейнаго движенія свободной точки разсмотримъ движеніе тяжелой точки, брошенной съ начальною скоростью v_0 подъ угломъ φ къ горизонту (фиг. 253).

Примемъ начальное положеніе тяжелой точки *m* за начало координатъ. Плоскость (*x, z*) выберемъ такъ, чтобы она проходила чрезъ направленіе начальной скорости и чтобы горизонтальная ось *х* совѣтъ составляла съ начальною скоростью острый или прямой, но не тупой уголъ. Ось *z* возьмемъ по вертикали вверхъ.



Фиг. 253.

На точку действуют только силы тяжести, ускорение g , производимое гравитацией, направлено вниз. Поэтому, называя чрез X, Y, Z проекции силы тяжести на оси координат, считая, что ускорения проекций — проекциями ускорения и формулу (67) получим:

$$X = 0 = m \frac{d^2x}{dt^2}; \quad Y = 0 = m \frac{d^2y}{dt^2}; \quad Z = -mg = +m \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (712)$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$\frac{dx}{dt} = c_1; \quad \frac{dy}{dt} = c_2; \quad \frac{dz}{dt} = -gt + c_3. \quad (713)$$

В начале движения проекция начальной скорости суть:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 \cos \varphi; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0; \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = v_0 \sin \varphi$$

Поэтому

$$c_1 = v_0 \cos \varphi; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = v_0 \sin \varphi.$$

Подставляя эти величины постоянных в (713), получим:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \varphi; \quad \frac{dy}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = v_0 \sin \varphi - gt. \quad (714)$$

Интегрируя эти уравнения, находим:

$$x = t \cdot v_0 \cos \varphi + c_4; \quad y = c_5; \quad z = t \cdot v_0 \sin \varphi - \frac{gt^2}{2} + c_6. \quad (715)$$

Определяем постоянные c_4, c_5, c_6 интегрируя из начальных данных: при $t = 0$ имела:

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0.$$

Следовательно:

$$c_4 = 0; \quad c_5 = 0; \quad c_6 = 0.$$

Поэтому из (715) получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= t \cdot v_0 \cos \varphi \\ y &= 0 \\ z &= t \cdot v_0 \sin \varphi - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (716)$$

Второе из этих уравнений движения показывает, что точка движется в вертикальной плоскости (x, z). Для определения траектории исключим t из остальных двух уравнения (716).

Для этого определим t из 1-го и вставим в третье уравнение. Получим:

$$z = \frac{x}{\cos \varphi} \cdot \sin \varphi - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \varphi};$$

или

$$z = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \dots \dots (717)$$

Здесь все величины, кроме x и z , постоянны.

Для нахождения точки высочайшего поднятия определим максимум от z , который обозначим так z_m .

Для этого приравняем производную по x от правой части (717) нулю

$$\operatorname{tg} \varphi - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \varphi} = 0$$

Отсюда соответствующий наибольшей величине z будет иметь

$$x_m = \frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot v_0^2 \cos^2 \varphi}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{g} \dots \dots (718)$$

Вставив эту величину вместо x в (717), получим наибольшую величину z :

$$z_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g} - \frac{g \cdot v_0^4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{2v_0^2 \cos^2 \varphi \cdot g^2}$$

или

$$z_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{g} - \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} \dots \dots (719)$$

Перенесем начало координат в точку высочайшего подъема, не изменив направления осей. Для этого заметим, что старые координаты выразятся через новые так:

$$\begin{aligned} x &= x' + z_m = x' + \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi \\ z &= z' + z_m = z' + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Вставим эти величины в (717), получим

$$\begin{aligned} z &= z' + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi - \left(x' + \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi \right) \operatorname{tg} \varphi \\ &\quad - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \left[x' + \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi \right]^2. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} z &= z' + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi = x' \operatorname{tg} \varphi + \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \varphi - \frac{gx'^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} \\ &\quad - \frac{g \cdot 2v_0^2 \cdot x' \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi}{2v_0^2 \cos^2 \varphi \cdot g} - \frac{gv_0^4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{2v_0^2 \cdot g^2 \cdot \cos^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$z' = x' \operatorname{tg} \varphi + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi - \frac{gx'^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi} - x' \operatorname{tg} \varphi - \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g};$$

или:

$$x_1^2 = 2v_0^2 \cos^2 \varphi x_2^2.$$

Отсюда:

$$x_1^2 = \frac{2v_0^2 \cos^2 \varphi}{g} x_2.$$

Пологая $\frac{2v_0^2 \cos^2 \varphi}{g} = 2p$, получим:

$$x_1^2 = 2px_2.$$

Получив уравнение параболы ось которой направлена вертикально (фиг. 254); сама парабола обращена вниз, вершина же она имеет, относительно прежних осей, координаты, выражаемые формулами (718) и (719).

Из уравнения (717), полагая въ немъ $z = 0$, получимъ:

$$x = \frac{2v_0^2}{g} \sin \varphi \cdot \cos \varphi = OA; \text{ (фиг. 254). (720)}$$

Это расстояние OA (фиг. 254), на которое летаетъ брошенная точка по горизонту, называется *амплитудой* бросания или дальностью полета.

Посмотримъ, когда она будетъ наибольшая. Для этого замѣтимъ, что (720) можно написать въ видѣ:

$$OA = \frac{v_0^2}{g} \sin (2\varphi).$$

Эта величина достигнетъ наибольшаго значенія, когда $\sin (2\varphi) = 1$, то есть, когда $2\varphi = \frac{\pi}{2}$, или $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$. Итакъ,

наибольшая дальность полета получается, когда стрѣляющъ подъ угломъ 45° къ горизонту.

Таково движеніе точки, брошенной въ пустотѣ. Воздухъ измѣняетъ это движеніе тѣмъ менѣе, чѣмъ менѣе начальная скорость, тѣмъ что камень, брошенный рукою, весьма мало уклоняется отъ параболическаго движенія; центръ тяжести его описываетъ довольно точно параболу. Выводъ сопротивленіе воздуха, можно болѣе точно опредѣлить движеніе пули или пушечнаго ядра, но мы этого дѣлать не будемъ.

Равноѣрное движеніе точки по окружности.

§ 366. Въ предыдущемъ параграфѣ мы разсмотрѣли примѣръ такой задачи, въ которой по данной силѣ тяжести, и слѣдовательно, по данной величинѣ и направленію ускоренія, надо было найти уравненія движенія точки.

Теперь рѣшимъ такую задачу, въ которой, по даннымъ уравненіямъ движенія, требуется найти величину и направленіе ускоренія. Найдѣмъ

ускореніе ег направленіе въ иллі тангенсъ нами уже отчасти движеніи

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos t \\ y &= R \sin t \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (721)$$

Въ этомъ движеніи, какъ мы увиди въ § 665-мъ, уголъ, составляемый съ осью x радиусомъ кружности, по которой движется точка, равенъ t . Следовательно, дуги, проходимыя по окружности движущеюся точкою, при определенныхъ временахъ t въ равныя времена точка проходитъ равныя дуги. Поэтому это движеніе называется *равномернымъ движениемъ по окружности*. Величина скорости этой не мѣняется, но мѣняется только ея направленіе. Изъ (721) находимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -R \sin t; & \frac{dy}{dt} &= R \cos t; & \frac{dz}{dt} &= 0; \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -R \cos t; & \frac{d^2y}{dt^2} &= -R \sin t; & \frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Вставляя указанные величины вторыхъ производныхъ въ (710), получимъ

$$j = \sqrt{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} = \sqrt{R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{R^2} = R.$$

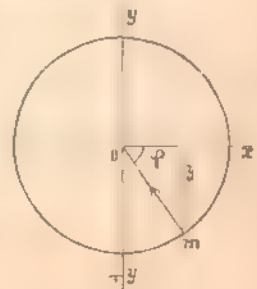
Вставляя указанные вторые производныя въ (711), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos(j, x) &= -\frac{R \cos t}{R} = -\cos t \\ \cos(j, y) &= \frac{R \sin t}{R} = \sin t \\ \cos(j, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (722)$$

Изъ (721) и изъ чертежа (фиг. 255) видно, что косинусъ наклоненія къ осямъ x и y радиуса, проведеннаго въ точку m , равны $\cos t$ и $\sin t$. Следовательно (722) показываетъ, что ускореніе составляетъ съ радиусомъ уголъ въ 180° , потому что

$$\left. \begin{aligned} \cos(180^\circ + \varphi) &= -\cos \varphi; \\ \sin(180^\circ + \varphi) &= -\sin \varphi. \end{aligned} \right\}$$

Итакъ ускореніе въ равномъ движеніи точки о окружности направлено въ радиусу въ диаметр. Это значитъ, что сила, движущая и отъпустить точку въ окружность, направлена къ центру. Если же точка (или не совсемъ то же самое) продолжитъ свои путь влѣкъ съ при-

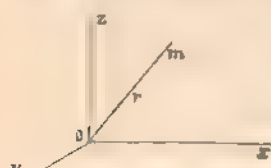


Фиг. 255

рѣдительно къ ея концу прямо при отъезди и бѣжитъ, окружаясь подъ дѣйствіемъ силы натяженія нити направленною до центра. Следовательно въ этомъ движеніи направлена и касательной, такъ что если нитка сорвется, то при продолженіи прямо по касательной.

Общее свойство центральных движений.

§ 367. Чрезвычайно важный, въ особенн сти въ астрономии, классъ движеній представляютъ *движенія центральныя*, происходящія подъ влиянiемъ какой-нибудь притягательной или отталкивающей силы какой-нибудь неподвижной точки (центра).



Фиг. 256.

Изведемъ общи свойства центральныхъ движеній.

Положимъ, что точка *m* (фиг. 256) притягивается неподвижнымъ центромъ, находящимся въ началѣ координатъ. На точку дѣйствуетъ сила *P*, направленная къ центру *O*, если имѣемъ дѣло съ притяженiемъ. Сила *P* будетъ направлена по продолженiю радиуса-вектора *Om* отъ центра въ случаѣ отталкиванiя. Направленiя силы *P* будутъ определяться (размѣтриваемъ сразу случаи притяженiя и отталкиванiя) уравненiями

$$\cos (P, x) = \mp \frac{x}{r}; \quad \cos (P, y) = \mp \frac{y}{r}; \quad \cos (P, z) = \frac{z}{r}, \quad \dots \quad (723)$$

гдѣ чрезъ *r* обозначить радиусъ-векторъ *Om*. Знакъ — означаетъ притяженiе, знакъ + отталкиванiю; если же будемъ считать самую силу *P* отрицательной, въ случаѣ притяженiя и положительной въ случаѣ отталкиванiя, то въ формулахъ (723) можно удержать вѣчно знакъ —. Дифференциальныя уравненiя движенiя получимъ, принимая что произведенiя массъ на продолженiя ускоренiй равны продолженiямъ силы по (673). Получимъ, согласно съ (723):

$$\left. \begin{aligned} X = P \cdot \cos (P, x) &= P \cdot \frac{x}{r} = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ Y = P \cdot \cos (P, y) &= P \cdot \frac{y}{r} = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ Z = P \cdot \cos (P, z) &= P \cdot \frac{z}{r} = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (724)$$

или

$$\left. \begin{aligned} P \cdot \frac{x}{r} &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ P \cdot \frac{y}{r} &= m \frac{d^2y}{dt^2} \\ P \cdot \frac{z}{r} &= m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (725)$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{P}{rm} = \frac{1}{x} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{y} \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{z} \frac{d^2z}{dt^2};$$

или:

$$\left. \begin{aligned} x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} &= 0 \\ y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} &= 0 \\ z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (726)$$

Интегрируя (726), находимъ:

$$\left. \begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= c_1 \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= c_2 \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= c_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (727)$$

Умноживъ 1-ое изъ уравнений (727) на z , второе на x , третье на y и сложивъ, получимъ:

$$\begin{aligned} z \left(z \frac{dy}{dt} - y \frac{dz}{dt} \right) + x \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) + y \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \\ = c_1 z + c_2 x + c_3 y. \end{aligned}$$

Раскрывъ скобки и сдѣлавъ приведение, получимъ.

$$c_1 z + c_2 x + c_3 y = 0. \dots \dots \dots (728)$$

Это уравнение плоскости, проходящей чрезъ начало координатъ. Итакъ: траекторія точки лежитъ въ нѣкомъ ряду плоскостей (728), проходящей чрезъ центръ притяженія O .

Законъ площадей.

§ 368. Мы взяли направление осей координатъ совершенно произвольно. Примемъ плоскость (728) траекторіи за плоскость (x, y) , тогда будетъ:

$$z = 0; \quad \frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Уравнения (727) обращаются въ одно уравнение

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c_1 \dots \dots \dots (729)$$

По (497) величина $\frac{x dy}{dt} - \frac{y dx}{dt}$ есть дифференціалъ сектора, до (497)

$$x dy - y dx = r^2 d\varphi$$

Вставляя въ (729), получимъ:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c_1 \dots \dots \dots (730);$$

или:

$$r^2 d\varphi = c_1 dt \dots \dots \dots (731)$$

Формулы (729) и (731) показываютъ, следовательно, что во всякомъ центральномъ движеніи площади секторовъ, описываемыхъ радіусомъ вектора, пропорциональны времени. Въ этомъ состоитъ *Законъ площадей*: въ центральномъ движеніи радіусъ-векторъ описываетъ въ равныя времена равныя площади.

Скорость центрального движенія въ полярныхъ координатахъ.

§ 369. Обыкновенно центральныя движенія излагаются въ полярныхъ координатахъ. Опредѣлимъ въ полярныхъ координатахъ скорость центрального движенія. Примемъ плоскость траекторій за плоскость x, y , неподвижный центр O за начало координатъ и за полярную ось x за полярную ось. По формулѣ (706) получимъ:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dt)^2} \dots \dots \dots (732)$$

Формулы преобразованія таковы:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

Изъ нихъ находимъ:

$$\begin{aligned} dx &= -r \sin \varphi d\varphi + \cos \varphi \cdot dr \\ dy &= r \cos \varphi \cdot d\varphi + \sin \varphi dr \end{aligned} \dots \dots \dots (733)$$

По этимъ формуламъ находимъ:

$$\begin{aligned} (dx)^2 + (dy)^2 &= r^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) (d\varphi)^2 + (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) (dr)^2 \\ &+ 2d\varphi \cdot dr [r \sin \varphi \cos \varphi - r \sin \varphi \cos \varphi]; \end{aligned}$$

или:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 \dots \dots \dots (734)$$

Вставляя эту величину въ (732), находимъ:

$$v^2 = \frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{dt^2} = r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

Но:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

Поэтому

$$v^2 = r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \right] \dots (735)$$

II закону площадей $r^2 d\varphi = c dt$, поэтому

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}$$

Вставляя эту величину вмѣсто dt въ (735), получимъ:

$$v = \left(\frac{cd\varphi}{r^2 \frac{dr}{d\varphi}} \right)^2 \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right];$$

или

$$v^2 = \frac{c^2}{r^4} \left[r^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2} \right] = c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{dr^2}{r^4 d\varphi^2} \right]. \quad (736)$$

Выраженіе скорости упростится, если вмѣсто r вставимъ переменное $u = \frac{1}{r}$. Чтобы это сдѣлать, замѣнимъ, что изъ этого положенія слѣдуетъ,

$$du = -\frac{dr}{r^2}; \quad \frac{1}{r^2} = u^2; \quad \frac{dr^2}{r^4 d\varphi^2} = \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2$$

Вставляя эти величины въ (736), получимъ,

$$v^2 = c^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 \right]. \quad (737)$$

По этой формулѣ опредѣляется скорость въ центральномъ движеніи по даннымъ φ и u , или по даннымъ φ и r , потому что если дано r , то узнаемъ u .

Сила, производящая центральное движеніе

§ 370. Опредѣлимъ силу P притяженія, оказываемаго центромъ. Въ центральномъ движеніи по формуламъ (725) имѣемъ:

$$\frac{P}{m} \cdot \frac{x}{r} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{P}{m} \cdot \frac{y}{r} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

умноживъ 1-е изъ этихъ уравненій на dx , второе на dy , и сложивъ получимъ:

$$\frac{P}{m} \frac{xdx + ydy}{r} = dx \frac{d^2 x}{dt^2} + dy \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (738)$$

Найдемъ выраженіе величины $xdx + ydy$ въ полярныхъ координатахъ. Для этого продифференцируемъ уравненіе $x^2 + y^2 = r^2$. Получимъ:

$$xdx + ydy = r dr \quad (739)$$

Вставляя эту величину въ (738) получимъ

$$\frac{P}{m} \frac{r dr}{r} = dx \frac{d^2 x}{dt^2} + dy \frac{d^2 y}{dt^2};$$

или

$$dx \frac{d^2x}{dt^2} + dy \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{P}{m} \frac{r dr}{r} = \frac{P}{m} \frac{du}{u} \quad (740)$$

Но левая часть этого равенства получается дифференцированием величины

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right]$$

Слѣдовательно:

$$dx \frac{d^2x}{dt^2} + dy \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2} d \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} d(v^2)$$

Вставляя въ (740), получимъ:

$$\frac{1}{2} d(v^2) = \frac{P}{m} \frac{du}{u}$$

или

$$\frac{P}{m} = \frac{u^2}{2} \frac{d(v^2)}{du} \quad (741)$$

Дифференцируя по u равенство (741), получимъ

$$\begin{aligned} \frac{d(v^2)}{du} &= v^2 \left[\frac{1}{u} + 2 \left(\frac{dv}{dz} \right) \frac{d}{du} \left(\frac{du}{dz} \right) \right] = 2v^2 \left[u + \frac{d \left(\frac{du}{dz} \right)}{dz} \right] \\ &= 2v^2 \left[u + \frac{d^2u}{dz^2} \right] \end{aligned}$$

Внося эту величину въ (741) получимъ

$$\frac{P}{m} = v^2 u^2 \left(u + \frac{d^2u}{dz^2} \right) \quad (742)$$

Вотъ выраженіе для опредѣленія центральной силы P .

Законъ площадей характеризуетъ центральное движеніе.

§ 371. Докажемъ теорему обратную той, которая была высказана въ § 368-омъ въ видѣ закона площадей.

Теорема. Если движущаяся точка подчиняется закону площадей, то движеніе ея центрально, то есть происходитъ подъ дѣйствіемъ параллельной и отвѣскаивающей силы относительно неподвижнаго центра.

Если движущаяся точка подчиняется закону площадей, то по § 368-ому:

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= c_1 \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= c_2 \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= c_3 \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\left. \begin{aligned} x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} &= 0 \\ y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} &= 0 \\ z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (713)$$

Отсюда:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} \dots \dots \dots (714)$$

Называя величину этих отношений чрез k , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= kx \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= ky \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= kz \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (715)$$

Возведи въ квадратъ эти равенства, складывая ихъ и припоминая, что $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, получимъ:

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2 = k^2 r^2$$

откуда:

$$k^2 = \frac{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2}{x^2} = \frac{\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2}{y^2} = \frac{\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2}{z^2} = \frac{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2}{r^2} \dots (716)$$

И сила равна произведению массы на ускореніе. Поэтому изъ (716), получимъ:

$$P = m \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2} \dots \dots \dots (717)$$

Кромѣ того, мы знаемъ, что

$$P \cos (P, x) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

и подобныя же выраженія для y и z . Поэтому

$$\cos (P, x) = \frac{m \frac{d^2 x}{dt^2}}{P} \dots \cos (P, y) = \frac{m \frac{d^2 y}{dt^2}}{P} \dots \cos (P, z) = \frac{m \frac{d^2 z}{dt^2}}{P}$$

Вставляя сюда вмѣсто вторыхъ производныхъ ихъ величины изъ (746), получимъ:

$$\cos(P, x) = \frac{mx}{Pr} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

и такія же выраженія для $\cos(P, y)$; $\cos(P, z)$. Вставляя въ нихъ вмѣсто P его величину изъ (747), получимъ:

$$\cos(P, x) = \pm \frac{x}{r}$$

$$\cos(P, y) = \pm \frac{y}{r}$$

$$\cos(P, z) = \pm \frac{z}{r}$$

Эти уравненія показываютъ, что сила исходитъ изъ одного центра, находящагося на разстоянн r отъ движущейся точки (x, y, z) , что и требовалось доказать.

Выводъ закона всемірнаго притяженія изъ движенія планетъ.

§ 372. Одно изъ величайшихъ открытій Ньютона заключалось въ томъ, что онъ нашелъ всемірное притяженіе, обуславливающее движеніе планетъ по эллиптическимъ орбитамъ около солнца, и опредѣлить, что притяженіе, называемое солнцемъ, обратнъ пропорціонально квадрату разстоянія планеты отъ солнца. Къ этому Ньютонъ Кеплеръ изъ наблюденія надъ движеніемъ планетъ нашелъ слѣдующіе законы этого движенія.

Кеплеровы законы.

1) Каждая планета движется по эллипсу, въ одномъ изъ фокусовъ котораго находится солнце.

2) Площади, описываемыя радиусами векторами, проведенными отъ солнца къ планетамъ, возрастаютъ пропорціонально времени.

3) Квадраты времени обращенія планетъ относятся между собою какъ кубы большихъ осей планетныхъ орбитъ (траекторн небесныхъ тѣлъ называются *орбитами*).

Покажемъ, какъ на основанн законовъ Кеплера, выведенныхъ изъ наблюденія, можно заключить, что движеніе планетъ происходитъ подъ дѣйствіемъ притяженія, оказываемаго солнцемъ, и можно вывести Ньютонъ законъ притяженія.

Второй Кеплеръ въ законъ отъ закн площадей. Слѣдовательно, по сказанному въ предыдущемъ параграфѣ, планеты движутся подъ дѣйствіемъ центральной силы.

Согласно первому Кеплерову закону планеты движутся по эллипсамъ.

Уравнение эллипса в полярных координатах таково:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \dots \dots \dots (748)$$

Деля здесь подставив $\frac{1}{r} = u$, получим:

$$u = \frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi) \dots \dots \dots (749)$$

Дифференцируя это уравнение, находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} &= \frac{e}{p} \sin \varphi \\ \frac{d^2u}{d\varphi^2} &= -\frac{e}{p} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (750)$$

Вставив u из (749), $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$ из (750) в (742), получим:

$$\frac{P}{m} = -\frac{e^2 (1 + e \cos \varphi)^2}{p^2} \left[\frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi) - \frac{e}{p} \cos \varphi \right].$$

или по (748):

$$\frac{P}{m} = -\frac{e^2 (1 + e \cos \varphi)^2}{p^2} \cdot \frac{1}{p} = -\frac{e^2}{p} \cdot \frac{1}{r^3};$$

или:

$$P = -\frac{mc}{p \cdot r^3}$$

Здесь m , e , p суть постоянные величины (следовательно сила P обратно пропорциональна квадрату расстояния r). Из найденных нами законов Кеплера мы вывели закон Ньютоновского притяжения.

Познакомимся еще с некоторыми общими свойствами движения свободной точки.

Элементарный импульс силы.

§ 373. Приращение $P dt$ силы P на бесконечно малый промежуток времени dt называется *элементарным импульсом* силы. Сумма всех элементарных импульсов силы P в промежуток времени $t - t_0$ равна

$$\int_{t_0}^t P dt$$

и называется *полным импульсом* силы за промежуток $t_1 - t_0$:

Теорема о количествах движения.

§ 374. Если v есть скорость, φ угол, составляемый силой P с направлением движения (с элементом траектории), то:

$$m \frac{dv_r}{dt} = P \cos \varphi. \quad \chi$$

откуда:

$$m \dot{v} = P \cos \varphi dt.$$

или:

$$mv - mv_0 = \int P \cos \varphi dt$$

Эт уравнение выражает собою следующее: теорема приращении количества движения равно сумме импульсов силы, направленных по касательной к траектории.

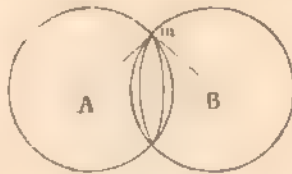
Движение несвободной точки.

Несвободная точка.

§ 375. Если точка принуждена двигаться по как-нибудь поверхности или по какой-нибудь линии то она называется *несвободной*. На-



Фиг. 257.



Фиг. 258.

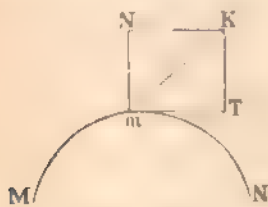
примеръ: точка соединенная съ другою, неподвижною, точкою помощью нерастяжимого и негибкого стержня, принуждена двигаться по поверхности шара описанной около неподвижной точки радиусомъ равнымъ длинѣ

стержня (фиг. 257); точка, соединенная такими стержнями съ двумя неподвижными точками A и B (фиг. 258), принуждена двигаться по окружности, представляющей собою пересѣчение двухъ шаровыхъ поверхностей.

Движение точки по поверхности.

376. Назовемъ силой, действующею на точку и поверхность, представляемой уравненіемъ:

$$f(x, y, z) = 0 \dots \dots \dots (751)$$



Фиг. 259.

Если точка *m*, лежащая въ внутренней части поверхности, подвержена действию силы *mK* (фиг. 259), то, разлагая силу *mK* на две силы, изъ которыхъ одна направлена по нормали, а другая по касательной, замѣтимъ что составляющая *mT*, направленная по касательной, не будетъ давить на поверхность, но только подвинетъ точку *m* по ней вверхъ или. Напротивъ, сила, действующая по нормали, не будетъ двигать точку *m*, но только прижимать ее къ поверхности. Поэтому, при вычислении давленія на поверхность, мы должны брать въ расчетъ только нормальныя давленія.

Действующая по нормали, сила не будетъ двигать точку *m*, но только прижимать ее къ поверхности. Поэтому, при вычислении давленія на поверхность, мы должны брать въ расчетъ только нормальныя давленія.

Обращая внимание на давления, производимыя точкою на поверхность, можно очень прост. свести изучение движения несвободной точки на исследование движения точки свободной: стоит только рассматривать точку, какъ находящуюся подъ действием не только заданныхъ силъ, но еще и давления, которое производится на нее перпендикулярно поверхности. Это давление, какъ мы видели, направлено по нормали.

Итакъ обозначая чрезъ (N) давление, производимое точкою на поверхность, и следовательно чрезъ N сопротивление поверхности, мы можем рассматривать точку, какъ свободную — находящуюся подъ действием заданныхъ силъ и силы N (которая пока остается несмещенною), и написать уравнения движения по (673) въ такомъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + N \cdot \cos(N, x) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + N \cdot \cos(N, y) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + N \cdot \cos(N, z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (752)$$

Зависающіеся въ этихъ уравненіяхъ въ синусы определяются по (395) такъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos(N, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ \cos(N, y) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ \cos(N, z) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (753)$$

Что же касается N , то эта величина подлежитъ исключенію. Исключивъ N изъ трехъ уравненій (752), получимъ два уравненія; при единивъ къ нимъ еще заданное уравненіе (751) поверхности получимъ три уравненія, которыхъ вполне достаточно для выраженія координатъ x, y, z чрезъ время t .

Примѣръ. Опредѣлить движение тяжелой точки, движущейся по поверхности вертикальнаго цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ подъ влияниемъ силы тяжести и начальной скорости v , сообщенной въ горизонтальномъ направленіи.

Здесь $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2$. Вычисляемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Дѣйствующія сила—тяжесть, ускореніе, производимое ею направлено по оси z и равно g . Приложенія этой силы таковы: $X = 0$; $Y = 0$; $Z = mg$. Поэтому уравненія (752) въ настоящемъ случаѣ такъ вы:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{N \cdot x}{R} \dots \dots \dots (754)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{N \cdot y}{R} \dots \dots \dots (755)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg \dots \dots \dots (756)$$

Исключая N изъ (754) и (755), находимъ:

$$y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Интегралъ этого уравненія есть:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = c \dots \dots \dots (757)$$

Въ началѣ движенія:

$$y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0; \quad x = R; \quad \frac{dy}{dt} = v_0.$$

Поэтому:

$$- Rv_0 = c.$$

Подставляя вмѣсто c величину $(-Rv_0)$ изъ (757), находимъ:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = Rv_0 \dots \dots \dots (758)$$

Дифференцируя уравненіе $x^2 + y^2 = R^2$ цилиндра, находимъ:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0 \dots \dots \dots (759)$$

Исключая $\frac{dy}{dt}$ изъ (758) и (759), получимъ:

$$y \frac{dx}{dt} + \frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = -Rv_0;$$

или:

$$(x^2 + y^2) \frac{dx}{dt} = -Rv_0 y$$

Но $x^2 + y^2 = R^2$. Поэтому:

$$R^2 \frac{dx}{dt} = -Rv_0 y = -Rv_0 \sqrt{R^2 - x^2};$$

или.

$$R \frac{dx}{R^2 - x^2} = v_0 dt.$$

Интегрируя, получимъ:

$$x = R \cos \left(\frac{v_0 t}{R} \right). \dots \dots \dots (760)$$

Но изъ уравненія $x^2 + y^2 = R^2$ цилиндра имѣемъ

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Слѣдовательно:

$$y = \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \left(\frac{v_0 t}{R} \right)} = R \sqrt{1 - \cos^2 \left(\frac{v_0 t}{R} \right)};$$

или

$$y = R \sin \left(\frac{v_0 t}{R} \right). \dots \dots \dots (761)$$

Интегрируя (756), получимъ:

$$\frac{dz}{dt} = gt.$$

Интегрируя еще разъ, получимъ:

$$z = \frac{gt^2}{2}. \dots \dots \dots (762)$$

Уравненія (760), (761) и (762) суть искомыя уравненія движенія.

Движеніе точки по линіи.

§ 377. Если точка движется по линіи, выразимъ ея двумя уравненіями. то, намявая чрезъ N направленное по нормали давленіе точки на линію, получаемъ, подобно тому какъ получили (752), такія уравненія

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + N' \cdot \cos(N', x) + N'' \cdot \cos(N'', x) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + N' \cdot \cos(N', y) + N'' \cdot \cos(N'', y) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + N' \cdot \cos(N', z) + N'' \cdot \cos(N'', z) \end{aligned} \right\} \dots (763)$$

Уравненія линіи выражаются такъ:

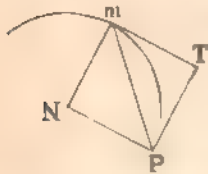
$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ F(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (764)$$

N' есть давленіе на поверхность $f(x, y, z) = 0$ N'' есть давленіе на поверхность $F(x, y, z) = 0$.

Здѣсь, по исключеніи N' и X'' изъ уравненій (763), получимъ одно уравненіе, и, прибавляя къ нему два уравненія (764) линія, получимъ всего три уравненія, которыхъ будетъ достаточно для выраженія x , y , z въ видѣ функцій отъ t .

Начало Д'Аламбера.

§ 378. Начало принципа, на которомъ можно основывать привѣденный случаю движенія несвободной точки къ случаю движенія точки свободной, было высказано въ болѣе общей формѣ знаменитымъ энциклопедистомъ прошлаго столѣтія Д'Аламберомъ. Начало Д'Аламбера применяется намъ при выводѣ общей формулы, объемлющей всю механику. Д'Аламберъ рассуждалъ слѣдующимъ образомъ.



Фиг. 260

Представимъ себѣ точку m (фиг. 260), которая движется по какой-нибудь поверхности. Положимъ, что на эту точку дѣйствуетъ сила P . Разложимъ ее по правилу параллелограмма на двѣ силы: на силу N , направленную по нормали, и на силу T , направленную по касательной, идущей въ плоскости PNm .

Сила N не будетъ двигать точку, потому она называется *потерянною силою*, она равна давленію точки на поверхность.

Сила T будетъ двигать точку совершенно такъ, какъ если бы точки была свободна. Сила T называется *движущею*.

Итакъ имѣемъ три силы:

- заданная P
- потерянная N
- движущая T .

Назовемъ продолженія силы P чрезъ X , Y , Z ; продолженія силы N чрезъ X' , Y' , Z' . Продолженія движущей силы T , дѣйствующей какъ бы на свободную точку, будутъ по (670) и (709)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Сила P (фиг. 260) есть равнодѣйствующая сила N и T . Поэтому:

$$\begin{aligned} X &= X' + m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ Y &= Y' + m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ Z &= Z' + m \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned}$$

Отсюда продолжения X , Y , Z потерянной силы будутъ:

$$\left. \begin{aligned} X &= m \frac{d^2x}{dt^2} = X' \\ Y &= m \frac{d^2y}{dt^2} = Y' \\ Z &= m \frac{d^2z}{dt^2} = Z' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (765)$$

Потерянная сила направлена по нормали. Следовательно продолжения ея проецируются косинусамъ угловъ наклона ея нормали къ осямъ. Поэтому, по формуламъ (753) продолжения X' , Y' , Z' потерянной силы пропорциональны производнымъ $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. Называя чрезъ k коэффициентъ пропорциональности, можемъ следовательно представить уравненія (765) въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} X &= m \frac{d^2x}{dt^2} = k \frac{\partial f}{\partial x} \\ Y &= m \frac{d^2y}{dt^2} = k \frac{\partial f}{\partial y} \\ Z &= m \frac{d^2z}{dt^2} = k \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (766)$$

Эти уравненіями можно пользоваться какъ уравненіями (752).

Давленіе движущейся точки на поверхность, по которой она движется.

§ 379. Потерянную силу можно разсматривать какъ давленіе точки на поверхность, тогда по (765) продолженія на оси координатъ этого давленія будутъ:

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}; \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2}; \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Само же давленіе будетъ:

$$N = \sqrt{\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \quad (767)$$

ГЛАВА II.

Механика системы.

Движеніе системы точекъ.

Система.

§ 380. Совокупность материальныхъ точекъ называется системою, независимо отъ того, имѣемъ ли мы дѣло съ отдельными точками или же съ тѣломъ, состоящимъ изъ точекъ.

С в я з и.

§ 381. Изучая движение несвободной точки, мы можем смотреть на уравнения поверхсти или линии, по которой она движется как на некоторые дополнительные условия.

При движении системы точек, таковы дополнительные условия являются или потому, что та или другая точка принуждена двигаться по поверхности или линии, или же вследствие каких-либо других причин, связывающих движение. Например, если сказано, что расстояние между двумя точками (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) остается постоянным, то это обстоятельство выразится условием:

$$f(x, y, z) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - C^2 = 0$$

Эти дополнительные уравнения называются также уравнениями *связи*. Поверхности или линии, по которым некоторые из точек системы принуждены двигаться, или поверхности, связывающие между собой некоторые из точек системы — все это называется *связями*, ограничивающими свободу движения системы. Если какой-нибудь связь изменится со временем, то уравнение ее должно включать и время t , как параметр, в таком случае уравнение связи имеет вид:

$$f(x, y, z, t) = C$$

Уравнения Лагранжа

§ 382. Если возможно, что дана система точек, величины относившиеся к различным точкам будем обозначать значками 1, 2, 3, 4... Даны *отстояющие* силы. Назовем сумму проекций на ось x сил действующих из точки (x_p, y_p, z_p) чрез X_p , суммы проекций на ось y и z назовем Y_p и Z_p . Предложим, что намъ даны еще n уравнений связей:

$$\left. \begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots) &= C_1, \\ F(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots, t) &= C_2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (768)$$

Каждое из этих уравнений содержит координаты и/или время из точек системы и может содержать время t . Первые члены этих уравнений мы будем совершенно обозначать как f, F, \dots . При таких условиях на каждую точку будут действовать, кроме заданных сил, еще и силы потенциальные. Поэтому, совершенно так же как мы составили уравнения (666) для одной точки, и только давая множитель k другой знак, мы можем составить для системы главн дифференциальные урав-

ненія движенія:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= X_1 + k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= Y_1 + k \frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y_1} + \dots \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= Z_1 + k \frac{\partial f}{\partial z_1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z_1} + \dots \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= X_2 + k \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= Y_2 + k \frac{\partial f}{\partial y_2} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y_2} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (769)$$

Если какая-нибудь из связей не содержит никаких-либо координатъ, то соответственная частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_p}$ будетъ нуль, уравненія же (769) представляютъ самый общій случай, который охватываетъ собою и всѣ частные случаи.

Эти уравненія (769) найдены были Лагранжемъ, они годятся для всякаго движенія какой бы то ни было системы, для какихъ бы то ни было силъ и при какихъ бы то ни было связяхъ. Величины k , λ , ... подлежатъ исключенію.

Возможныя перемѣщенія.

§ 383. Если точка не можетъ сойти съ некоторой поверхности, но можетъ двигаться только по этой поверхности, то для всѣхъ перемѣщенія въ сторону отъ поверхности невозможны, перемѣщенія же по поверхности возможны. Следовательно для всѣхъ возможныхъ перемѣщеній приращенія δx , δy , δz координатъ, но только тѣ, которыя согласуются съ условіемъ нахождения точки на поверхности. Какъ это выразить аналитически? Очень просто: если уравненіе поверхности таково:

$$f(x, y, z) = C.$$

то дифференцируя его, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0.$$

Здѣсь δx , δy , δz суть приращенія координатъ, именнъ соответствующихъ и x жденію точки на поверхности. Следовательно перемѣщенія δx , δy , δz будутъ возможными, если они удовлетворяютъ уравненію:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \dots \dots \dots (770)$$

Вобщемъ при существованіи какой бы то ни было связи:

$$\varphi(x, y, z) = C \dots \dots \dots (771)$$

возможными будутъ перемѣщенія δx , δy , δz удовлетворяющія уравненію:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z = 0. \quad (772)$$

Если существуетъ n связей вида (771), то возможными будутъ перемѣщенія δx_1 , δy_1 , δz_1 , δx_2 , δy_2 , δz_2 , $\delta x_3 \dots$, удовлетворяющія n уравненіямъ вида (772). Если уравненіе связи содержитъ время t (значитъ если связь измѣняется или перемѣщается), то возможными называются все-таки тѣ перемѣщенія, которыя возможны для неподвижной связи — которыя удовлетворяютъ уравненію вида (772), если время принять въ немъ за постоянное.

Общее уравненіе механики.

§ 384. Помножимъ уравненія (769) соответственно на δx_1 , δy_1 , δz_1 , δx_2 , $\delta y_2 \dots$ и сложимъ. Получимъ:

$$\sum \left[\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0. \quad (773)$$

Въ этомъ уравненіи \sum распространяется на все точки.

Это найденное Лагранжемъ замѣчательное уравненіе выражаетъ какое бы то ни было движеніе. Оно содержитъ въ себѣ всю механику, все законы движенія и равновѣсія. Все явленія и процессы неорганической природы сводятся къ различнаго рода движенію; все движенія охватываются формулою (773); слѣдовательно эта формула содержитъ въ себѣ все законы явленій неорганической природы. И удивительно послѣ этого, что полное интегрированіе ея и использование весьма сложно и трудно. Вся сложность неорганической природы отразилась въ этой формулѣ. Уже и сама по себѣ эта формула представляетъ собою выраженіе необычайной мощи человеческого разума, сумѣвшаго включить чуть ли не всю вселенную со всеми ея астрономическими, физическими и химическими законами и явленіями въ одну короткую, красивую и симметричную формулу.

Аналитическая механика.

§ 385. Вся механика приведена такимъ образомъ Лагранжемъ къ измѣнѣнью уравненій (769) или уравненія (773); все приведено къ задачѣ интегрированія дифференціальнымъ уравненій. Наука, изучающая движеніе, изучая уравненія (769) и (773), называется Аналитическою Механикою. Это же самое названіе «Mecanique Analytique» было дано Лагранжемъ той удивительной книгѣ, въ которой онъ изложилъ свои открытія, касающіяся механики.

Человѣчество не можетъ ждать того времени, когда интегрированіе разовьется до степени достаточной для того, чтобы рѣшать ту или другую механическую задачу аналитическимъ путемъ и, кромѣ того, бываетъ

иногда чрезвычайно иучительно дѣйствовать геометрическимъ путемъ, тѣмъ же выводъ, отличающійся наглядностью. Вотъ почему уществуетъ на ряду съ механикою аналитическою еще теоретическая или рациональная механика. Аналитическую механику можно разсматривать какъ часть геометрической: послѣдняя не пренебрегаетъ никакими методами, тогда какъ первая идетъ только по аналитическому пути, предначертанному Лагранжемъ. Этотъ путь можно назвать дарственнымъ путемъ науки, измѣлдующихъ природу: онъ отличается върностью, точностью, стройностью, единообразіемъ и красотой.

Идя этимъ путемъ, мы прослѣдимъ такъ называемые законы механики, дающе некоторые изъ интеграловъ уравненій Лагранжа. Здѣсь мы не будемъ стремиться къ выясненію всего на примѣрлахъ, и тому что аналитическій путь особенно пригоденъ для выводовъ, отличающихся общностью и необходимо, чтобы читатель развивалъ въ себѣ способность къ пониманію общихъ выводовъ. Замѣтимъ заранѣе, что мы имѣемъ дѣло съ сообщеніями философскаго порядка столько въ иррой математической повѣдѣ. Такъ, наиримѣръ, законъ сохранения энергии, имѣющей мировое значеніе, есть только одинъ изъ частныхъ случаевъ, хватаемыхъ уравненіями Лагранжа, который прилжны не только къ силамъ наблюдающимся въ природѣ, но даже и къ тѣмъ, которыхъ въ природѣ не существуетъ.

Потенціальная функция.

§ 386. Въ § 359-мъ мы уже имѣли дѣло съ потенциалною функциею въ случаѣ движенія одной точки.

Дѣлается слѣдующее предположеніе: *Если разсматривается движеніе такой системы, въ которой не дѣйствуютъ никакія силы кромѣ притяженія къ неподвижному центру и притяженій точки между собою, то по какому бы закону ни дѣйствовали эти притяженія, всегда для такого движенія существуетъ такая функция U координатъ $x_1, y, z, x_2, y_2, z_2, x_3, \dots$, производная которой по этимъ координатамъ равна произвольнымъ $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, \dots$ силамъ. Такая функция U называется потенциалною или потенциаломъ.*

Для доказательства этого предположенія разсмотримъ три случая.

1) Точка (x, y, z) притягивается неподвижнымъ центромъ (a, b, c) . Расстояние r точки отъ центра будетъ представлять изъ формулы.

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

Дифференцируя ее по x , получимъ:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x - a}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}} = \frac{x - a}{r}$$

Но $x - a$ есть не что иное, какъ продолженіе расстоянія r на ось x такъ что называя чрезъ β, γ величины, составляемые этимъ расстояніемъ

съ осими координатахъ имѣемъ $r \cos \alpha = x$ а. или $x = r \cos \alpha$. Итакъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \alpha \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \cos \beta \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r} = \cos \gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (774)$$

Слѣдовательно проеція X, Y, Z притяженія (P) называемаго центромъ (a, b, c) на точку (x, y, z) будутъ:

$$\left. \begin{aligned} X &= P \cdot \cos \alpha = P \frac{\partial r}{\partial x} \\ Y &= P \cdot \cos \beta = P \frac{\partial r}{\partial y} \\ Z &= P \cdot \cos \gamma = P \frac{\partial r}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (775)$$

Называя чрезъ U интегралъ $\int P dr$, то есть полагаемъ:

$$\int P dr = U$$

получимъ согласно съ (775):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = P \frac{\partial r}{\partial x} = X \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = P \frac{\partial r}{\partial y} = Y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = P \frac{\partial r}{\partial z} = Z. \end{aligned}$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ, существуетъ такая функція U, частныя производныя которой по x, y, z соответственно равны X, Y, Z: существуетъ потенциалъ.

2) Точки (x, y, z) и (x₁, y₁, z₁) обѣ свободныя и взаимно притягиваются съ силою P.

Расстоянiе r между этими точками будетъ

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \dots \dots \dots (776)$$

Проеція X, Y, Z силы дѣйствующей на точку (x, y, z) будутъ

$$X = P \frac{\partial r}{\partial x}; Y = P \frac{\partial r}{\partial y}; Z = -P \frac{\partial r}{\partial z} \dots \dots \dots (777)$$

Проложенія X_1, Y_1, Z_1 силы, дѣйствующей на точку (x_1, y_1, z_1) будутъ:

$$X_1 = -P \frac{\partial r}{\partial x_1}; \quad Y_1 = -P \frac{\partial r}{\partial y_1}; \quad Z_1 = -P \frac{\partial r}{\partial z_1} \dots \quad (778)$$

Эти проложенія (779) равны и противоположны проложеніямъ (777), потому что изъ (776) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x_1}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-y_1}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-z_1}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{x-x_1}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y_1} = -\frac{y-y_1}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z_1} = -\frac{z-z_1}{r}$$

такъ что:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z_1}$$

Полагая:

$$\int -P dr = U$$

получимъ:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}; \quad X_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}; \quad Y_1 = -\frac{\partial U}{\partial y_1}; \quad Z_1 = -\frac{\partial U}{\partial z_1}$$

Итакъ, и въ случаѣ взаимнаго приближенія двухъ свободныхъ точекъ существуетъ потенциалъ U .

3) Точки $(x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); (x_3, y_3, z_3) \dots$, обладающія соотвѣственно массами $m_1, m_2, m_3 \dots$ взаимно притягиваются.

Обозначимъ расстояние точекъ m_k и m_l чрезъ r_{kl} ; такъ что, напри- мѣръ, расстояние между точками m_2 и m_3 будетъ r_{23} . Силу, съ которою притягиваются взаимно каковы-нибудь точки m_k и m_l , обозначимъ чрезъ P_{kl} , такъ что, напри- мѣръ, сила, съ которою притягиваются взаимно точки m_2 и m_3 будетъ P_{23} . Тогда, складывая проложенія всехъ силъ, дѣйствующихъ на одну точку, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\frac{\partial (P_{1,2} + P_{1,3} + P_{1,4} + \dots)}{\partial x_1} = X_1 \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -\frac{\partial (P_{1,2} + P_{1,3} + P_{1,4} + \dots)}{\partial y_1} = Y_1 \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= -\frac{\partial (P_{1,2} + P_{1,3} + P_{1,4} + \dots)}{\partial z_1} = Z_1 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\frac{\partial (P_{2,1} + P_{2,3} + P_{2,4} + \dots)}{\partial x_2} = X_2 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (779)$$

Величины P обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что въ каждую изъ нихъ входятъ только координаты тѣхъ двухъ точекъ, къ которымъ имѣютъ значеніе

равные одному из значковъ, поставленныхъ при P ; напримеръ $P_{3,5}$ зависитъ только отъ координатъ $x_3, y_3, z_3, x_5, y_5, z_5$. Поэтому, при убавленныхъ въ правыхъ частяхъ уравнений дифференцированныхъ, будутъ равны нулю, напримеръ такія производныя какъ производныя по x_1, y_1, z_1 отъ $P_{2,3}, P_{2,4}, P_{2,5}$, и вообще, при дифференцировании по x_1, y_1, z_1 не обратятся въ нуль только производныя отъ $P_{1,2}, P_{1,3}, P_{1,4}, \dots$ и вообще отъ всѣхъ P , содержащихъ въ значкахъ единицу. Поэтому уравнения, относяща къ точкѣ (x_1, y_1, z_1) останутся вѣрными, если сбоку правыхъ ихъ частей присоединить еще сумму $P_{1,2} + P_{1,3} + \dots + P_{1,4} + \dots$ всѣхъ остальныхъ P . Точно также, не нарушая справедливости другихъ уравнений (779), можно ихъ дополнить подобнымъ образомъ. Тогда во всѣхъ правыхъ частяхъ уравнений (779) получимъ частныя производныя отъ одной и той же функции:

$$U = (P_{1,2} + P_{2,3} + \dots + P_{2,3} + P_{2,4} + \dots + P_{3,4} + \dots),$$

въ которую входитъ всѣ P . Получимъ:

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad Y_1 = \frac{\partial U}{\partial y_1}, \quad Z_1 = \frac{\partial U}{\partial z_1}; \quad X_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \quad \dots$$

Итакъ, въ случаѣ взаимныхъ притяженій (а следовательно и отдаленнѣйшихъ, которыя рассматриваются какъ отрицательныя притяженія), сопровождаемыхъ притяжениями къ неподвижнымъ центрамъ, существуетъ потенциалъ.

Предложеніе высказанное въ началѣ настоящаго параграфа доказано. Потенциаль называютъ иногда силовую функциею.

Въ случаѣ, напримеръ, взаимнаго притяженія точекъ по закону Ньютона (то есть обратн. пропорциональнаго квадрату разстояній и прямопропорциональнаго произведенію $m_k m_l$, притягивающихся массъ, потенциальная функція равна:

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_1 m_3}{r_{1,3}} + \dots + \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}} + \dots \dots \dots (780)$$

Общее уравненіе механики въ случаѣ существованія U .

§ 387. Въ тѣхъ случаяхъ, когда существуютъ для заданныхъ силъ потенциалъ, можно слѣдующимъ образомъ преобразовать общее уравненіе (773) механики.

Перенеся вторые члены скобокъ формулы (773) въ правую часть получимъ:

$$\sum [X\delta x + Y\delta y + Z\delta z] = \sum m \left[\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right]. \quad (781)$$

Если существуетъ потенциалъ U , то:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

и потому (781) обращается в этом случае въ:

$$\sum \left[\frac{\partial T}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z \right] = \sum m \left[\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right] \quad (782)$$

Центръ инерціи.

§ 388. Если имѣемъ систему точекъ $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots$, то та точка пространства, координаты которой x, y, z определяются уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sum mx}{\sum m} = \frac{\sum mx}{M} \\ y &= \frac{\sum my}{\sum m} = \frac{\sum my}{M} \\ z &= \frac{\sum mz}{\sum m} = \frac{\sum mz}{M} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (783)$$

называется *центромъ инерціи* системы. Такъ например, если имѣемъ двѣ точки $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$, то координаты центра инерціи ихъ будутъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ y &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \\ z &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (784)$$

Если точки m_1 и m_2 обѣ лежатъ на си x , такъ что координаты ихъ будутъ $(x_1, 0, 0), (x_2, 0, 0)$ то координаты центра инерціи будутъ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ y &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Начало движенія центра инерціи

§ 389. Если дана такая система, для которой всѣ безконечно малыя перемѣщенія возможны, то мы докажемъ, что центръ инерціи ея движется прямолинейно и равномерно. Всякія перемѣщенія возможны для слѣдующихъ системъ: система свободныхъ точекъ, свободное твердое тѣло, свободная гибкая нить, свободная (не заключенная въ сосудъ) жидкость и проч.

Если $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2, \delta x_3, \dots$ могутъ быть какими угодно совершенно произвольны (согласно сдѣланному предположенію), то всѣ δx могутъ быть равны какому-нибудь δa , всѣ δy равны $\delta \beta$, всѣ δz равны $\delta \gamma$.

Тогда въ (773) можно вывести $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ за скобки и получить

$$\delta\alpha \sum \left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) + \delta\beta \sum \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) + \delta\gamma \sum \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (785)$$

Но величины $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ совершенно произвольны. Поэтому уравнение (785) можетъ быть вѣрнымъ только тогда, когда коэффициенты, стояще при этихъ величинахъ, равны нулю, то есть когда.

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= \sum m \frac{d^2x}{dt^2} \\ \sum Y &= \sum m \frac{d^2y}{dt^2} \\ \sum Z &= \sum m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (786)$$

Изъ (783) слѣдуетъ:

$$x \sum m = \sum mx,$$

если назовемъ массу $\sum m$ всей системы чрезъ M , то получимъ.

$$\begin{aligned} x M &= \sum mx \\ M \frac{dx}{dt} &= \sum m \frac{dx}{dt} \\ M \frac{d^2x}{dt^2} &= \sum m \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}$$

Точно такія же уравненія получимъ для y и z . Вообще будемъ имѣть:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2x}{dt^2} &= \sum m \frac{d^2x}{dt^2} \\ M \frac{d^2y}{dt^2} &= \sum m \frac{d^2y}{dt^2} \\ M \frac{d^2z}{dt^2} &= \sum m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (787)$$

Сравнивая (787) съ (786), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= M \frac{d^2x}{dt^2} \\ \sum Y &= M \frac{d^2y}{dt^2} \\ \sum Z &= M \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (788)$$

Уравнения эти показываютъ, что *центр инерции движется такъ, какъ будто бы все силы были приложены къ нему и масса всей системы въ немъ сосредоточена*. Если на точки системы дѣйствуютъ только тяжести, то извѣстно, что та точка, въ которой вся тяжесть какъ бы сосредоточена (точка приложения равнодѣйствующихъ параллельныхъ силъ тяжести, дѣйствующихъ на все точки системы), называется *центромъ тяжести системы*. Следовательно центр инерции и центр тяжести, въ случаѣ системы, на которую дѣйствуютъ тяжести, есть одно и то же.

Поэтому уравненія (783) годятся для опредѣленія центра тяжести.

Если на систему не дѣйствуютъ никакия силы, или только взаимныя притяженія точекъ, то $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$, $\sum Z = 0$; тогда (788) обращаются въ:

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2\bar{z}}{dt^2} = 0.$$

Эти уравненія, по интегрированіи, даютъ уравненія:

$$x = a_1 + b_1 t$$

$$\bar{y} = a_2 + b_2 t$$

$$z = a_3 + b_3 t,$$

показывающія, что, въ случаѣ отсутствія силъ или въ случаѣ существованія только взаимныхъ притяженій, *центр тяжести системы движется равномерно и прямолинейно*.

Солнечная система, напримѣръ, такъ удалена отъ всѣхъ неподвижныхъ звѣздъ, что подвержена только взаимнымъ притяженіямъ. Поэтому центр тяжести солнечной системы, состоящей изъ солнца и окружающихъ его планетъ (въ томъ числѣ и земли), движется въ пространствѣ равномерно и прямолинейно. Такое движеніе замѣчено и наблюденіями астрономовъ.

Если же на систему дѣйствуетъ сила тяжести, то уравненія (788) показываютъ, что центр тяжести системы движется такъ, какъ будто вся масса системы была въ немъ сосредоточена. Центр тяжести артиллерійской гранаты, напримѣръ, описываетъ траекторію, мало отличающуюся отъ параболы. Если граната разорвется въ воздухѣ, то осколки ея разлетятся по разнымъ направленіямъ и центр тяжести ихъ долетитъ до земли по той же самой траекторіи, по которой онъ долетѣлъ бы, если бы граната не лопнула. Это явленіе, предсказываемое закономъ движенія центра тяжести, будеть только несильно измѣнено дѣйствіемъ воздуха.

который представляет большее сопротивление шлою гранатѣ и значительно меньшее сопротивление мелкимъ осколкамъ.

Начало сохранения живой силы.

§ 390. Черезъ δx , δy , δz мы обозначали возможные перемѣненія, именно все тѣ перемѣненія, которыя возможны при данныхъ связяхъ. Черезъ dx , dy , dz обозначали мы, какъ и всегда, дѣйствительныя перемѣненія. Выражая, что дѣйствительныя перемѣненія выбраны изъ числа возможныхъ, получимъ:

$$\delta x = \frac{dx}{dt} dt; \quad \delta y = \frac{dy}{dt} dt; \quad \delta z = \frac{dz}{dt} dt.$$

Такия уравненія слѣдуетъ написать для всехъ точекъ системы. Следовательно, въ случаѣ существованія для заданныхъ силъ потенциала, уравненіе (782) будетъ существовать, если въ немъ замѣнимъ величины δx , δy , δz величинами $\frac{dx}{dt} dt$, $\frac{dy}{dt} dt$, $\frac{dz}{dt} dt$. Сдѣлавъ это, получимъ

$$\begin{aligned} & \sum \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} dt \right] \\ & = \sum m \left[\frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} dt + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} dt + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{dt} dt \right] \quad \dots (789) \end{aligned}$$

Но раздѣливъ на dt лѣвая часть этого уравненія обращается въ $\frac{dT}{dt}$, и получается:

$$\frac{dT}{dt} = \sum m \left[\frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{dt} \right] \quad \dots (790)$$

Интегральнъ этого уравненія видѣтъ непосредственно. Онъ таковъ:

$$\frac{1}{2} \sum m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = T + h, \quad \dots (791)$$

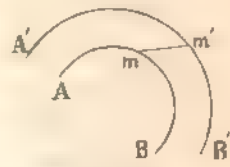
гдѣ h есть постоянное интегрированія. Дѣйствительно дифференцируя (791), получимъ (790). Сравнивая (791) съ (706), получимъ:

$$\frac{1}{2} \sum mv^2 = U + h \quad \dots \dots \dots (792)$$

Это уравненіе (792) выражаетъ собою законъ, называемый *началомъ сохранения живой силы*. Этотъ законъ справедливъ во всехъ случаяхъ, когда силы имѣютъ потенциалъ и когда дѣйствительныя перемѣненія принадлежатъ къ числу возможныхъ, каковы бы ни были связи, лишь бы уравненія связей не заключали въ себѣ времени.

Если же уравненія связей заключаютъ въ себѣ время, то связи или подвижны или измѣняютъ форму. Въ этомъ случаѣ начало сохранения живой силы не всегда примѣнимо, потому что если связь измѣняется или

движется, то действительныя перемѣщенія не принадлежатъ къ числу тѣхъ, которыя *называются* возможными. Въ самомъ дѣлѣ: возможными перемѣщеніями называются перемѣщенія *возможныя по неподвижной связи*. Но если связь AB перемѣстится въ положеніе $A'B'$ (фиг. 261), то перемѣщеніе mm' точки m нельзя исполнить по AB , пока AB неподвижна, тогда нельзя замѣнять $\delta x \dots$ чрезъ $\frac{dx}{dt} dt \dots$ и начало сохраненія живой силы непримѣнимо.



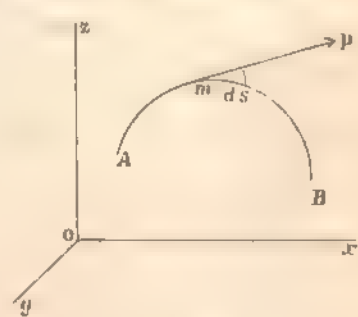
Фиг. 261.

Но разсмотрѣніе подвижныхъ связей можетъ быть замѣнено разсмотрѣніемъ особуяъ силъ. Напримеръ разсмотрѣніе движенія таковой системы, въ которой двѣ какия-нибудь точки связаны растяжимою нитью, можетъ быть замѣнено разсмотрѣніемъ той же системы, въ которой только лишь замѣнена взаимнымъ притяженіемъ двухъ точекъ пропорціональнымъ ихъ взаимному разстоянію. Слѣдствіемъ этой точки вѣрныя начало сохраненія живой силы обладаетъ большою общностью.

Названіе «*сохраненіе живой силы*», начало, выраженное уравненіемъ (792), получило вслѣдствіе слѣдующей причины. Пусть дана U есть функция координатъ, слѣдовательно если всѣ точки системы, по совершении нѣкотораго движенія, придутъ въ первоначальныя положенія (если система вернется къ первоначальному состоянію), то U получитъ первоначальную величину, а слѣдовательно, по уравненію (792), и живая сила $\frac{1}{2} \sum m v^2$ приметъ первоначальное значеніе, по какимъ бы путямъ ни вернулись точки системы въ свои начальныя положенія: при возвращеніи системы въ то же состояніе живая сила приобретаетъ ту же величину — сохраняется.

Работа системы.

§ 391. Представимъ себѣ точку m (фиг. 262); назовемъ чрезъ P равнодѣйствующую всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на эту точку. Обозначимъ чрезъ (P, ds) уголъ составляемый направленіемъ силы P съ направленіемъ элемента траекторіи, описываемой точкою m . Работа силы P на протяженіи пути ds , какъ мы знаемъ изъ § 354-го, будетъ:



Фиг. 262.

$$P \cdot ds \cdot \cos (P, ds) \dots (793)$$

Но, по (130), имѣемъ:

$$\begin{aligned} \cos (P, ds) &= \cos (P, x) \cdot \cos (ds, x) + \cos (P, y) \cdot \cos (ds, y) \\ &+ \cos (P, z) \cdot \cos (ds, z) \dots \dots \dots (794) \end{aligned}$$

Затѣмъ извѣстно, что:

$$\left. \begin{aligned} P \cdot \cos (P, x) &= X; ds \cdot \cos (ds, x) = dx \\ P \cdot \cos (P, y) &= Y, ds \cdot \cos (ds, y) = dy \\ P \cdot \cos (P, z) &= Z; ds \cdot \cos (ds, z) = dz \end{aligned} \right\} \dots \dots (795)$$

Слѣдовательно величина (793) работа силы P будетъ равна:

$$Xdx + Ydy + Zdz = P \cdot ds \cdot \cos (P, ds) \dots \dots (796)$$

Эта величина работы производимой силою P пока точка проходитъ безконечно малый путь ds называется *элементарною работою* силы P .

Если имѣемъ дѣло съ системой, то величина:

$$\sum (Xdx + Ydy + Zdz) \dots \dots \dots (797)$$

называется *элементарною работою* дѣствующихъ силъ.

$$\int_{t_0}^t \sum (Xdx + Ydy + Zdz) \dots \dots \dots (798)$$

распространенной на все движеніе системы, совершившееся въ промежутокъ времени $t - t_0$, называется *работою дѣствующихъ силъ, произведенною ими въ теченіи времени $t - t_0$* .

Интегралъ живыхъ силъ.

§ 392 Величина U , по самому опредѣленію ея (§ 386), есть такая функція, производная которой по координатамъ суть проложенія силъ на соответствующія оси координатъ. Слѣдовательно:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \sum \left[\frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dU}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dU}{dz} \frac{dz}{dt} \right] \\ &= \sum \left[X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right] \end{aligned}$$

Подставляя въ (790), получимъ:

$$\sum \left[X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right] = \sum m \left[\frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{dt} \right]$$

Умножая на dt и интегрируя, получимъ:

$$\frac{1}{2} \sum mv^2 = \frac{1}{2} \sum mv_0^2 + \int_{t_0}^t \sum [Xdx + Ydy + Zdz] \dots \dots (799)$$

приращеніе живой силы равно работѣ дѣствующихъ силъ. Это и есть теорема, называемая *интеграломъ живыхъ силъ*, и указанная для движенія падающей тяжелой точки въ § 356 омъ.

Эта теорема весьма важна по удобству применения въ приложенияхъ. Она составляетъ краеугольный камень отдѣла практической механики, называемаго *теорією машинъ*.

Разница понятій «работа» и «мощность».

§ 393. Кстати сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе. Не надо смѣшивать двухъ понятій: *работа*, измѣряемая килограмметрами или пудефутами и *мощность* (или эффектъ), измѣряемая *паровыми лошадьми*.

Если какой-нибудь двигатель поднимаетъ въ 1 секунду 75 килограммъ на высоту одного метра, то говорить, что онъ совершаетъ работу 75 килограмметровъ съ мощностью въ одну паровую лошадь.

Если другой двигатель поднимаетъ 75 килограммъ на высоту одного метра въ $\frac{1}{2}$ секунды, то говорить, что онъ совершаетъ работу 75 килограмметровъ съ мощностью двухъ паровыхъ лошадей.

Второй двигатель дѣйствуетъ энергичнѣе перваго, потому что ту же самую работу дѣлаетъ вдвое скорѣе, но работа въ обоихъ случаяхъ одинакова.

Законъ сохранения энергіи.

§ 394. Потенціалъ, взятый съ обратнымъ знакомъ ($-U$), называютъ *потенціальной энергією*. Живую силу $\frac{1}{2} \sum mv^2$ называютъ *кинетическою энергією*. Уравненіе (792) можно написать въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{2} \sum mv^2 + (-U) = h \dots \dots \dots (800)$$

и высказать въ такой формѣ:

Полная энергія системы, равная суммѣ ея потенциальной и кинетической энергіи, есть величина постоянная.

Въ этомъ состоитъ механическое выраженіе закона сохранения энергіи, составляющаго перифразу закона сохранения живыхъ силъ.

Математическое выраженіе этого закона было, до Даниэля Бернулли, выведено только для случая притяженія точекъ системы къ неподвижнымъ центрамъ. Этотъ знаменитый математикъ подмѣтилъ и сравнительно большій кругъ его примѣнени и это важное знаніе. Но переводъ его на физическій языкъ былъ сдѣланъ Робертомъ Маперомъ и Гельмгольцемъ. Въ переводѣ на физическій языкъ этотъ законъ обозначаетъ, что энергія не увеличивается и не уменьшается при переходѣ ея изъ одного вида въ другой: изъ тепла въ работу и обратно, изъ электричества въ тепло, или въ свѣтъ или въ работу и обратно, изъ химическаго притяженія въ работу и проч. Въ этомъ видѣ законъ сохранения энергіи является краеугольнымъ камнемъ современной физики, химии и другихъ естественныхъ наукъ.

Только физическаго смысла закона сохранения энергіи съ механическимъ (съ формулою 800) заключаетъ въ томъ, что электричество,

магнетизмъ, теплота, химическое средство, свѣтъ и проч. сводится къ различнаго рода движениямъ, притяжениямъ и отталкиваніямъ.

Законъ сохраненія площадей.

§ 395. Положимъ, что связи, существующія въ системѣ таковы, при которыхъ всѣ ея точки могутъ ходить по окружностямъ, перпендикулярнымъ къ оси z и имѣющимъ центры на этой оси, причемъ относительное положеніе точекъ не мѣняется. Другими словами: допустимъ, что система способна совершать всякія вращения около оси z . Это еще не значитъ, что система въ самомъ дѣлѣ совершаетъ такое вращеніе, но только мы хотимъ сказать, что связи системы допускаютъ всякое вращеніе около оси z . Къ такимъ системамъ относятся между прочимъ: система свободныхъ точекъ, свободное твердое тѣло, свободная гибкая нить, свободная жидкость и проч. Пусть φ есть уголъ, на который повертывается всѣ радиусы точекъ. Называя чрезъ r радиусъ какой нибудь изъ точекъ системы имѣемъ по условию задачи:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\delta x = -r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi; \delta y = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi; \delta z = 0$$

или:

$$\delta x = -y \cdot d\varphi; \delta y = x \cdot d\varphi; \delta z = 0$$

Вставляя эти возможные перемѣщенія въ общее уравненіе механики (773), получимъ:

$$\sum \left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) (-y d\varphi) + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) (x d\varphi) + 0 \right] = 0.$$

или

$$\sum m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \sum (xY - yX) \dots \dots (801)$$

Вычислимъ для данного случая элементарную работу. По (797) получимъ:

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = d\varphi \sum (xY - yX) \dots \dots (802)$$

Величина $(xY - yX)$, на которую нужно помножить $d\varphi$, чтобы получить элементарную работу, называется *моментомъ силы относительно оси z*.

Изъ (801), какъ и въ § 367-омъ, получимъ

$$\frac{d}{dt} \left(\sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right) = \sum (xY - yX) \dots \dots (803)$$

или:

$$\frac{d}{dt} \sum mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sum (xY - yX) \quad . . . (804)$$

Если моментъ силъ относительно оси z равенъ нулю, какъ это бываетъ при силахъ взаимныхъ, при силахъ направленныхъ къ началу координатъ, въ отсутствіи всякихъ силъ, то (804) интегрируется и получается:

$$\sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = c \quad . . . (805)$$

Это уравненіе выражаетъ собою *законъ площадей*, при *вращаемости* системы около оси z .

Если система способна вращаться около каждой изъ осей координатъ, то такимъ же путемъ получили бы:

$$\left. \begin{aligned} \sum m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= \sum (yZ - xY) \\ \sum m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= \sum (zX - xZ) \\ \sum m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= \sum (xY - yX) \end{aligned} \right\} \quad . (806)$$

Если моменты силъ относительно осей равны нулю, то эти уравненія (806) интегрируются и даютъ по интегрированіи:

$$\left. \begin{aligned} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= c_1 \\ \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= c_2 \\ \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= c_3 \end{aligned} \right\} \quad . . . (807)$$

Неизмѣняемая плоскость.

§ 396 Дифференціальныя уравненія движенія, которыя дасть формулы (773), заключаютъ въ себѣ вторыя производныя и потому подлежатъ повторному интегрированію. Уравненія такія какъ (807) содержатъ только первыя производныя, называются первыми интегралами. Солнечная система (солиде съ планетами) удовлетворяетъ тѣмъ условіямъ, при которыхъ существуетъ законъ площадей (уравненія 807). Эти уравненія приводятъ къ весьма важному заключенію, которое мы сейчасъ изложимъ.

Обозначимъ чрезъ $\sum \dot{c} dt$ сумму произведеній массъ на пробѣженія (на векторную плоскость P) площадей, описываемыхъ радиусами-векторами

точек системы в течение времени dt . Определим также положение плоскости P , при котором величина Cdt была бы наибольшая.

Согласно съ (807) имѣемъ:

$$Cdt = [c_1 \cdot \cos(P, yz) + c_2 \cdot \cos(P, zx) + c_3 \cdot \cos(P, xy)] dt. \quad (808)$$

Назовемъ чрезъ P' вспомогательную плоскость, направление которой опредѣляется бы уравненіями:

$$\cos(P', yz) = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

$$\cos(P', zx) = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

$$\cos(P', xy) = \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$$

Основываясь на (138), мы можемъ теперь представить (808) въ видѣ:

$$Cdt = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \cos(P', P).$$

Изъ этого выраженія видно, что Cdt будетъ наибольшее, когда $\cos(P', P)$ будетъ равенъ единицѣ, т. е. когда $(P$ и $P')$ совпадутъ, другими словами, когда:

$$\left. \begin{aligned} \cos(P, yz) &= \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ \cos(P, zx) &= \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ \cos(P, xy) &= \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \end{aligned} \right\} \quad (809)$$

Величины c_1, c_2, c_3 постоянны. Следовательно ядромъ этой плоскости, для которой Cdt есть наибольшая величина не изменяется. Эта замѣчательная плоскость называется *минимальною*. Итакъ, въ каждой замѣчательной стѣнѣ выходитъ изъ уравненій (807) одна изъ некоторая неизмѣнная плоскость въ сошедшей системѣ. Для астрономическаго случая на земномъ шарѣ, совершающемъ вращеніе около и образующемъ околосолнечное движеніе предельны и измѣненныя и стрѣляющаго во всемъ движеніи чрезвычайно важно было узнать что въ сошедшей системѣ существуетъ хотя и измѣняющаяся во времени неизмѣнная плоскость.

Начало возможныхъ перемѣщеній.

§ 397. Вернемся къ общему уравненію (77) механики и посмотримъ, нельзя ли его выразить словами.

Замѣтимъ, что величины:

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$Y = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$Z = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

съ сравненіемъ *потерянныхъ силъ*. Сравненимъ дѣль это уравненій (773) съ (794) видимъ, что уравненіе (773) можно выразить такими словами, во всякомъ *движеніи элементарная работа потерянныхъ силъ на пути возможныхъ перемѣщеній равна нулю*, или, *потерянные силы найдутся во взаимномъ равновѣсіи*.

Теорема аналитической механики. Лагранжъ, шель такимъ путемъ еще пользовался еще до него установленнымъ *началомъ возможныхъ перемѣщеній* которое заключается въ следующемъ.

Совокупность силъ находится въ равновѣсіи, если элементарная работа на пространствѣ возможныхъ перемѣщеній равна нулю, то есть если,

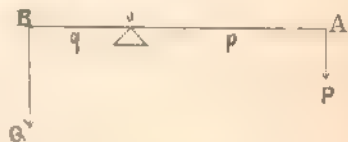
$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \dots \dots \dots (810)$$

Изъ этого Лагранжъ распространилъ на все ривныя силы, которыя то началу Гамблера, находится въ равновѣсіи и получила свою знаменитую формулу (773).

Начало возможныхъ перемѣщеній, само по себѣ, весьма ясно въ дѣло во многихъ случаяхъ.

Приведемъ его, для слижаиваго съ нимъ означенія къ рычагу. Пусть имѣемъ рычагъ (фиг. 264) подержанъ въ точкѣ *O*. Въ точкѣхъ *A* и *B* приложены къ нему силы *P* и *Q*.

Спрашивается, какое соотношеніе должно быть между плечами $OA = p$ и $OB = q$, для того чтобы рычагъ находился въ равновѣсіи?



Фиг. 264.

Если рычагъ отклонится на весьма малый уголъ $d\phi$, то точка *A* перемѣстится въ одну сторону (вверхъ или внизъ) на величину дуги $pd\phi$ (здесь p — радиусъ-векторному на мѣстѣ). Точка *B* перемѣстится при этомъ въ противоположную сторону (внизъ или вверхъ) на дугу $qd\phi$. Если перемѣщеніе вверхъ считаемъ и положительнымъ, то перемѣщеніе внизъ должно считаться отрицательнымъ. Поэтому возможные перемѣщенія будутъ

$$pd\phi \text{ для точки } A$$

$$- qd\phi \text{ для точки } B$$

Работы на пути этих перемещений будут:

$$Ppd\varphi = \text{работа силы } P$$

$$- Qqd\varphi = \text{работа силы } Q.$$

По началу возможных перемещений сумма этих работ, в случае равновесия, должна равняться нулю. Следовательно при равновесии:

$$Ppd\varphi - Qqd\varphi = 0;$$

или,

$$Pp = Qq \dots \dots \dots (811)$$

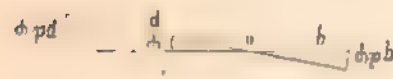
Эт известный закон рычага: *моменты сил, в случае равновесия, равны между собою.*

Уравнение (811) может быть написано как:

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$$

силы обратно пропорциональны плечам рычага.

Таким образом мы вывели закон рычага из начала возможных перемещений. Мы могли бы его выразить так: при перемещении рычага на угол $d\varphi$ одна концев его описывает большую, другая — меньшую дугу — перемещение одного конца большое, перемещение другого — малое (фиг. 265). Для равновесия, приложенные к этим концам силы должны быть обратн. пропорциональны перемещениям. Чем меньше возможное перемещение точки системы, тем большую силу надо приложить к этой точке для равновесия.



Фиг. 265.



Фиг. 266.

Начало возможных перемещений имеет широкое применение, будучи столь же общим, как уравнение (773).

В практической механике оно прибавляет к многим вычислениям. Практики выражают его иногда в такой форме: *производящая сила так сильно же вытравляется в пространстве, как выражение ее отпадает от точки связи.* Выразим точнее на определенном примере, что хотим сказать этими словами. Подождем (фиг. 266) мы имеем столь удобное сложнейший механизм, обозначенный на чертеже нульцирком и состоящий из кривых и прямолинейных звеньев и рычагов. Только такой, что какому угодно положению точки A механизма соответствует свое вполне определенное положение точки B . Подождем еще, что, при прохождении точкою A весьма малого пути Aa точка B проходит малый путь Bb . На основании начала возможных перемещений силы P и Q , приложенные в точках A и B по направлениям этих путей, уравновешиваются в том случае, если они обратно пропорциональны длинам этих путей.

Это начало убеждает насъ въ томъ, что *никакимъ механизмомъ нельзя создать энергии изъ ничего; можно только преобразовать отношенія между производимыми путями и силами.*

Лагранжевы множители.

§ 398. Мы подошли къ уравнению (769), исходя изъ уравненій (766). Лагранжъ установилъ уравнение (773) — пользуясь началомъ возможныхъ перемещеній и уже это уравнение (773) развилъ въ систему уравненій (769). Полагаемъ, что уравнения (769) можно вывести изъ уравненія (773).

По заданнымъ условиямъ какой-нибудь катчи имеемъ:

$$\sum \left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0 \quad (773)$$

и несколько — положимъ *n*, уравненій связей.

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z, t) &= 0 \\ F(x, y, z, t) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (812)$$

Положимъ, что система заключаетъ *p* точекъ.

n уравненій (812) связей дають такіа *n* уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \sum \left[\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z \right] &= 0 \\ \sum \left[\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z \right] &= 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (813)$$

Если число точекъ равно *p*, то число переменныхъ (по тремъ координатамъ) $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2, \delta x_3, \dots$ будетъ $3p$. Изъ *n* уравненій (813) можно было бы опредѣлить *n* такихъ величинъ δ , и исключить ихъ изъ уравненія (773), въ которомъ осталось бы $3p - n$ совершенно произвольныхъ δ . Уравненіе (773) могло бы существовать только при томъ условии, если каждый изъ $3p - n$ коэффициентовъ, стоящихъ при такихъ произвольныхъ δ , былъ бы равенъ нулю. Следовательно надо приравнять нулю или $3p - n$ коэффициентовъ. Эти $3p - n уравненій дадутъ *n* уравненій (812) и составили бы *3n* уравненій для опредѣленія *3n* координатъ черезъ время *t*.$

Однако такой способъ исключенія вѣснмныхъ переменныхъ δ весьма сложенъ и представляетъ множество затрудненій. Лагранжъ преодолѣлъ эти затрудненія, приложивъ сюда известный способъ исключенія *по-мощью неопредѣленныхъ множителей*.

Онъ вводилъ уравненія (813) на неопредѣленные множители *k, l, ...* удовлетворяющія затѣмъ ихъ съ уравненіемъ (773).

Такимъ образомъ получается:

$$\sum \left(\left[X - m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} + \dots \right] \delta x \right. \\ \left. + \left[Y - m \frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} + \dots \right] \delta y \right. \\ \left. + \left[Z - m \frac{d^2z}{dt^2} + k \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} + \dots \right] \delta z \right) = 0 \quad (811)$$

и произвольныхъ множителей k, λ, \dots , определяется такъ, чтобы n изъ величинъ δ были бы коэффициентами нули (другими словами и величина k, λ, \dots можно определять изъ n уравнений получаемыхъ отъ приравнения нулю n коэффициентовъ стоящихъ при таковыхъ-нибудь n изъ величинъ δ). Тогда приравняемъ нулю коэффициенты остальныхъ $3p - n$ величинъ δ дасть $3p - n$ дифференциальныхъ уравнений.

Можно тоже самое действие выразить еще проще: все приводится къ тому что получаются $3p$ уравнений отъ приравнения нулю всѣхъ коэффициентовъ стоящихъ при $3p$ величинахъ δ .

Уравнение (811) дасть такимъ образомъ $3p$ такихъ уравнений

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_1 + k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots \\ m \frac{d^2y_1}{dt^2} &= Y_1 + k \frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y_1} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (769)$$

Вотъ мы и пришли къ уравненіямъ (769).

Эти уравненія (769) и я уравненія (812) вполне достаточны для рѣшенія задачи. Вся трудность заключается въ интегрировании этихъ уравненій.

Примѣръ. Составимъ дифференціальныя уравненія движенія двухъ вѣсовыхъ тѣлъ, находящихся подъ дѣйствиемъ тяжести и связанныхъ между собою несомкнутымъ стержнемъ MM' (фиг. 267) длины l .

Здѣсь уравненіе связи MM' таково

$$f(x, y, z) = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - l^2 = 0,$$

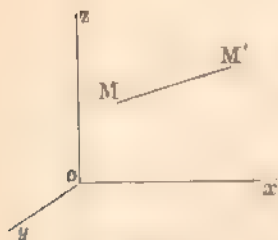
или выразимъ, что квадратъ расстоянія MM' равенъ постояннаго l^2

Имѣемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - x'); \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -2(x - x')$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - y'); \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = -2(y - y')$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2(z - z'); \quad \frac{\partial f}{\partial z'} = -2(z - z')$$



Фиг. 267

Действительная сила тяжести направлена по отрицательной стороне оси z . Поэтому:

$$X = 0, \quad Y = 0; \quad Z = -mg \quad X_1 = 0, \quad Y_1 = 0; \quad Z_1 = -mg$$

Следовательно, в общем случае дифференциальные уравнения (769) примут вид:

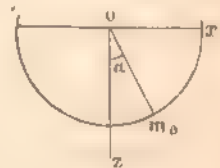
$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= 2k(x - x_1); & m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -2k(x - x_1) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= 2k(y - y_1); & m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -2k(y - y_1) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= -mg + 2k(z - z_1); & m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= -mg - 2k(z - z_1) \end{aligned} \right\} (815)$$

Греша мыя дифференциальные уравнения решения найдем, для чего если уравнений движения в конечной (не дифференциальной) форме) можно было бы известными уравнения (815) два раза проинтегрировать, причем могли бы получить постоянные интегралы, которые из них бы определялись из начальных данных.

Математический маятник.

§ 399. Такие, обладающие более или менее большим объемом массы, как и качающиеся маятники, имеют центр тяжести, начало сохранения живой силы, начало движения, дающее возможность более быстрой, если решение механических задач. Приложим к нему интегралы живой силы и чрезвычайно важному самому по себе разделу математического маятника.

Математический маятник — это тело, которое движется при помощи веревки и совершено любой или к неподвижной точке O (фиг. 268). В состоянии равновесия нить om направлена вертикально вниз. Отклоняется точку m в положение m_0 , и при оставлении ее нитьм двигаться под влиянием силы тяжести. Все это можно продумать с веревкой, подвешенную к потолку нити. Такой старинный называется физическим маятником. При исследовании физических маятников приходится бы принимать во внимание упругость нити, сопротивление воздуха и движение самой системы точек, составляющих гижу. Обыкновенно система упругая задача идеализируя ее, и потом уже переходить к задаче более сложной, редкостью и finally слышать. Математический маятник есть идеализация физического для упрощения задачи.



Фиг. 268

Возьмем начало координат в неподвижной точке O *подвеса*. В

ось z по направлению вниз и ось x в плоскости om_0 , в которой первоначально отводится точка m .

Применяя теорему интеграла живых сил (§ 392) к моментам, в которых точка m имеет координаты z и z_0 , находим:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgs - mgs_0 \dots \dots \dots (816)$$

Но в начале движения скорость была равна нулю, так как мы допустили точку двигаться из положения m_0 , не толкая ее. Следовательно $v_0 = 0$. Поэтому (816) принимает вид:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(z - z_0);$$

или

$$v^2 = 2g(z - z_0) \dots \dots \dots (817)$$

Назовем φ углом, составляемым маятником с осью z в какой-нибудь момент движения. Начальную величину этого угла назовем α . Тогда m_0 (начальное положение точки m) примем за начало дуги, отсчитывая путь, проходимый точкою m . Дуга равна, так как известно произведение радиуса на угол. Следовательно

$$s = l(\alpha - \varphi), \quad v = \frac{ds}{dt} = -l \frac{d\varphi}{dt}.$$

Вставляя эту величину v в (817), получим:

$$l^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2g(l(\alpha - \varphi)) = 2gl(\cos \varphi - \cos \alpha) \dots \dots \dots (818)$$

Во время первых колебания маятника φ уменьшается, поэтому $\frac{d\varphi}{dt}$ отрицательно. Следовательно из (818) получим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}.$$

Откуда:

$$dt = - \int \frac{l}{g \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}} d\varphi \dots \dots \dots (819)$$

Это уравнение интегрируется только при помощи эллиптических функций. Мы его при интегрировании приближенно, при помощи разложения в ряды, следующим образом. Разложим $\cos \varphi$ и $\cos \alpha$ по формулам (292)

Получим:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} \dots \dots \dots (820)$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} \dots \dots \dots (821)$$

Подставляя эти величины, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}} = [2(\cos\varphi - \cos\alpha)]^{-\frac{1}{2}} = \left(2 - \varphi^2 + \frac{\varphi^4}{12} - 2\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\varphi^2 + \frac{\varphi^4}{12} + \alpha^2 - \frac{\alpha^4}{12}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\varphi^2 - \frac{\varphi^4}{12} + \frac{\alpha - \varphi^2}{12} - \frac{\alpha - \varphi^2}{12} + \alpha^2 - \frac{\alpha^4}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{12}\right) - \varphi^2 \left(1 - \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{12}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \left(\alpha^2 - \varphi^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\alpha^2 - \varphi^2}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Разложив величину $\left(1 - \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{12}\right)^{-\frac{1}{2}}$ по биному Ньютона и, рассматривая только малые колебания маятника, мы можем в этом разложении отбросить в их малости члены четвертого и высших степеней и получать:

$$\frac{1}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}} = (\alpha^2 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{24}\right).$$

Подставляя эту величину в (819), получим:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\left(1 + \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{24}\right)}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} d\varphi$$

или:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{12}\right) \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} + \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\varphi^2}{24} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}.$$

Интегрируя по формулам [3] и [4] параграфа 270 то получим:

$$t + const = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{12}\right) \arccos\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) + \frac{1}{18} \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\varphi \sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} - \alpha^2 \cdot \arccos\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)\right].$$

При $t = 0$ угол $\varphi = \alpha$. Следовательно $const = 0$. Поэтому

$$t = \frac{1}{18} \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\varphi \sqrt{\alpha^2 - \varphi^2} + \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{12}\right) \arccos\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)\right]. \quad (822)$$

Для определения продолжительности колебания, в течение которого угол φ изменяется от α до $(-\alpha)$ надо в (822) положить $\varphi = -\alpha$. Исходя продолжительность колебания чрез T , получим из (822)

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) \dots \dots \dots (823)$$

Пренебрегая даже и вторым слагаемым от α , получим известную из физики формулу:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots \dots \dots (824)$$

Чѣмъ меньше размахъ амплитуды колебанія маятника, тѣмъ точнѣе выражаютъ движенье формулы (823) и (824). Чѣмъ больше и легче лить физическаго маятника и чѣмъ тяжелѣе и меньше по объѣму грузъ, стод, тѣмъ болѣе его можно разсматривать какъ маятникъ математическій и прилагать къ нему формулы (823) и (824).

Такой простой инструментъ какъ маятникъ оказался послѣднимъ орудіемъ въ рукахъ ученыхъ помощію ко опредѣлены были законы тягести; Гюйгенсъ устроилъ комедію его часы (по Гюйгенсу время пѣсьриды песочными часами и водяными «клеточками»), помощію маятника была точно опредѣлена фигура земли Кавендишъ, сравнивая влияние тягести на колебаніе маятника въ вліяніемъ на него притяженія, массы вѣдугъ массивными свинцовыми шарами, опредѣлѣли плотность земли ко которой не трудно было узнать объемъ земнаго шара, среднѣмъ способомъ. Такимъ образомъ небольшой маятниковый сваръ Кавендиша мало назывъ всами, на которыхъ крѣпленъ былъ земной шаръ.

Движеніе физическаго маятника (имѣющаго массивный стержень) и вообще движенье твердаго тѣла, требуетъ, для своего изслѣдованія, тѣмъ мы сейчасъ увидимъ, знакомства съ нѣсколькими величинами, называемыми *моментами инерции* съ которыми мы знакомимся въ § 101.

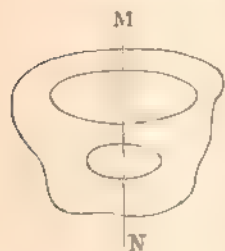
Вращеніе твердаго тѣла около неподвижной оси.

§ 400 Твердымъ тѣломъ, или *неизмѣнимою системою*, въ механикѣ называется такая система точекъ, въ которой взаимныя разстоянія между точками не мѣняются.

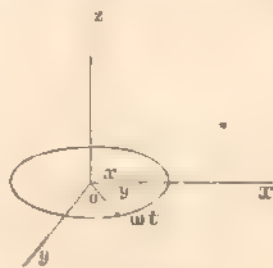
Твердое тѣло можетъ равнѣрнѣо вращаться около нѣсколькой оси. Это значить что каждая точка твердаго тѣла можетъ совершать равнѣрнѣо вращеніе по кружкамъ и величинѣ въ плоскости перпендикулярна къ оси вращенія MN (фиг. 269). Назовемъ чрезъ ω уголъ, на который повертывается радиусъ ка-

кой-нибудь точки (перпендикуляръ опущенный изъ нея на ось MN) около оси MN въ 1 время. Этотъ уголъ называется *угловою скоростью* или скоростью вращенія. Очевидно, что радиусы всѣхъ точекъ тѣла повертываются на одинъ и тотъ же уголъ, такъ что ω есть угловая скорость всѣхъ точекъ тѣла — угловая скорость всего тѣла.

Примемъ ось вращенія за ось z и проведемъ ось x чрезъ начальное положеніе одной изъ точекъ вращающагося тѣла, плоскость образуемъ, описываемой этою точкою, примемъ за плоскость (x, y) . Въ единицу вре-



Фиг. 269.



Фиг. 270.

мени радиус, точно отклоняется от оси x на угол ωt . Въ точках и времени t онъ отклонится на угол ωt . Изъ чертежа видно, что:

$$x = r \cos (\omega t)$$

$$y = r \sin (\omega t)$$

$$z = 0.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin (\omega t) \cdot \omega$$

$$\frac{dy}{dt} = r \cos (\omega t) \cdot \omega$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Но (706):

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Слѣдовательно въ нашемъ случаѣ:

$$v = \sqrt{r^2 \sin^2 (\omega t) \cdot \omega^2 + r^2 \cos^2 (\omega t) \cdot \omega^2 + 0} = \omega r \sqrt{\sin^2 (\omega t) + \cos^2 (\omega t)}.$$

Но сумма квадратовъ синуса и косинуса = 1. Слѣдовательно:

$$v = \omega r \dots \dots \dots (825)$$

Итакъ, въ равномерномъ вращеніи *линейная скорость* v каждой точки гѣлы равна произведенію угловой скорости ω на радиусъ точки, т.е. вдвое отстоятъ точки отъ оси вращенія, т.е. больше ея линейная скорость.

Моментъ инерціи.

§ 401. Опредѣлимъ живую силу T твердаго гѣла, равномерно вращающагося около вогнутой точки. По сему же опредѣленію живой силы имѣемъ

$$T = \sum \frac{mv^2}{2}.$$

Вотъ если сюда, вмѣсто v имѣемъ величину изъ (825), получимъ:

$$T = \sum \frac{m}{2} \omega^2 r^2.$$

Здѣсь ω и $\frac{1}{2}$ суть величины постоянныя, которыя при сложеніи можно вынести за скобки и слѣдовательно можно вынести за знакъ \sum . Получимъ

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum mr^2 \dots \dots \dots (826)$$

Здѣсь для каждой точки гѣлы имѣется свое m и свое r . Оказывается, что живая сила T твердаго гѣла, равномерно вращающагося около вог-

торой неподвижной оси, пропорциональна квадрату ω^2 угловой скорости ω , и пропорциональна величине $\sum mr^2$. Эта величина называется *моментом инерции* тела относительно оси MN . Мы будем обозначать момент инерции буквою J . Итак:

$$T = J \frac{\omega^2}{2} \dots \dots \dots (27)$$

при равномерном вращении тела.

Из интеграла живых сил известно, что работа может быть превращена в живую силу и обратно, живая сила может превратиться в работу. Следовательно, если, как мы видели, живая сила вращающегося тела пропорциональна моменту инерции, то телу труднее сообщить вращение в определенную скорость ω , чѣм больше его момент инерции относительно оси вращения и наоборот: телу труднее остановить вращение съ определенной скоростью ω , чѣм больше его момент инерции.

Но момент инерции зависит от того, около какой оси будем вращать тело. Момент инерции бревна относительно поперечной оси MN (фиг. 271) больше момента инерции



Фиг. 271

того же бревна относительно продольной оси $M'N'$ (фиг. 272), потому что отъ продольной оси всѣ точки бревна не далеко отстоятъ; всѣ r не велики; тогда какъ отъ поперечной оси крайнія точки бревна и близкия къ нимъ отстоятъ далеко, такъ что моментъ инерции



Фиг. 272.

$\sum mr^2$ относительно продольной оси меньше, чѣмъ относительно поперечной.

Изъ этого момента инерции можно заметить такъ сказать, на себѣ три помощи съдвигая нить. Если взять длинную и довольно тяжелую жердь повереть и вращать вѣдь ее въ горизонтальномъ положеніи и потомъ дерзнуть ее въ вертикальное положеніе и опять вращать, дерзая ее въ томъ же положеніи. Въ первомъ случаѣ моментъ инерции жерди относительно оси большой, и потому ее трудно повернуть и, начавъ вращать съ нею, трудно остановиться. Во второмъ случаѣ моментъ инерции жерди относительно оси малъ и потому приложить свое собственное вращение съ вертикальною жердью легче и остановиться легче. Иногда простонародно употребляютъ для выраженія этого понятия слово «махъ».

Въ механикѣ дается точное определение *момента инерции тела относительно данной оси равенъ суммѣ произведеній массъ, составляющихъ это тело, на ихъ разстоянія отъ оси вращения*.

Какъ же вычислить моментъ инерции тела относительно данной оси, когда въ телѣ бесконечное множество точекъ? Помощью интегрального

по численности дающего суммы безконечно больших и числа безконечно малых элементов. Мы это докажем на примере.

Моментъ инерціи параллелепипеда.

§ 402. Опредѣлимъ моментъ инерціи параллелепипеда, имѣющаго измѣренія a, b, c , относительно оси Z , проходящей чрезъ его центръ и параллельной его четырѣмъ ребрамъ (фиг. 273).

Назовемъ плотность параллелепипеда чрезъ ρ . Масса равна объему, умноженному на плотность, поэтому масса m безконечно малого параллелепипеда ограничена плоскостями параллельными плоскостямъ координатъ и имѣющаго объемъ $dx dy dz$ будетъ $\rho dx dy dz$. Расстояние r отъ оси z будетъ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Слѣдовательно моментъ инерціи будетъ:

$$J = \sum m r^2 = \int \int \int \rho (x^2 + y^2) dx dy dz$$

Здѣсь суммирование производится слѣдующимъ образомъ: суммируемъ объемы $dx dy dz$ отъ нижней плоскости до верхней, считая интеграцию по Z производимъ въ пределахъ отъ $-\frac{c}{2}$ до $+\frac{c}{2}$. Полученный слѣдѣнія (фиг. 274) суммируемъ отъ задней грани до передней, инте-



Фиг. 273.



Фиг. 274.



Фиг. 275.

грируя по y въ пределахъ отъ $-\frac{b}{2}$ до $+\frac{b}{2}$. Полученную слѣдѣнія (фиг. 275) суммируемъ отъ левой грани до правой интегрируя по x въ пределахъ отъ $-\frac{a}{2}$ до $+\frac{a}{2}$. Имѣемъ

$$\begin{aligned}
 J &= \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} (x^2 + y^2) dx dy dz \\
 &= \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} x^2 dx dy dz + \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} y^2 dx dy dz \quad (829)
 \end{aligned}$$

Вычисляем:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} x \, dx \, dy \, dz = c \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x^2 \, dx \, dy$$

$$bc \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 \, dx = bc \left(\frac{x^3}{3} \right)_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \frac{a^3 bc}{12}$$

Вычисляем:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} y \, dx \, dy \, dz = c \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 \, dx \, dy$$

$$\frac{b^3}{12} c \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx = \frac{ab^3 c}{12}$$

Вставляя найденные величины в интегралы в (820), получим:

$$J = p \frac{a^3 bc}{12} + p \frac{ab^3 c}{12} = \frac{p(abc)}{12} (a^2 + b^2)$$

Итак:

$$J = \frac{pabc}{12} (a^2 + b^2) \dots \dots \dots (880)$$

Момент инерции относительно параллельной оси x будет так же трудно выдать из (830), заменив в ней a чрез c и c чрез a .

$$\frac{pabc}{12} (c^2 + b^2)$$

Момент инерции относительно оси y будет

$$\frac{pabc}{12} (c^2 + a^2) \dots \dots \dots (831)$$

Покажем, что имеем, брать квадратного сечения (линия которого в 10 раз больше ширины, так что $a = b; c = 10a$). По формул (830) получим:

Момент инерции относительно продольной оси C равен:

$$\frac{pabc}{12} (a^2 + b^2) = \frac{pa^3 \cdot 10}{12} (2a^2) = \frac{5pa^5}{6} = \frac{20pa^5}{12}$$

По формул (831):

Момент инерции относительно поперечной оси B равен:

$$\frac{pabc}{12} (c^2 + a^2) = \frac{pa^3 \cdot 10}{12} (100a^2 + a^2) = \frac{101pa^5}{12}$$

Оказывается что, при таких размерах момент инерции относительно поперечной оси $\frac{101 pa^5}{12}$ почти в 5 раз больше момента инерции $\frac{20 pa^5}{12}$ относительно продольной оси параллельной ей.

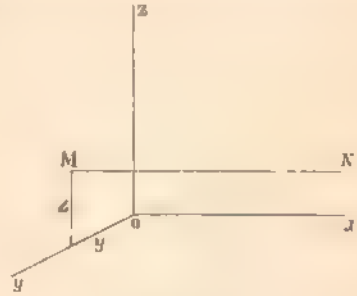
Сравнение моментов инерции относительно параллельных осей.

§ 403. Примем за центр инерции тела за начало координат. Определим момент инерции J относительно оси x . Расстояние какой либо точки системы от оси x будет:

$$\sqrt{y^2 + z^2}$$

Следовательно:

$$J = \sum mr^2 = \sum m(y^2 + z^2)$$



Фиг. 276.

Определим момент инерции J' относительно оси MN (фиг. 276) параллельной оси x . Обозначим через (y', z') координаты точки пересечения оси MN с плоскостью (y, z) . Расстояние r' какой либо точки системы от оси MN будет:

$$r' = \sqrt{(y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Поэтому:

$$J' = \sum mr'^2 = \sum m[(y - y')^2 + (z - z')^2]$$

или:

$$J' = \sum m(y^2 + z^2) - 2y' \sum my - 2z' \sum mz + (y'^2 + z'^2) \sum m,$$

или:

$$J' = \sum m(y^2 + z^2) - 2y' \sum my - 2z' \sum mz + (y'^2 + z'^2) M, \quad (833)$$

где $M = \sum m =$ масса всего тела.

Вычитая (832) из (833) и замечая, что при начале в центре инерции $\sum my = \sum mz = 0$, получим:

$$J' - J = (y'^2 + z'^2) M \dots \dots \dots (834)$$

Но $y'^2 + z'^2$ равно квадрату расстояния между осями x и MN , назовем это расстояние через R , так что: $y'^2 + z'^2 = R^2$, тогда (834) преобразуется в:

$$J' = J + M \cdot R^2 \dots \dots \dots (835)$$

Момент инерции около какой либо оси MN равен сумме, состоящей из момента инерции около оси, проходящей через центр инерции параллельно MN и из произведения MR^2 массы на квадрат расстояния между этими осями.

Отсюда вытекает, 1) момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции есть наименьший из моментов инерции относи-

тельно осей взаимно параллельных. 2) моменты инерции относительно взаимно параллельных осей, равностоящих от центра шара равны между собой.

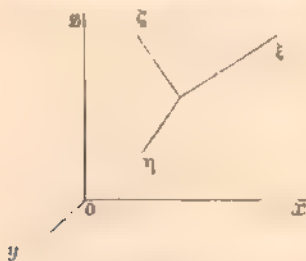
Вращение твердого тела около оси.

§ 404. Если в твердом теле неподвижны две из его точек, то, благодаря этому, должны оказаться неподвижными все точки, лежащие на прямой, соединяющей две неподвижные точки; такая неподвижная прямая называется *осью вращения* тела. Тело в таком случае способно совершать всякая вращения около неподвижной оси.

Мы знаем из § 395, что для такого тела применимы интегралы д'Аламбера. Примем ось вращения за ось x . Тогда по (806) имеем:

$$\sum m \left(y \frac{d^2 x}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \sum (yZ - zY) \quad \dots \quad (836)$$

Обыкновенно при изучении движения твердого тела употребляют прямые, состоящие в том, что воображают неизменно соединенную с телом систему осей координат (ξ, η, ζ) (фиг. 277) и изучают движе-



Фиг. 277.



Фиг. 278.

ние этой системы осей относительно неподвижной системы осей (x, y, z). Как и прежде, мы употребим и в настоящем случае. Примем ось вращения тела за ось ξ , начало координат (ξ, η, ζ) соединимых с тем же, возьмем за начало неподвижных координат (фиг. 278). Ось x примем совпадающею с осью вращения ξ , тогда ось вращения неподвижна. Назовем θ угол, составляемый осями y и η . На чертеже (фиг. 278) оси x и ξ проектируются в одну точку O . Оси η и ζ совпадают (вращаются) около оси x . Оси y и z неизменны. Из формулы преобразования координат имеем:

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \\ y &= \eta \cos \theta - \zeta \sin \theta \\ z &= \eta \sin \theta + \zeta \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (837)$$

Отсюда вычисляемъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= (\eta \sin \theta + \zeta \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= (\eta \cos \theta - \zeta \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (838)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= (\eta \sin \theta + \zeta \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} - (\eta \cos \theta - \zeta \sin \theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= (\eta \cos \theta - \zeta \sin \theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (\eta \sin \theta + \zeta \cos \theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots (839)$$

Подставляя эти величины в первую часть уравнения (836), видим, что оно преобразовывается так:

$$\sum m \left(y \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - z \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) = \sum m (\eta^2 + \zeta^2) \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \dots (840)$$

Но $\sum m (\eta^2 + \zeta^2)$ есть расстояние каждой нити от оси вращения. Следовательно $\sum m (\eta^2 + \zeta^2) = J$ — момент инерции тела относительно оси вращения. Обозначим это через J . Тогда (840) дает:

$$\sum m \left(y \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - z \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} \dots (841)$$

Подставляя эту величину в (836) получим:

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \sum (yZ - zY) \dots (842)$$

Вторая часть того уравнения вращения около оси x преобразуется в особый частный случай, см. по тому, какия силы действуют на тело. Приложим его уравнение к следующему частному случаю.

Сложный маятник.

§ 405. Изучим движение твердого тела около горизонтальной оси в виде сложного маятника. Тело, совершающее колебания около горизонтальной оси, носит название физического или сложного маятника.

Возьмем ось z по направлению тяжести. (Фиг. 279). На расстоянии o от центра тяжести c действует сила тяжести mg . Следовательно

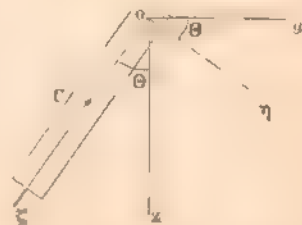
$$\begin{aligned} \sum m (Zy - zY) &= \sum mgy - \sum mg (\eta \cos \theta - \zeta \sin \theta) \\ &= g \cos \theta \sum m\eta - g \sin \theta \sum m\zeta \dots (843) \end{aligned}$$

Если возьмем ось z так, что она проходит через центр тяжести, то по (783):

$$\sum m\eta = 0; \quad \sum m\zeta = M\zeta_1,$$

гдѣ $\zeta_1 = o$ — расстояние центра тяжести от оси вращения. Таким образом (843) примет вид:

$$\sum m (Zy - zY) = -Mg\zeta_1 \cdot \sin \theta$$



Фиг. 279.

Вольемъ вь данномъ случаѣ преобразовать первую часть уравне-

или (842), такъ что это уравнение приметъ видъ

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = - Mg\zeta \cdot \sin \theta \dots \dots \dots (844)$$

Замѣтимъ, что

$$\begin{aligned} \frac{d \cos \theta}{dt} &= \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d^2 \cos \theta}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \end{aligned}$$

въ слѣдствіе этого (844) можно представить такъ

$$J \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = - Mg\zeta \frac{1}{\sin \theta} \frac{d \cos \theta}{dt}$$

или:

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right) d \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = - \frac{Mg\zeta}{J} d \cos \theta$$

Отсюда:

$$\int \left(\frac{d\theta}{dt} \right) d \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{Mg\zeta}{J} \int d \cos \theta,$$

откуда:

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2 Mg\zeta}{J} \cos \theta + C \dots \dots \dots (845)$$

Принимая начальную скорость $\frac{d\theta}{dt}$ равную нулю и называя начальную угловъ θ чрезъ α , возьмемъ изъ (845)

$$0 = \frac{2 Mg\zeta}{J} \cos \alpha + C.$$

откуда:

$$C = - \frac{2 Mg\zeta}{J} \cos \alpha$$

Слѣдовательно (845) даетъ:

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2 Mg\zeta}{J} (\cos \theta - \cos \alpha) \dots \dots \dots (846)$$

Изъ (846) видно, что движеніе математическаго маятника выражается уравненіемъ:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \alpha) \dots \dots \dots (847)$$

Сравнивая (846) съ (847) видимъ, что маятникъ движется

такъ, если массу точки, имѣющей длину l , определяемъ изъ уравненія

$$\frac{Mg\zeta}{J} = \frac{g}{l}$$

откуда:

$$l = \frac{J}{M\zeta} \dots \dots \dots (848)$$

Изъ формулы Пондѣ выскитъ, что сложной маятникъ, имѣющей массу M моментъ инерціи около оси вращения J равносильно центру тяжести A относительно оси вращения ζ движется какъ математическій маятникъ котораго l равно

$$\frac{J}{M\zeta} \dots \dots \dots (849)$$

Центръ качанія.

§ 406 Проведемъ чрезъ центръ тяжести сложнаго маятника ось параллельную оси его вращения (рис. 280) и обозначимъ чрезъ J моментъ инерціи относительно этой оси. По формулѣ 825, имѣемъ:

$$J = \bar{J} + M\zeta^2$$

Въ формулѣ эту величину вместо J изъ (848) получимъ:

$$l = \frac{J + M\zeta^2}{M\zeta} = \frac{J}{M\zeta} + \zeta \dots \dots \dots (850)$$

Отложимъ на оси ζ отъ точки C , лежащей на оси тяжести длину l до точки O . По следующему въ предыдущемъ параграфѣ сдѣланнымъ маятникъ колеблется какъ математическій имѣющей длину $l = CO$ и въ то же время какъ сложной маятникъ, имѣющей массу M и центръ тяжести A . Точка O называется *центромъ качанія*; отъ нее C называется *центромъ тяжести*.

Оказывается, что эти центры взаимны. А именно: если O сдѣлать центромъ тяжести, то C будетъ центромъ тяжести A , въ силу взаимности дѣлющихся соображеній. По (850),

$$CO = \frac{J}{M\zeta} + \zeta;$$



Фиг. 280

Положивъ ζ мы найдемъ расстояние CA (сообразуя центр тяжести A), такъ что:

$$CA = \zeta \dots \dots \dots (851)$$

Слѣдовательно:

$$CA \cdot CO = CA \left(\frac{J}{M\zeta} + \zeta \right) = \frac{J}{M\zeta} \dots \dots \dots (852)$$

Изъ (851) и (852), слѣдуетъ:

$$CA \cdot OA = \frac{J}{M} \text{ постоянная величина. (853)}$$

Вычислимъ теперь какой длины r долженъ быть математическій маятникъ, колеблющійся такъ же, какъ тело ab фиг. 280, если его подвѣсить на прѣхъ выдвинувъ прѣхъ O параллельно съ прѣхъ и осью колебаній тела. По (850):

$$r = \frac{J}{M \cdot OA} + OA \text{ (854)}$$

Изъ (853) имѣемъ:

$$OA = \frac{J}{M \cdot CA}$$

Подставляя въ (854) получимъ:

$$r = \frac{J}{M \cdot \frac{J}{M \cdot CA}} + \frac{J}{M \cdot CA} = CA + \frac{J}{M \cdot CA} \quad \text{§ 407} \quad \frac{J}{M \cdot CA}$$

Сравнивая съ (850), видимъ, что

$$r = l$$

Слѣовательно если O' прѣхъ маятника висѣла въ C будетъ центромъ качения; что и требовалось доказать.

Циклоидальный маятникъ.

§ 407 Въ предыдущихъ параграфахъ мы изучили вращеніе какой нибудь точки въ шестернѣ. Мы знаемъ, что при вращеніи съ скоростью ω радианъ въ секунду точка шестерни по дугѣ описываетъ вращеніе со скоростью ωr .

$$T = r \int \frac{1}{q} \left(1 + \frac{x}{16} \right) \quad \text{(855)}$$

и въ этотъ моментъ, что только при вращеніи маятника въ шестернѣ периодическое вращеніе T будетъ колебаться равно числомъ вращеній ω радианъ въ секунду r и q — радиусы шестерни, радиусъ вращающагося колеса и вращеніе вращеніе еще отъ вращенія въ формулу (855) у насъ ω — вращеніе шестерни ω и r — радиусъ.

Въ предыдущихъ параграфахъ мы заметили, что, когда бы было замѣчено Гюйгенсомъ, что такая вращающаяся по дугѣ шестерни въ колебаніи представляетъ колебаніе, не зависящее отъ ихъ величины.

Брахистохрона.

§ 408. Другое интересное свойство циклоиды, заключающееся въ томъ, что при движении шарика, заключеннаго въ дугѣ, время, прошедшее со времени начала движения, заключеннаго въ дугѣ, равно времени, прошедшему со времени начала движения шарика, заключеннаго въ дугѣ, равно времени, прошедшему со времени начала движения шарика, заключеннаго въ дугѣ.

две точки A и B , при чем A лежит на большей высоте чем B но не на одной с нею вертикали; если устраивать различныя пути от A и B прямыми линиями и разные криволинейные и пускать по этимъ путямъ тяжелую точку скользить подъ вліяніемъ тяжести, то въ кратчайшее время тяжелая точка придетъ изъ A въ B по циклоидѣ. Поэтому циклоиду называютъ «брахистохроной», то есть кривою наиократчайшаго времени.



Фиг. 281.

Равновѣсіе какъ частный случай движенія

§ 409 Изъ общихъ уравненій движенія (§ 397) вытекаютъ и общія уравненія равновѣсія. Дифференціруя уравненія шестаго раздела (§ 397) с приходомъ къ нулю скорости $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ равны нулю и уравненіе (773) обращается въ:

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0 \dots \dots \dots (855)$$

Отдѣлы рациональной механики

§ 410 Обладая естественно въ постройкахъ картамъ теорію равновѣсія и кинематику, мы особенно вліяніемъ *Статикою*. Точно такъ же отдѣломъ кинематики служитъ кинематика въ примѣненіи къ различнымъ движимымъ тѣламъ тѣсно соотнесенными между собою скоростями и ускореніями и вліяніемъ точекъ.

Отдѣломъ механики называется *Кинематикою* — въ отношеніи къ размерамъ — соотношенія между скоростями и временимъ. Называя этотъ отдѣлъ механики, который разсматриваетъ вѣща не какъ пріемы естественными называется *Кинематикою*.

Въ началѣ отбросимъ скорѣе различныя формулы и замѣть въ началѣ мы не приравниваемъ задачи прочее механика къ задачамъ въ началѣ отбрасываетъ безразличныя задачи и изъясняетъ теорію, въ которую мы не можемъ вступить, следовательно, въ началѣ отбрасываетъ что мы не можемъ различія съ механикою, которую при помощи скоростей, дойдя до конца и началъ. Поэтому мы не будемъ съ удовольствіемъ на приложеніе Анализа къ механикѣ.

Отдѣломъ механики называется кинематика, которая больше приложенія кинематики и кинематики въ теоремахъ часто встречающимися и въ началѣ отбрасываетъ механику, которую приложенія Анализа къ механикѣ о приложеніи.

Съ этимъ замѣчаніемъ, мы должны замѣтить, что въ началѣ отбрасываетъ

ГЛАВА III.

Теорія притяженія.

Ньюто́нiанское притяженіе.

§ 411. Изъ оной вытекаетъ, что криволинейныя дуги и дѣльницы сферъ имѣютъ величину дуги дѣльницы къ собою. Оказалось, что и многія другія величины объѣма къ себѣ взаимнымъ притяженіемъ частицъ матеріи по закону силы мандрельныхъ точки притягиваются взаимно съ силою обратно пропорциональною квадрату или кубу взаимнаго разстоянія и прямо пропорциональною ихъ массамъ. Такъ что если имѣемъ чрезъ m и m' массы двухъ дѣльцъ и чрезъ r ихъ разстояніе, то результирующая притягивающая сила между ними будетъ $\frac{mm'}{r^2}$ или прямо пропорциональна

$$\frac{mm'}{r^2} \quad (856)$$

гдѣ r есть истинное разстояніе, а r' проекція на ось z .

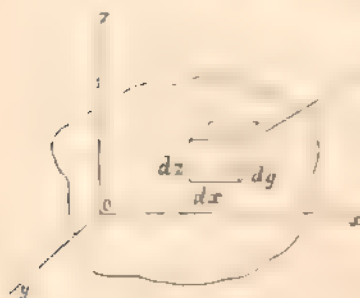
Теорія притяженія дѣльцъ, или притяженія сферъ, и сферическаго шара къ шара, имѣетъ разнѣе отъ сферическаго шара.

Въ механикѣ разстояніе между двумя сферами считается по прямой линіи, соединяющей центры ихъ, разстояніе же между двумя дѣльцами считается по прямой линіи. Но въ физикѣ притяженіе между сферами считается по прямой линіи, соединяющей центры ихъ, притяженіе же между дѣльцами считается по прямой линіи, соединяющей центры ихъ. Притяженія эти называются ньютоновскими.

Проложенія притяженія на оси координатъ

§ 412. Обозначимъ чрезъ m массу q нѣкотораго шара, расположеннаго

чрезъ q притяженіе, оказываемое единицею массы на единицу массы на единицъ разстоянія; обозначимъ чрезъ D плотность притягивающаго тѣла. Тогда масса безконечно малаго объема $dx dy dz$, составляющаго часть притягивающаго тѣла, будетъ $D dx dy dz$. Пусть a, b, c будутъ координаты притягиваемой точки (фиг. 282). Притяженіе,



Фиг. 282

оказываемое сферою q на единицу массы m будетъ равно

$$q D m dx dy dz$$

$$\frac{q D m}{r^2} dx dy dz$$

(857)

где x, y, z суть координаты точки m в начале координат берёмых три измерения $dx dy dz$ от m (§ 8). Назовём r радиус-вектор точки m от элемента $dx dy dz$, такъ что:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \dots (858)$$

Косинусы угловъ, составляемыхъ этимъ радиусомъ съ осями координатъ, суть:

$$\frac{x-a}{r}; \frac{y-b}{r}; \frac{z-c}{r} \dots (859)$$

Изъ формулы (857) берёмъ следующие три измерения X, Y, Z на единичный элементъ $dx dy dz$ приписывая точку m :

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{qDm dx dy dz \cdot (x-a)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}} \\ Y &= \frac{qDm dx dy dz \cdot (y-b)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}} \\ Z &= \frac{qDm dx dy dz \cdot (z-c)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}} \end{aligned} \right\} \dots (860)$$

Чтобы получить значения A, B, C берёмъ элементъ m и соединяемъ его съ элементомъ m' лежащимъ на дугѣ m во всемъ D . Тогда можно суммировать все дуги m отъ элемента m во всемъ элементомъ m' такъ что получимъ интегралъ въ границахъ m и m' по элементу D (860), да въ элементъ m интегрируя по всемъ элементамъ m' во всемъ D .

$$\left. \begin{aligned} A &= \int \int \int \frac{qDm (x-a)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}} dx dy dz \\ B &= \int \int \int \frac{qDm (y-b)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}} dx dy dz \\ C &= \int \int \int \frac{qDm (z-c)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}} dx dy dz \end{aligned} \right\} \dots (861)$$

Если отношение D положить постояннымъ и то одинъ членъ qDm можно вынести за знакъ интеграловъ ладно радиусу r и интегрируя вычтемъ qD весьма просто. Выходитъ на первый взглядъ A изъ (861)

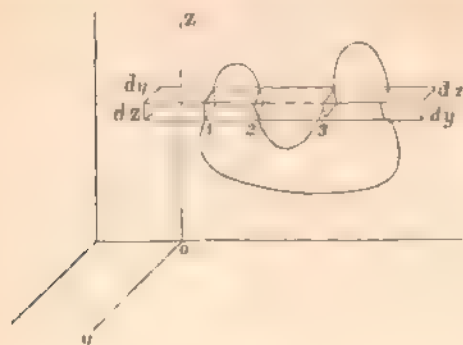
$$A = qDm \int \int \int \frac{(x-a) dx dy dz}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

Извѣстно, что:

$$\int \frac{(x-a) dx}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = \frac{1}{(y-b)^2 + (z-c)^2} \dots$$

Представимъ это одной стѣнкой z такъ, какъ это имѣетъ въ виду, тогда получимъ формулу A (§ 861), такъ что радиус-векторъ r имѣетъ

ний ось z вале dz и высоту параллельную оси x . Вырѣзываетъ и вершность приравненнаго для удобства рѣзъ въ этомъ мѣстѣ 1, 2, 3, 4, 5, 6. Обозначимъ расстояния этихъ поверхностей тѣмъ же мѣстѣ въ ось притяженіе



Фиг. 293

ваемой точки чрезъ $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$. Часть интеграла, относящаяся къ этому параллелепипеду, будетъ:

$$dy dz \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} - \frac{1}{r_6} \right) \quad (863)$$

Обозначая чрезъ $ds', ds_2, ds_3, ds_4, ds_5, ds_6$ вырѣзываемые параллелепипедомъ элементы поверхности притягивающаго тѣла,

чрезъ N_1, N_2, \dots нормали къ этимъ элементамъ и чрезъ $(N_1, x), (N_2, x), \dots$ сопряженные *внѣшние* углы между нормалію съ осью x получимъ для величины (863) выраженіе:

$$\frac{dz}{r} \cos(N_1, x) - \frac{dz}{r_1} \cos(N_2, x) + \frac{dz}{r_2} \cos(N_3, x) - \frac{dz}{r_3} \cos(N_4, x) + \frac{dz}{r_4} \cos(N_5, x) - \frac{dz}{r_5} \cos(N_6, x)$$

Вслѣдствіе этого получимъ:

$$A = qDm \int \int \frac{dz \cos(N, x)}{r} \quad (864)$$

Гдѣ z есть расстояние отъ z отъ поверхности притягивающаго тѣла отъ притягиваемой точки, dz элементъ поверхности притягивающаго тѣла.

Такия же формулы получимъ для B и C . Инакъ получимъ:

$$\left. \begin{aligned} A &= -qDm \int \int \frac{d\sigma \cos(N, x)}{r} \\ B &= qDm \int \int \frac{dz \cos(N, y)}{r} \\ C &= -qDm \int \int \frac{d\sigma \cos(N, z)}{r} \end{aligned} \right\} \quad (865)$$

Притяженіе, оказываемое шаромъ на внѣшнюю точку.

§ 413. Приведемъ выведенныя формулы къ опредѣленію притяженія оказываемого сферическимъ шаромъ, имѣющимъ радиусъ R въ точку m , находящуюся въ расстоянии x отъ центра шара (фиг. 294)

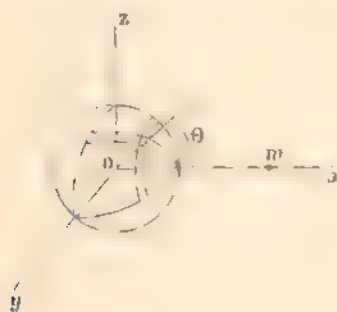
Примем прямую, соединяющую центр шара с точкою m , за ось x . Центр шара примем за начало координат. Очевидно, что в этом случае $B = 0$, $C = 0$ и остается определить A по формуле

$$A = qDm \int \int \frac{ds \cdot \cos(N, x)}{r^2}, \quad (866)$$

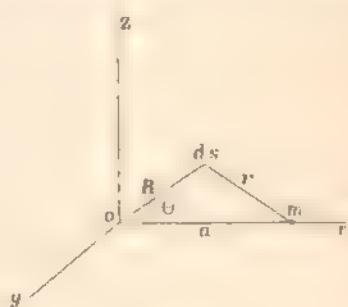
где r есть расстояние элемента ds поверхности шара от точки m .

Примем ось x за полярную ось (фиг. 284).

За элемент ds поверхности шара можно принять весьма малый элемент, ограниченный двумя соседними меридианами и двумя соседними параллелями. Назовем θ угол, соответствующий радиусом проведенным в этот элемент с осью x . Обозначим чрез ψ долготу, приняв за нуль меридиан, по которому ось x . Одна сторона элемента ds будет дуга равная $Rd\theta$, другая его сторона будет дуга описания ра-



Фиг. 284.



Фиг. 285.

диуса $R \sin \theta$ параллели, она будет равна $R \sin \theta \cdot d\psi$. Площадь элемента примем за элементарную поверхность $Rd\theta \cdot R \sin \theta \cdot d\psi$, или

$$ds = R^2 \sin \theta d\theta d\psi \dots \dots \dots (867)$$

Не трудно видеть, что $\cos(N, x) = \cos \theta$.

Вставляя эти величины в (866), получаем

$$A = qDm \int \int R^2 \sin \theta d\theta d\psi \cdot \cos \theta \dots \dots (868)$$

Интеграция по θ должна быть произведена в пределах от 0 до π , интеграция по ψ только будет произведена в пределах от 0 до 2π . Так вся поверхность сферы будет охвачена интегрированием. Заметим, что из (фиг. 285) следует:

$$r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta} \dots \dots \dots (869)$$

Вставив эту величину въ (868), получимъ,

$$\begin{aligned}
 A &= qDm R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta \, d\theta \, d\psi}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta}} \cdot aR \cos \theta \\
 &= 2\pi qDm R \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta}} \quad \dots \quad (870)
 \end{aligned}$$

Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta}} &= \frac{\cos \theta}{aR} \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta} \\
 &+ \frac{1}{aR} \int \sin \theta \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta} \, d\theta \\
 &= \frac{\cos \theta}{aR} \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta} + \frac{1}{a^2 R} (a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)^{\frac{3}{2}}.
 \end{aligned}$$

Слѣдовательно:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\pi} \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta}} \\
 &\left[\frac{\cos \theta}{aR} \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta} + \frac{1}{a^2 R} (a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{(a + R)^{\frac{3}{2}} - (a - R)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 R^2} + \frac{(a - R)}{aR} - \frac{(a + R)}{3a^2 R^2} - \frac{2R}{3a^2} \quad \dots \quad (871)
 \end{aligned}$$

Поэтому (870) даетъ:

$$A = - \frac{2\pi qDm R^2}{a^2} \frac{2R}{3} = - \frac{4\pi R^3}{3} \frac{qDm}{a} \quad \dots \quad (872)$$

Замѣтимъ, что если $\frac{3}{4} > R$, D есть масса притягивающаго шара, назовемъ ее M , тогда:

$$A = - \frac{q \cdot Mm}{a^2} \quad \dots \quad (873)$$

Сравнивая эту формулу съ (856) и принимая въ виду, что a есть расстояние притягиваемой точки отъ центра шара, заключаемъ, что шаръ притягиваетъ висящую точку такъ, какъ будто вся масса была сосредоточена въ центрѣ.

Притяженіе шаромъ внутренней точки.

§ 414. Если притягиваемая точка лежитъ внутри шара (фиг. 289) и $a < R$, но разделивъ $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta}$ въ силу свѣдѣній потондирольнымъ (Значитъ въ первомъ случаѣ), при $\theta = 0$, мы должны получить $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos 0} = R - a$, но въ $a < R$, такъ въ предѣлѣ,

Полный объем (871) представляется в следующем виде:

$$\int_0^\pi \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta} \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta$$

$$\left[\frac{\cos \theta}{aR} \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta} + \frac{1}{3aR} (a + R - 2aR \cos \theta)^{\frac{3}{2}} \right]_0^\pi$$

$$= -\frac{(a + R)}{aR} + \frac{(a + R)^3}{3a^2 R^2} - \frac{(R - a)}{aR} + \frac{(R - a)^3}{2a^2 R^2} = \frac{2a}{3R^2}.$$

Итак мы имеем для объема шара:

$$A = \frac{4}{3} \pi q D m R = \frac{4}{3} \pi q D m a^3.$$

Итак, для внутренней точки:

$$A = \frac{4}{3} \pi q D m a^3 \quad (874)$$

Представим себе шар m внутренней сферой радиуса a , который будет равен a . Объем этой сферической оболочки $\frac{4}{3} \pi a^3$ при плотности D масса ее $M = \frac{4}{3} \pi a^3 D$. И так как $M = M'$ то из (874) можно написать так:

$$A = \frac{4}{3} \pi \frac{a^3 D q m}{a^3} = \frac{M' m q}{a^2}.$$

Итак:

$$A = \frac{q M' m}{a^2} \quad (875)$$



Фиг. 286

Сравнивая это выражение с (873) заключаем, что *притяжение внутренней точки таково, как бы она принадлежала к центру концентрической сферической оболочки, которая окружена приращением массы сферической оболочки (фиг. 286) и есть, как бы ни была центром, была сосредоточенная масса сферической шара*.

Притяжение точки, лежащей внутри сферического слоя, этим слоем.

§ 415. Теперь легко представить себе, как в слое m , заключенном между двумя концентрическими сферами, притягивать к себе внутреннюю точку (фиг. 287). На сферу R_2 радиуса r внутренней сферы R_1 радиуса r_1 внутренней сферы. Приложим к данному слою m на расстоянии r от центра сферическую оболочку получаемой из внешнего приращения сферическую оболочку R_2 радиуса r_2 и внутреннюю оболочку R_1 радиуса r_1 , но, по предыдущему параграфу, она приложена к данной точке m с силой, как если бы она была равно притягивала к данной точке сферическую оболочку радиуса r с сосредоточенной массой m в центре. Если



Фиг. 287

уменьшаемое и вычитаемое равны между собою, до разности равно нулю. Итак: *сферический слой не притягивает никакую точку*

Потенціалъ.

§ 416. Рассмотрим выражение:

$$V = \iiint \frac{D \, dx \, dy \, dz}{r}$$

$$= \iiint \frac{D \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \dots \dots \dots (876)$$

гдѣ r есть расстояние притягиваемой точки (a, b, c) отъ элемента (x, y, z) притягивающаго тѣла. Это три интеграла равны суммѣ бесчисленнаго числа членовъ $\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} + \dots$ гдѣ m_1, m_2, m_3, \dots суть массы точекъ притягивающаго тѣла. Итакъ:

$$V = \iiint \frac{dm}{r} \dots \dots \dots (877)$$

Прямые интегралы (876) не зависятъ отъ (a, b, c) по тому мы продифференцируемъ этотъ интегралъ по a, b, c , дифференцируя выраженіе $\frac{1}{r}$ тотъ же самый интегралъ. И получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{da} &= \iiint \frac{D(x-a) \, dx \, dy \, dz}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}} \\ \frac{dV}{db} &= \iiint \frac{D(y-b) \, dx \, dy \, dz}{(x-a) + (y-b) + (z-c)} \\ \frac{dV}{dc} &= \iiint \frac{D(z-c) \, dx \, dy \, dz}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (878)$$

Положимъ въ (864) $q \approx 1$, что всегда мы можемъ сдѣлать, если ли по единицу силы притяженія, оказываемые единицею массы въ другія единицы массы, расположенныя отъ верной единицы, разстояніе равно единице (878) съ (864). Изъ этихъ сравненій видно, что, если масса притягиваемой точки $m = 1$, то:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a} &= A \\ \frac{\partial V}{\partial b} &= B \\ \frac{\partial V}{\partial c} &= C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (879)$$

Эти уравненія показываютъ, что силы притяженія, оказываемыя точками притягивающаго тѣла на точку m , имѣютъ и потенциалъ V который

равенъ выраженъ (876), если масса притягиваемой точки равна 1, если же масса ея m , то потенциалъ V' равенъ Γm .

Уравненіе Лавласа.

§ 417. Мы знаемъ, что:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Вычисляемъ:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{-x-a}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}}.$$

Для остальныхъ формулъ $\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{-y-b}{r^3}$ получимъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{-(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{5/2}}, \\ &= \frac{(x-a) + (y-b)^2 + (z-c)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{5/2}}. \end{aligned}$$

Точно также получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{-(y-b)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{3/2}}, \\ \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{5/2}}. \end{aligned}$$

Складывая эти вторыя производныя получимъ:

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \dots \dots \dots (880)$$

Но по (877):

$$\Gamma = \iiint \frac{dm}{r}.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial c^2} = \iiint dm \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = 0.$$

Итакъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = 0 \dots \dots \dots (881)$$

Эт уравнение съ частными производными 2-го порядка есть знаменитое уравненіе Лапласа). Оказывается, что потенциалъ въѣзшей точки удовлетворяеть уравненію Лапласа.

Уравненіе Пуассона.

§ 418. Для случая внутренней выѣзшей точки уравненіе, которому удовлетворяеть потенциалъ V имѣеть другой видъ. Выведемъ его. Принимая $q = 1$, получимъ изъ (874) для внутренней точки, принадлежащей шаромъ:

$$A = -\frac{4}{3} \pi Dmu$$

Но друго видѣть, что это величина есть производная отъ функции,

$$\frac{2}{3} \pi Dmu^3 + c_1 \dots \dots \dots (882)$$

т.е. c_1 есть произвольное постоянное интегрирания. Чтобы опредѣлить это произвольное постоянное шара, который имѣется въ его центрі. Общій формула (877) потенциала такова:

$$\int \int \int \frac{dm}{r}, \dots \dots \dots (883)$$

Здесь тройныя интегралы показываютъ, что надо взять одну элементарную массу dm и распространять ее на весь объемъ шара. Но, вѣдѣтъ этого можно взять объемъ dV , сгруппированный между сферою радиуса r и сферою радиуса $r + dr$, тогда объемъ будетъ равенъ:

$$4 \pi r^2 dr;$$

масса его будетъ:

$$4 \pi r^2 Ddr$$

Интеграль (883) равенъ интегралу

$$\int_0^R \frac{4 \pi r^2 Ddr}{r}, \dots \dots \dots (884)$$

взному же предѣлахъ отъ 0 до R при суммированіи всѣхъ элементарныхъ массъ, составляющихъ сферу радиуса R

Внося въ (884) постоянныя величины за знакъ интеграла, получимъ

* Laplace знаменитый французскій математикъ, написавши Невесную механику Mécanique celeste и установивши гипотезу о происхожденіи мира изъ однообразнаго вещества, распавшагося на отдѣльныя свѣтила и планеты.

для потенциала въ центръ величину:

$$4 \pi D \int_0^h \frac{r^2 dr}{r}$$

Этот потенциал действует на массу равную 1, находящуюся въ центръ, если же въ центръ находится масса m то потенциалъ действия, оказываемого на нее сферою, будетъ:

$$4 \pi Dm \int_0^h r^2 dr = 4 \pi Dm \int_0^h r dr = 2 \pi m D R^2 \quad (885)$$

Мы видели въ (882), что потенциалъ сферы для внутренней точки (a, b, c) равенъ:

$$= \frac{2}{3} \pi Dma^2 + c_1 \dots \dots \dots (886)$$

Теперь изъ (885) мы знаемъ, что въ центръ, следовательно при $a^2 + b^2 + c^2$ равномъ нулю, (886) обращается въ $2 \pi m D R^2$. Значитъ

$$c_1 = 2 \pi m D R^2$$

и потенциалъ (886) равенъ:

$$V_1 = \frac{2}{3} \pi Dma^2 + 2 \pi m D R^2,$$

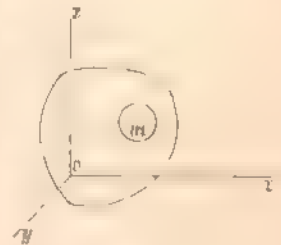
или,

$$M^1 = Dm \left(2 \pi R^2 - \frac{2}{3} \pi a^2 \right) \dots \dots \dots (887)$$

Теперь сравнимъ къ послѣдней V_1 какъ бы то ни было сила, связанной въ приращеніи, отъ той или точки находящейся внутри тѣла.

Для этого окружимъ приращиваемую точку m (фиг. 288) весьма малую сферою радиуса r имѣющую центръ въ приращиваемой точкѣ. Разобъемъ весь потенциалъ V приращенія, оказываемаго на точку m тѣломъ на два, V_2 , относящійся къ приращенію точки m массой, заключенною въ описанной около m маленкой сферѣ радиуса r и V_1 относящійся къ приращенію точки m отъ остальной части тѣла, такъ что:

$$V = V_1 + V_2 \dots \dots \dots (888)$$



Фиг. 288.

По отношению къ оставшей части тѣла точка m находится, следовательно къ потенциалу M_1 приложима формула (881), т.е. что:

$$\frac{d^2 V_1}{da^2} + \frac{d^2 V_1}{db^2} + \frac{d^2 V_1}{dc^2} = 0 \dots \dots \dots (889)$$

Къ потенциалу же V_2 можно было бы приложить формулу (887), въ ко-

теорей надо только заменить a^2 чрез $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$; такъ что:

$$\Gamma_2 = D \left[\frac{2}{3} \pi \rho \left(\frac{2}{3} \pi \rho \left[(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \right] \right) \right] \quad (890)$$

Вычисляемъ

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial a} = -\frac{4}{3} \pi (x - a) D; \quad \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial a^2} = \frac{4}{3} \pi D$$

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b} = -\frac{4}{3} \pi (y - b) D; \quad \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial b^2} = \frac{4}{3} \pi D$$

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial c} = -\frac{4}{3} \pi (z - c) D; \quad \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial c^2} = \frac{4}{3} \pi D$$

Сложивъ вторыя производныя, получимъ:

$$\frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial c^2} = 4 \pi D$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ (888) и (889) показываетъ, что

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial c^2} = -4 \pi D \quad (891)$$

Это уравненіе (891) есть эллипсоидальное уравненіе Пуассона.

Основныя свойства потенціала.

§ 419. Какъ бы ни была своя масса, масса m въ Ньютоновскомъ приращеніи оказывается приращиваемымъ тѣломъ на точку, заключающую въ себѣ всю массу M тѣла и удовлетворять уравненію (881). Тѣла же если приращиваемая точка находится въ приращиваемомъ тѣлѣ, и уравненію (884). Нуль если приращиваемая точка находится внѣ приращивающаго тѣла.

Эти два уравненія играютъ чрезвычайное важное рольъ въ началѣ отдѣлахъ математики, механики и физики.

Замѣтимъ, что излагаемая теорія приращенія относится ко всякому числу и всякому приращенію, следовательно, не только ко взаимному приращенію массъ, но и къ электричеству.

Сила въ данной точкѣ.

§ 420. Теорія о силѣ, которую вытѣкаетъ изъ приращенія массы, можетъ называться *теоріей о силѣ, данной точкѣ*, развѣ дѣйствующая въ ней сила приращенія, оказываемыхъ другими массами и дѣйствующихъ въ единицу массы перемѣненную въ единицу времени. Въ сущности эта дѣйствующая сила и сила дающая приращенію имѣютъ опредѣленную величину и направленіе

* Нуль если $P = 0$ — знаменитый французскій геометръ.

Силовые линии.

§ 421 *Силовой линией* называется линия, проведенная таким образом, что ее до всякой точки касательная совпадает с равнодействующей сил, действующих на эту точку. В случае притяжения бесконечно малым телом, силовые линии легко построить, полагая в малых размерах и прибавляя ее желанными силами. Эти линии представляют в плоскостях плоскости.

Поверхности уровня.

§ 422. Геометрическое место точек, в которых сосредоточить силы притяжения означено, и является *поверхностью уровня*. *Радиус-вектор* притяжения в каждой точке поверхности уровня нормален к этой поверхности. Для двучленного уравнения поверхности уровня, в силу явного определения ее, таково:

$$V = const$$

И следовательно касательная нормальна к поверхности (892) с тремя координатами, имеют такие косинусы.

$$\cos(N, x) = \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{X}{P}$$

$$\cos(N, y) = \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{Y}{P}$$

$$\cos(N, z) = \frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{Z}{P}$$

т. е. P есть равнодействующая притяжения в каждой точке, X , Y , Z ее продолжения на ось координат. Но:

$$\frac{X}{P} = \cos(N, x) \quad \frac{Y}{P} = \cos(N, y) \quad \frac{Z}{P} = \cos(N, z)$$

Следовательно P и N составляют единичный вектор, а так как они проходят через одну и ту же данную точку, то следовательно совпадают, что и требовалось доказать.

Случай одной притягивающей точки.

§ 423. Поверхности уровня в случае единственной точки — одна сферическая поверхность m — сфера, имеющая центр в притягивающей

точке потому что $\frac{m}{r^2}$ — сила, и для одной сходящейся точки есть $\frac{m}{r}$, так что Архимедовы вершины — равны.

$$r = \frac{m}{\rho} = \text{const.}$$

или

$$r = \frac{m}{\rho} = \text{const.}$$

Из этого const. вытекает, что для сферы $\{S\}$ сила очевидно не зависит от радиуса сферы, которая — следовательно — нормальна к таким сферам.

Силовые трубки.

§ 424. Если вообразить себе элемент поверхности уравн. $z = z(x, y)$ либо линией (фиг. 289) и проведем чрез все точки контура этого элемента ds силовые линии, то они составят *силовую* трубку.

Силовой поток.

§ 425. Если P — сила, действующая, равномерно и законно на элемент ds поверхности S , то вытекает

$$P ds \cdot \cos(P, N)$$

для ds на поверхности S силу $P \cos(P, N)$ прилагается к элементу ds *силовой* потока, проходящего чрез элемент ds .

Сумма всех $P \cos(P, N) ds$ — это *силовой* поток, проходящий чрез поверхность S . Если S — поверхность, то *силовой* поток, проходящий чрез поверхность S — это *силовой* поток, проходящий чрез поверхность S .

$$\int \int P \cos(P, N) dS$$

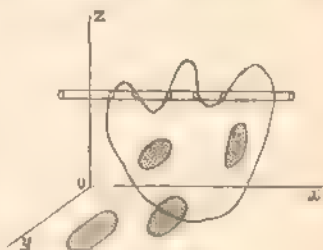
Теорема Гаусса.

§ 426. Если S — поверхность, то *силовой* поток, проходящий чрез поверхность S — это *силовой* поток, проходящий чрез поверхность S . Если S — поверхность, то *силовой* поток, проходящий чрез поверхность S — это *силовой* поток, проходящий чрез поверхность S .

Разсмотримъ тройной интегралъ:

$$\iiint \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) dx dy dz, \dots (893)$$

распространенный на весь объемъ, обнимаемый поверхностью ABC . Нѣкоторыя точки этого объема будутъ принадлежать притягивающимъ тѣламъ, другія будутъ находиться внѣ притягивающихъ тѣлъ; прилагая къ первымъ уравненіе Пуассона (891), а ко вторымъ уравненіе Лапласа (881), и замѣчая, что $dx dy dz$ есть элементъ объема, заключеннаго въ ABC и что масса равна произведенію плотности на объемъ, выводимъ заключеніе, что интегралъ (893) равенъ величинѣ — $4\pi M$, такъ что:



Фиг. 280.

$$4\pi M = \iiint \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx dy dz, \dots (894)$$

гдѣ M есть масса всѣхъ притягивающихъ частей, находящихся внутри поверхности ABC .

Разсмотримъ наиболѣе сложный случай, когда поверхность ABC' такова, что прямая параллельная оси x пересѣкаетъ ее въ нѣсколькихъ точкахъ, наиримѣръ въ точкахъ 1, 2, 3, 4. Тогда)

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx dy dz &= \iint dy dz \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_4 - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_3 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_1 \right], \dots (895) \end{aligned}$$

Назовемъ элементы поверхности ABC' , истрѣбимые упомянутою прямою въ точкахъ 1, 2, 3, 4 чрезъ $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma_4$; проложеніе ихъ на плоскость (y, z) будетъ $dy dz$. Поэтому:

$$\begin{aligned} dy dz &= d\sigma_1 \cos(N_1, x) = + d\sigma_2 \cos(N_2, x) - d\sigma_3 \cos(N_3, x) \\ &= d\sigma_4 \cos(N_4, x) \dots (896) \end{aligned}$$

гдѣ N_1, N_2, N_3, N_4 суть нормали въ точкахъ 1, 2, 3, 4, проведенныя къ поверхности ABC . Благодаря (896) получимъ изъ (895):

$$\iiint \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx dy dz = \int d\sigma \cos(N, x) \frac{\partial V}{\partial x};$$

* Если бы прямая параллельная оси x пересѣкала ABC только въ двухъ точкахъ, то (895) заключало бы только производныя $\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_2 - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_1$ и вычисленіе было бы еще проще, но съ тѣмъ же результатомъ.

точно также:

$$\int \int \int \frac{\partial V}{\partial y} dx dy dz = \int d\sigma \cdot \cos(N, y) \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\int \int \int \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dx dy dz = \int d\sigma \cdot \cos(N, z) \frac{\partial V}{\partial z}$$

Поэтому, получимъ:

$$\int \int \int \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx dy dz =$$

$$= \int d\sigma \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) \right] \dots (897)$$

Но, какъ извѣстно:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X = P \cos(P, x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y = P \cos(P, y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = Z = P \cos(P, z)$$

Слѣдовательно изъ (897) имѣемъ:

$$\int \int \int \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx dy dz =$$

$$= \int d\sigma [\cos(P, x) \cdot \cos(N, x) + \cos(P, y) \cdot \cos(N, y) + \cos(P, z) \cos(N, z)] P$$

или по (130):

$$\int \int \int \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx dy dz =$$

$$= \int P \cos(P, N) d\sigma = \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$$

Пользуясь формулою (894) получимъ наконецъ:

$$\int P \cdot \cos(P, N) d\sigma = \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 4 \pi M \dots (898)$$

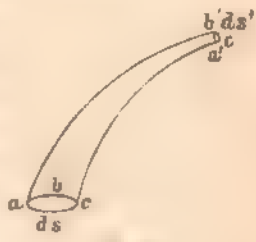
Но $\int P \cdot \cos(P, N) d\sigma$ и есть силовой потокъ, проходящий чрезъ ABC . Слѣдовательно уравнение (898) и доказываетъ теорему Гаусса.

Эта теорема играетъ весьма важную роль въ ученіи объ электричествѣ.

Свойства силовыхъ трубокъ.

§ 427. Приложимъ теорему Гаусса къ выводу весьма замѣчательныхъ свойствъ силовыхъ трубокъ.

Разсмотримъ часть силовой трубки (фиг. 291) ограниченную двумя основаніями abc , $a'b'c'$ представляющими какія бы то ни было поверхности. Обозначимъ площади этихъ основаній (полагая, что трубка очень тонка) чрезъ ds и ds' . Приложимъ къ объему, заключенному въ такомъ отрѣзкѣ силовой трубки, теорему Гаусса. По этой теоремѣ полный потокъ, проходящій чрезъ поверхности такого отрѣзка, равенъ нулю, если внутри отрѣзка не заключено никакихъ притягивающихъ массъ. Но потокъ, проходящій чрезъ боковую (трубчатую) поверхность отрѣзка, равенъ нулю, такъ какъ нормальная составляющая притяженія въ каждой точкѣ боковой поверхности равна нулю по самому опредѣленію силовой трубки и силовыхъ линий. Слѣдательно и сумма потоковъ, проходящихъ чрезъ оба основанія ds и ds' , равна нулю. Поэтому потоки, проходящіе чрезъ каждое изъ основаній, должны быть равны и противоположны, если отрѣзокъ не содержитъ притягивающихъ массъ. Равны и противоположны мы говоримъ въ томъ смыслѣ, что, если одинъ изъ нихъ направленъ по внутренней нормали одного основанія, то другой направленъ по внешней нормали другого основанія.



Фиг. 291

Отсюда вытекаетъ:

Свойство 1-ое. Чрезъ все поперечныя сѣченія одной и той же силовой трубки проходитъ одинъ и тотъ же силовой потокъ (все потоки проходящія чрезъ эти сѣченія равны между собою).

Это свойство можетъ быть выражено уравненіемъ,

$$Pds = P'ds', \dots \dots \dots (899)$$

если поперечныя сѣченія нормальны. Уравненіе же (899) выражаетъ собою: *Свойство 2-ое.* Въ каждомъ сѣченіи трубки сила обратно пропорціональна площади сѣченія.

Теорема Остроградскаго.

§ 428 Мы видѣли въ § 425-омъ., что силовой потокъ выражается формулою:

$$\iint P \cdot \cos(P, N) ds \dots \dots \dots (900)$$

Эта величина и вообще понятие о силовомъ потокѣ играетъ большую роль въ теоріи притяженія и электричества, а также и во многихъ другихъ отдѣлахъ физики. Остроградскій далъ замѣчательную формулу, по которой двойной интегралъ (900), выражающій силовой потокъ и распространенный на замкнутую поверхность, можетъ быть преобразованъ въ

* Остроградскій — знаменитый русскій математикъ

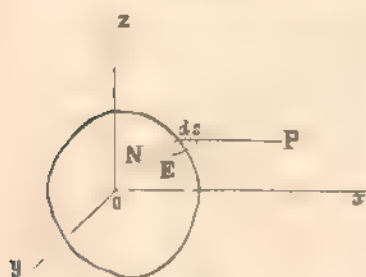
тройной интегралъ, распространенный на объемъ, ограниченный этою поверхностью. Эта формула Остроградскаго имѣетъ чрезвычайно важное значение: она, такъ сказать, даетъ возможность узнать, что дѣлается въ объемѣ, по тому, что происходитъ на поверхности его ограничивающей. Эта формула, равно какъ и болѣе общая формула Грива, которую мы выведемъ впоследствии, имѣютъ обширное приложение въ теоріи притяженія, въ учени объ электричествѣ, въ учени о движеніи жидкостей и проч. Выведемъ формулу Остроградскаго).

Условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ.

ds элементъ поверхности s

ε уголъ, составленный прямолинейнымъ отрѣзкомъ (векторомъ) P , проведеннымъ изъ какой нибудь точки поверхности s , съ внутреннею нормалью N .

X, Y, Z продолженія вектора P на оси.



Фиг. 292

$\int \int P \cdot \cos (\angle P, N) ds$ называется *поверхностнымъ интеграломъ*. Онъ представляетъ собою *силовой потокъ*, если векторъ P представляетъ собою силу. Но векторъ P можетъ представлять собою скорость, ускореніе или какую нибудь другую величину, съ собою изображаясь прямолинейнымъ отрѣзкомъ. Формула Остроградскаго относится ко всякому поверхностному интегралу, а

не только къ силовому потоку. Положимъ еще, что l, m, n суть косинусы угловъ наклоенія нормали N къ осямъ координатъ (фиг. 292) По (130) имѣемъ:

$$\cos \varepsilon = \frac{X}{P} \cdot l + \frac{Y}{P} m + \frac{Z}{P} n$$

Слѣдовательно:

$$\int \int P \cos (\angle N, P) ds = \int \int P \cos \varepsilon \cdot ds$$

$$= \int \int X l ds + \int \int Y m ds + \int \int Z n ds \dots (901)$$

Очевидно, что $dy dz$ есть продолженіе элемента ds на плоскость (y, z) , и такъ далѣе, такъ что:

$$dy dz = ds \cdot l; dz dx = ds \cdot m; dx dy = ds \cdot n.$$

* Записки С.-Петербур. Импер. Акад. Наукъ т. I, стр. 39 (1828 г.,)

Поэтому:

$$\begin{aligned} \iint P \cos(N, P) ds &= \iint X dy dz \\ &+ \iint Y dz dx + \iint Z dx dy. \dots \dots (902) \end{aligned}$$

Обозначимъ чрезъ 1, 2, 3, 4.. точки пересѣченія прямой параллельной оси x съ нашею поверхностью; тогда:

$$\iint X dy dz = \int \int (X_1 - X_2) + (X_3 - X_4) + \dots dy dz \dots (903)$$

Если X конечна и непрерывна внутри объема, ограниченного этою поверхностью, то, называя чрезъ k какое нибудь число, получимъ:

$$X_{k+1} - X_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial X}{\partial x} dx$$

Поэтому изъ (903) имѣемъ:

$$\iint X dy dz = \iiint \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz$$

Точно такъ же преобразуются и другіе двойные интегралы въ правой части (902). Поэтому (902) дастъ:

$$\iint P \cos(P, N) ds = \iiint \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right] dx dy dz \dots (904)$$

Это и есть формула Остроградскаго. Въ левой части \iint распространяется на всю поверхность, въ правой части \iiint распространяется на весь ограниченный ею объемъ.

Изъ формулы Остроградскаго весьма просто выводится и доказанная въ § 126-омъ теорема Гаусса. Действительно, если V есть потенциалъ, то изъ (904) получимъ:

$$\iint P \cos(P, N) ds = \iiint \left[\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx dy dz$$

Прилагая сюда уравненіе Лапласа (881) и Пуассона (891), получимъ формулу (898) Гаусса.

Теорема Грина.

§ 429. Необыкновенно много приложений въ различныхъ отдѣлахъ физики получила знаменитая теорема Грина. Она состоитъ въ слѣдующемъ. *Теорема:* Если имѣются двѣ функции U и V отъ x, y, z , которыя, равно какъ и изъ первыхъ производныя, конечны, однозначны и непрерывны внутри

нѣкотораго объема, то онѣ связаны слѣдующими тремя формулами.

$$\int \int \int U \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx dy dz = \int \int U ds \frac{\partial V}{\partial n}$$

$$\int \int \int \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right] dx dy dz \dots \dots \dots (I)$$

$$\int \int \int V \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] dx dy dz = \int \int V ds \frac{\partial U}{\partial n}$$

$$= \int \int \int \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right] dx dy dz \dots \dots \dots (II)$$

$$\int \int \int U \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx dy dz = \int \int U dz \frac{\partial V}{\partial n}$$

$$= \int \int \int V \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] dx dy dz = \int \int V ds \frac{\partial U}{\partial n} \dots \dots \dots (III)$$

Эти три равенства, изъ которыхъ III есть прямое слѣдствіе первыхъ двухъ, и составляютъ теорему Грина. Здѣсь $\int \int \int$ распространяются на данный объемъ, $\int \int$ распространяются на поверхность, ограничивающую этотъ объемъ; n откладывается по нормали.

Доказательство. Положимъ:

$$U \frac{\partial V}{\partial x} = X; U \frac{\partial V}{\partial y} = Y; U \frac{\partial V}{\partial z} = Z \dots \dots \dots (905)$$

Положимъ, что X, Y, Z суть проложенія на оси величины P, l, m, n косинусы угловъ, составляемыхъ внѣшней нормалью N съ осями координатъ; ϵ уголъ, составляемый P съ N , такъ что.

$$- P \cos \epsilon = Xl + Ym + Zn, \dots \dots \dots (906)$$

или, согласно съ (905):

$$- P \cos \epsilon = U \left[l \frac{\partial V}{\partial x} + m \frac{\partial V}{\partial y} + n \frac{\partial V}{\partial z} \right] = U \frac{\partial V}{\partial n} \dots \dots \dots (907)$$

Изъ (905), кромѣ того, имѣемъ:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = U \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \dots \dots \dots (908)$$

Вставляя величины (907) и (908) въ формулу (904) Остроградскаго, получимъ:

$$\int \int U \frac{\partial V}{\partial n} ds = \int \int \int U \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx dy dz + \int \int \int \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right] dx dy dz$$

или:

$$\int \int \int U \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx dy dz - \int \int U \frac{\partial V}{\partial n} ds = \int \int \int \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right] dx dy dz \dots (1)$$

Это и есть формула I теоремы Грина. Формула II выводится совершенно такъ же, полагая вмѣсто (905) такія равенства:

$$U \frac{\partial U'}{\partial x} = X; \quad V \frac{\partial U'}{\partial y} = Y; \quad V \frac{\partial U'}{\partial z} = Z;$$

формула III есть прямое слѣдствіе первыхъ двухъ.

ГЛАВА IV.

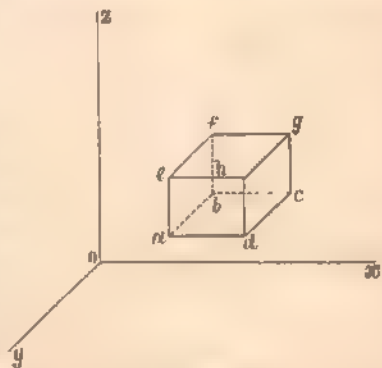
Гидростатика.

Опредѣленіе.

§ 430. Гидростатикою называется ученіе о равновѣсіи жидкости. Два весьма важныя закона гидростатики: законъ Паскаля и законъ Архимеда, извѣстны уже изъ физики, мы на нихъ останавливаться не будемъ, а выведемъ уравненія равновѣсія жидкости.

Уравненія равновѣсія жидкости.

§ 431. Рассмотримъ внутри жидкости ея весьма малый элементъ, имѣющій форму параллелепипеда, ограниченнаго гранями параллельными плоскостямъ координатъ (фиг. 293) и имѣющаго ребра dx , dy , dz . Разобьемъ всю жидкость на такіе элементы и рассмотримъ одинъ изъ нихъ. Положимъ, что равнодѣйствующая сила, дѣйствующиихъ на этотъ элементъ равна RdM , гдѣ dM есть масса элемента. Назовемъ



Фиг. 293.

через X, Y, Z , проложения ускорения H на оси координатъ и чрезъ ρ плотность жидкости. Объемъ элемента очевидно будетъ $dx dy dz$. Проложения силы RdM будутъ следовательно:

$$\rho X dx dy dz; \rho Y dx dy dz; \rho Z dx dy dz \dots \dots \dots (909)$$

Назовемъ p давленіе на 1-цу площади въ центрѣ элемента. Давленіе на 1-цу площади граней $aefb, bfgc, abcd$ будутъ:

$$p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}; \quad p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}; \quad p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}.$$

Давленія на цѣлыя площади этихъ граней будутъ:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz; \quad \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dz dx; \quad \left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \dots (910)$$

Давленія на прогнвуположныя грани будутъ:

$$\begin{aligned} & - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz, \quad \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dz dx, \\ & \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \dots \dots \dots (911) \end{aligned}$$

Для равновѣсія необходимо, чтобы суммы проложений силъ и давленія на оси координатъ были равны нулю. Пользуясь величинами (909), (910), (911), напишемъ это въ видѣ:

$$\rho X dx dy dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz = 0$$

$$\rho Y dx dy dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dz dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dz dx = 0$$

$$\rho Z dx dy dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy = 0$$

По приведеніи эти уравненія дадутъ:

$$\left. \begin{aligned} \rho X &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho Y &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho Z &= \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (912)$$

Таковы уравненія равновѣсія жидкаго элемента.

Давленія на стѣнкахъ сосудовъ должны быть нормальны къ нимъ. Давленія на свободной поверхности жидкости должно быть равно нулю.

Условія равновѣсія жидкости.

§ 432. Уравнения (912) приводятъ къ слѣдующимъ условіямъ равновѣсія жидкости.

Условіе 1-е. Для равновѣсія жидкости необходимо, чтобы выраженіе

$$\rho (X dx + Y dy + Z dz) \dots \dots \dots (913)$$

было полнымъ дифференціаломъ, то есть, чтобы существовала такая функція U , которая давала бы:

$$\rho (X dx + Y dy + Z dz) = dU \dots \dots \dots (914)$$

Дѣйствительно, изъ (912) слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dy} (\rho X) &= \frac{d}{dx} (\rho Y) \\ \frac{d}{dz} (\rho Y) &= \frac{d}{dy} (\rho Z) \\ \frac{d}{dx} (\rho Z) &= \frac{d}{dz} (\rho X) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (915)$$

а эти уравненія показываютъ, что ρX , ρY , ρZ суть частныя производныя отъ одной и той же функціи. Называя эту функцію потенциаломъ черезъ U , получимъ (914).

Условіе 2-е. Для равновѣсія жидкости необходимо, чтобы свободная поверхность определялась уравненіемъ

$$U + C = 0, \dots \dots \dots (916)$$

гдѣ C есть величина постоянная.

Дѣйствительно изъ (912) и (914) получимъ

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dU \dots \dots \dots (917)$$

откуда:

$$p = U + C \dots \dots \dots (918)$$

Но на свободной поверхности $p = 0$. Слѣдовательно на ней удовлетворяется условіе (916).

Условіе 3-е. Для равновѣсія жидкости необходимо, чтобы p было внутри жидкости положительнымъ.

Поверхности уровня.

§ 433. Поверхности равнаго потенциала, выражаемая уравненіями:

$$U = c \dots \dots \dots (919)$$

называются *поверхностями уровня* (см. § 422). Если $c = C$, то (919) обращается въ (916), слѣдовательно свободная поверхность жидкости есть одна изъ поверхностей уровня.

Элементы поверхностей уровня нормальны къ силамъ (см. § 422).

Шаръ есть одна изъ формъ равновѣсія свободной жидкости.

§ 434. Положимъ, что частицы жидкости оказываютъ одна на другую ньютоновское притяженіе и жидкость подвержена только этимъ взаимнымъ силамъ. Если такая жидкость имѣла форму шара, то она и сохранитъ эту форму.

Дѣйствительно, принимая центръ сферы за начало координатъ, заключаемъ по формулѣ (874), что:

$$\rho X = \frac{4\pi Dqm}{3} x; \quad \rho Y = \frac{4\pi Dqm}{3} y; \quad \rho Z = \frac{4\pi Dqm}{3} z.$$

Не трудно видѣть, что эти три величины суть частныя производныя одной величины:

$$- \frac{4\pi Dqm}{3 \cdot 2} (x^2 + y^2 + z^2) \dots \dots \dots (920)$$

Слѣдовательно первое условіе § 132-го удовлетворено, и

$$U = \frac{4\pi Dqm}{6} (x^2 + y^2 + z^2) \dots \dots \dots (921)$$

По (916) имѣемъ для свободной поверхности уравненіе:

$$\frac{4\pi Dqm}{6} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + C = 0, \dots \dots \dots (922)$$

гдѣ x_1, y_1, z_1 суть координаты точки свободной поверхности.

Если положить:

$$\frac{+6C}{4\pi Dqm} = R^2.$$

то

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \dots \dots \dots (923)$$

Итакъ, свободная поверхность остается сферою

(918) и (922) дадутъ:

$$p = U + C = U + \frac{4\pi Dqm}{6} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2).$$

Пользуясь уравненіемъ (921), находимъ:

$$p = \frac{4\pi Dqm}{6} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \frac{4\pi Dqm}{6} (x^2 + y^2 + z^2) \dots \dots (924)$$

Здѣсь x_1, y_1, z_1 суть координаты сферы; x, y, z точки лежащей внутри сферы. Слѣдовательно уравненіе (924) показываетъ, что p внутри жидкости положительно. Итакъ, все три условія равновѣсія оказались удовлетворенными. Слѣдовательно сфера есть одна изъ формъ равновѣсія свободной жидкости.

Г Л А В А V.

Г и д р о д и н а м и к а.

Уравненія гидродинамики.

§ 435. Гидродинамикой называется учение о движении жидкости.

Переходъ отъ уравненій равновѣсія жидкости къ уравненіямъ движенія совершается весьма просто при помощи начала Д'Аламбера (см. § 378): слѣдуетъ только выразить, что *потерянные* силы находятся въ равновѣсїи: для этого достаточно замѣнить въ уравненіяхъ (912) равновѣсія жидкости дѣйствительныя силы ρX ρY ρZ потерянными

$$\rho \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) : \rho \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) : \rho \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right).$$

Получимъ уравненія движенія жидкости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (925)$$

Однако въ этомъ видѣ нельзя пользоваться непосредственно этими уравненіями по слѣдующимъ причинамъ. Если мы будемъ слѣдить за какою-нибудь точкою жидкости, которая имѣла въ моментъ t_0 координаты x_0, y_0, z_0 , то вслѣдствіе движенія жидкости увидимъ, что въ другой моментъ t координаты той же точки жидкости будутъ уже другія, напри мѣръ x, y, z , потому что точка жидкости перемѣстится. Но и въ моментъ t_0 для разныхъ точекъ жидкости будутъ разные координаты x_0, y_0, z_0 . Въ уравненія (925) входятъ и координаты x_0, y_0, z_0 , и координаты x, y, z для разныхъ точекъ, и время t . Вообще необходимо различать точки жидкости, которыя движутся отъ точекъ пространства, чрезъ которыя онѣ проходятъ. Эйлеръ далъ такое преобразование уравненія (925), въ конечномъ выводѣ котораго получаются уравненія, содержащая только координаты x, y, z точекъ пространства, время t и скорости жидкости, существующія въ различныхъ точкахъ пространства въ моментъ t . Движеніе жидкости будетъ вполне определено, если будемъ знать въ каждый моментъ t , какия скорости имѣетъ жидкость въ различныхъ точкахъ пространства и какъ эти скорости направлены, а это будетъ извѣстно, если будемъ знать въ каждый моментъ t для каждой точки (x, y, z) пространства проложенія u, v, w скорости жидкой частицы, проходящей чрезъ (x, y, z) .

Совершимъ это преобразование. Имѣемъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt};$$

$$u = \frac{dx}{dt}; \quad v = \frac{dy}{dt}; \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Но u , v и w зависятъ отъ x , y , z . Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \end{aligned} \right\} \quad (926)$$

Подставляя эти величины въ (925), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} u - \frac{\partial u}{\partial y} v - \frac{\partial u}{\partial z} w \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} u - \frac{\partial v}{\partial y} v - \frac{\partial v}{\partial z} w \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} u - \frac{\partial w}{\partial y} v - \frac{\partial w}{\partial z} w \end{aligned} \right\} \quad (927)$$

Вотъ каковы уравненія Эйлера.

Уравненіе несжимаемости.

§ 436. Для опредѣленія движенія жидкости нужно къ уравненіямъ (927) присоединить еще условіе несжимаемости жидкости, если имѣемъ движеніе канальей жидкости. Выведемъ уравненіе, выражающее это условіе.

Вообразимъ себѣ внутри жидкости какую-нибудь замкнутую поверхность, заключающую въ себѣ опредѣленный объемъ жидкости. Если жидкость *несжимаема и сплошная*, то количество жидкости въ такомъ объемѣ будетъ одинаково, несмотря на движеніе: сколько въ него будетъ притекать жидкости, столько же ей будетъ выходить изъ этого объема. Обозначимъ чрезъ V скорость жидкости въ какой-нибудь точкѣ замкнутой поверхности, отлеченную отъ этой точки въ видѣ вектора; обозначимъ чрезъ ε уголъ, составляемый скоростью V съ нормалью. Тогда по теоремѣ (904) Остроградскаго имѣемъ:

$$\iint V \cos \varepsilon \cdot ds = - \iiint \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (928)$$

Величина $\iint V \cos \varepsilon \cdot ds$ представляетъ собою количество притекающей въ упомянутый объемъ жидкости. Это количество, какъ мы только что замѣтили, равно нулю. Оно равно нулю для всякой замкнутой поверхности, проведенной внутри жидкости — при всякихъ предѣлахъ интеграловъ.

Поэтому должна равняться нулю стоящая под \iiint правой части уравнения (925) величина $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$. Итак условие *несжимаемости* и *сплошности* жидкости таково:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (929)$$

Установившееся движение.

§ 437. *Установившимся* или *стационарным* движением жидкости называется такое ее движение, при котором во всех точках пространства, занимаемого жидкостью, скорости преходящих через них жидких частиц сохраняют свою величину и направление, давления и плотность сохраняют свою величину, так что:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \dots \dots \dots (930)$$

При таком движении все точки жидкости, проходящие через какую-нибудь точку пространства, движутся одна за другою по одной и той же траектории; каждая такая траектория называется *линией тока*.

Обозначим чрез V скорость жидкой точки, чрез x, y, z ее положения на оси координат. Будем определять положение точки на данной линии тока длиной дуги S проведенной точкою по этой линии от некоторой данной точки. Тогда

$$u = V \frac{dx}{ds}, \quad v = V \frac{dy}{ds}, \quad w = V \frac{dz}{ds} \dots \dots \dots (931)$$

такъ какъ $\frac{dx}{ds}; \frac{dy}{ds}; \frac{dz}{ds}$ суть косинусы угловъ наклоенія элемента ds линии тока къ осямъ координатъ. Положимъ, что дѣйствующія силы имѣютъ потенциалъ U . Замѣнимъ въ 1-мъ изъ уравненій (927) величины u, v, w ихъ значеніями изъ (931). Получимъ:

$$V \left[\frac{d \left(V \frac{\partial x}{\partial s} \right)}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{d \left(V \frac{\partial x}{\partial s} \right)}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{d \left(V \frac{\partial x}{\partial s} \right)}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right] = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

или:

$$V \frac{d \left(V \frac{\partial x}{\partial s} \right)}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x};$$

точно такъ же выводятся:

$$V \frac{d \left(V \frac{\partial y}{\partial s} \right)}{ds} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$V \frac{d \left(V \frac{\partial z}{\partial s} \right)}{ds} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Помноживъ эти уравненія, соответственно, на $\frac{dx}{ds} ds$; $\frac{dy}{ds} ds$; $\frac{dz}{ds} ds$, и сложивъ, получимъ:

$$d \left(\frac{V^2}{2} \right) = dU + \frac{dp}{\rho} \dots \dots \dots (932)$$

Интегрируя, получимъ:

$$\frac{V^2}{2} + U + \int \frac{dp}{\rho} = const.$$

Это выраженіе имѣетъ постоянную величину на *всей линіи тока* (для каждой линіи тока можетъ быть своя постоянная величина). Если жидкость однородна и несжимаема, то:

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$$

и уравненіе (932) обращается въ

$$\frac{V^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = C,$$

или:

$$p = \rho \left(C + U + \frac{V^2}{2} \right) \dots \dots \dots (933)$$

Теорема Бернулли.

§ 438. Если жидкость находится подъ дѣйствіемъ силы тяжести, то, взявъ ось z внизъ по вертикали, имѣемъ:

$$U = gz.$$

Тогда (933) обращается въ:

$$p = \rho \left(C + gz + \frac{V^2}{2} \right).$$

Это уравненіе обыкновенно выражается въ видѣ:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = H \dots \dots \dots (934)$$

гдѣ H есть некоторая постоянная величина. Формула (934) называется уравненіемъ Бернулли и служитъ исходнымъ пунктомъ гидравлики науки, изучающей движеніе воды въ трубахъ, рѣкахъ, каналахъ и водяные двигатели.

Часть IV.

Бѣглый обзоръ общаго строя математическихъ наукъ.

ГЛАВА I.

Обзоръ.

Вступленіе.

§ 439. Предлагая этотъ обзоръ математическихъ наукъ, я дальеъ былъ отъ мысли представить ихъ строгую классификацію. Цель этого обзора состоитъ въ томъ, чтобы дать возможность читателю хоть сколько нибудь оглядѣться среди названій различныхъ отраслей математическихъ знаній, чтобы читатель зналъ, къ какому отдѣлу математики онъ долженъ обратиться для отысканія того, что ему можетъ понадобится. При составленіи этого обзора я пользовался болѣе всего университетскими программами, оглавленными издаваемой Бурхардтомъ и Мейеромъ математической энциклопедіи: *Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgegeben von Dr. H. Burkhardt und Dr. W. Franz Meyer.* (6 томовъ по 40 листовъ, приблизительно, въ каждомъ) и указателемъ статей Математическаго Собранія.

I. Чисто-математическія науки.

Чисто-математическія науки можно по раздѣлить на три большія группы

A. *Арифметику*, изучающую *прерывныя* функции.

B. *Анализъ*, изучающей функции *непрерывныя*.

B. *Геометрію*.

Но эти отдѣлы имѣютъ между собою много точекъ сопряженія. Очень часто подъ анализомъ разумѣютъ именно дифференціальное и интегральное исчисленіе. Высшая алгебра занимается тоже и непрерывными функциями, но она, по духу, ближе къ теоріи чиселъ, чѣмъ къ интегральному исчисленію. Поэтому мы будемъ придерживаться менѣе строго, но болѣе практичнаго дѣленія, проведеннаго въ оглавленіи къ упомянутой энциклопедіи.

А. Арифметика и Алгебра.

- 1) *Элементарная арифметика.*
- 2) *Элементарная алгебра.*

Теория чиселъ.

§ 440. 3) *Теория чиселъ.* Эта наука, сравнительно еще молодая, обособившаяся только въ первой половинѣ XIX-го столѣтія, а потому еще не такъ сильно развита какъ анализъ, но ей предстоитъ широкое развитие, потому что она захватываетъ огромную область *прерывныхъ* функций. Прямымъ предметомъ ея исследования служатъ *цѣлыя числа* и числовые законы. Числа же именно и являются представителями прерывныхъ функций, потому что въ *натуральномъ* рядѣ чиселъ:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots \dots \dots (935)$$

переходъ отъ одного числа къ соотвѣстному является уже скачкомъ чрезъ въ промежуточные дроби и иррациональныя величины. Напримѣръ въ промежуткѣ между числами 1 и 2 заключается и безъконечное число дробей (напримѣръ $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$), и множество иррациональныхъ величинъ (напримѣръ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$), но теория чиселъ ими не занимается, а изучаетъ только цѣлыя числа. Она изучаетъ также числовыя функции, имѣющія существенно прерывный характеръ. Примѣромъ числовой функции можетъ быть, напримѣръ, такая: *число чиселъ меньшихъ данного числа n и не равныхъ съ нимъ.*

Однимъ изъ главныхъ орудій теоріи чиселъ является *сравненія*. Если разность $a - b$ дѣлится безъ остатка на число p , то пишуть:

$$a \equiv b \pmod{p} \dots \dots \dots (936)$$

и выговариваютъ: a сравнимо съ b по модулю p . Напримѣръ:

$$11 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$25 \equiv 4 \pmod{7}$$

Свойства чиселъ можно было бы изслѣдовать при помощи неопредѣленныхъ уравненій или при помощи *непрерывныхъ дробей*, и тѣ и другія стоять въ тѣсной связи со сравненіями, но особенное удобство сравненій заключается въ томъ, что они имѣютъ много общихъ свойствъ съ уравненіями. Сравненія бываютъ (какъ и уравненія) различныхъ порядковъ.

Особенно важную роль въ теоріи чиселъ играютъ числа *первоначальныя*, которые дѣлятся только на себя или на 1, каковы: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

Типическою теоремою теоріи чиселъ можетъ служить, напримѣръ, такая: *если p есть число первоначальное, то величина*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (p - 1) + 1$$

сплится на целое на p . Напримеръ:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1}{7} = \frac{721}{7} = 103$$

Кромѣ сравненій къ теоріи чиселъ имѣютъ большое значеніе *теоріи квадратичныхъ формъ* и особенно, изобрѣтенное профессоромъ Н. В. Бугаевымъ, *ушки и числовыхъ произвольныхъ*. Дѣйствующее надъ числовыми функциями способами похожими на способы дифференціальнаго исчисленія.

Величайшій изъ современныхъ химиковъ Д. И. Менделѣевъ и такой глубокой знатокъ арифметики какъ Н. В. Бугаевъ надѣются, что именно арифметикѣ и суждено пріобрѣтать тайны периодическаго закона химическихъ элементовъ, такъ какъ *многій вѣкъ элементовъ есть функция существенно прерывная* *).

Профессоръ Н. В. Бугаевъ въ своей рѣчи, произнесенной имъ на Цюрихскомъ конгрессѣ математиковъ въ 1897 году и повторенной имъ на X-омъ съѣздѣ натуралистовъ и врачей въ Кіевѣ, высказалъ съ поводу будущности арифметики, въ необыкновенно красивой формѣ, цѣлый рядъ мыслей на судьбы философіи, отличающихся глубиной и оригинальностью. Не могу отказать себѣ въ удовольствіи привести хотя бы сухое извлеченіе изъ рѣчи знаменитаго нашего математика.

Н. В. замѣчаетъ, что математическія науки должны были оказывать сильное вліяніе на философскую мысль. Математика, со времени открытій Ньютона и Лейбница, очарованная стройностью и мощью анализа, развивалась болѣе всего въ направленіи изученія *непрерывныхъ* функций и при томъ такихъ, которыя получаютъ предѣленное значеніе при данномъ значеніи переменнаго. Известны отражающіяся въ математикѣ *непрерывными функциями*, отличаются своею определенностью, данная причина неоразумно производитъ извѣстное, вѣднѣ определенное, явленіе.

Подъ вліяніемъ необыкновенныхъ усилій въ изученіи именно этого ряда явленій, философія невольно увлеклась детерминизмомъ, а въ ней явилась склонность сводить къ законамъ рациональн. и механики не только явленія неорганической природы но даже и явленія и законы человеческого духа. Философія окрылилась вѣждо объяснить все какъ вѣсто-рый механизмъ, человекъ при этомъ ставился въ безнадежное положеніе великія начала св. боды, красоты, справедливости вачивали тускнѣть. Но вотъ именно въ XIX вѣкѣ обособляется и начинаетъ быстро развиваться арифметика, занимающаяся прерывными функциями и такими, для которыхъ равно-возможны вѣскольк. значеній при данномъ значеніи переменнаго. Не повліяетъ ли арифметика на философію въ смыслѣ противоположномъ тому, какъ на нее повліялъ анализъ. Не отвѣтитъ ли она утвердительно на потребность нашего духа высоко держать знамя свободы, красоты и справедливости наперекоръ отрицавшю свободу воли?

* Энциклопедическій Словарь Брокгауза и Ефрона, т. XXIII, стр. 323.

Въ связи съ такими идеями интереснѣйшимъ вопросомъ современной теории чиселъ является изученіе числовыхъ (прерывныхъ) функций.

Высшая Алгебра.

§ 441. 4) *Высшая Алгебра*. Главная цель высшей алгебры состоитъ въ изученіи свойствъ уравненій перваго и высшихъ порядковъ.

а) *Теорія уравненій* содержитъ въ себѣ строгое доказательство того, что уравненіе m -го порядка имѣетъ m корней. Изслѣдованіе уравненій квадратнаго, биквадратнаго, 3-го порядка и 4-го порядка, которыя въ имѣютъ алгебраическое рѣшеніе въ радикалахъ. Теорія двучленныхъ уравненій вида $Ax^m + B = 0$. Опредѣленіе предѣловъ, между которыми заключаются корни данного уравненія съ числовыми коэффициентами. Приближенное вычисленіе корней уравненія m -го порядка съ числовыми коэффициентами. Уравненія высшихъ порядковъ, въ которыхъ корни суть функции отъ одного изъ нихъ. Уравненія Галуа, Уравненія Абеля. Симметрическія функции (не измѣняющіяся отъ перестановки переменныхъ). Детерминанты (опредѣлители).

б) *Теорія комбинацій*, которая необходима для теорій алгебраическаго рѣшенія уравненій; въ ней изслѣдуются различныя перестановки данныхъ границъ, исключеніе и вліяніе ихъ на функции этихъ величинъ.

в) *Теорія группъ*, проникающая отъ д-ла a и b , созданная французскими, въ ранней методикѣ умершимъ, гениальнымъ математикомъ Галуа (Galois). Эта теорія приобретаетъ все болѣе значеніе и овладѣваетъ нѣкоторыми другими отдѣлами математики.

г) *Теорія линейныхъ преобразованій* основанная на теоріи опредѣлителей. Если имѣемъ два уравненія 1-го порядка

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

то изъ нихъ получаемъ рѣшенія:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

знаменатель $a_1b_2 - a_2b_1$ называется опредѣлителемъ и обозначается такъ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Числитель легко получается по опредѣленнымъ правиламъ изъ знаменателя. При трехъ уравненіяхъ съ 3-мя неизвѣстными играетъ роль опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(см. Алгебра Давидова).

Изъ теоріи опредѣлителей (детерминантовъ) развилась обширная теорія линейныхъ преобразованій, широко пользующаяся символическими обозначеніями детерминантовъ. Она имѣетъ тѣсное соотношеніе съ преобразованіемъ координатъ: координаты не содержатся въ задачахъ какъ нечто имъ присущее и неотъемлемое. Онѣ намъ служатъ для построенія рѣшенія, какъ леса служить для постройки зданія. Поэтому весьма интересно узнать, какія величины не измѣняются отъ преобразованія координатъ. Эти величины называются *инвариантами*. Линейнымъ преобразованіемъ функции называется такое, при которомъ переменныя замѣняются другими, связанными съ ними помощью уравненій 1-го порядка. Преобразования Декартовыхъ координатъ суть линейныя. Цель этой теоріи нахожденіе инвариантовъ (неизмѣнныхъ), ковариантовъ (соизмѣнныхъ) и другихъ величинъ, такъ или иначе относящихся къ преобразованію.

Теорія конечныхъ разностей.

§ 442. 5) Теорія конечныхъ разностей разсматриваетъ не безконечно малыя, но *конечныя* приращенія переменнаго и функции. Представимъ себѣ рядъ величинъ:

$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots;$$

опредѣляемъ ихъ разности:

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0; \Delta u_1 = u_2 - u_1; \Delta u_2 = u_3 - u_2,$$

называемыя первыми разностями; составляемъ разности этихъ 1-ыхъ разностей:

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0; \Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1; \Delta^2 u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2, \dots$$

и такъ далѣе, такъ что получается таблица.

u_0				
	Δu_0			
u_1		$\Delta^2 u_0$		
	Δu_1		$\Delta^3 u_0$	
u_2		$\Delta^2 u_1$		$\Delta^4 u_0$
	Δu_2		$\Delta^3 u_1$	
u_3		$\Delta^2 u_2$		$\Delta^4 u_1$
	Δu_3		$\Delta^3 u_2$	
u_4		Δu_4		
	Δu_4			
u_5				

Примѣръ:

1	Δ	Δ^2	Δ^3
	3		
1		2	
	5		0
9		2	
	7		0
16		2	
	9		
25			

Пользуясь этими разностями устанавливаемъ формулы нѣсколько сходныя съ формулами дифференціальнаго исчисленія. Получается исчисленіе особенно удобное для приближенныхъ вычисленій.

Б. Анализъ

§ 443. Дифференціальное и интегральное исчисленія, составляющія существенную часть анализа, какъ мы надѣемся, уже охарактеризованы въ основномъ тектѣ настоящей книги. Но мы не касались мнимаго переменнаго, введеніе котораго необыкновенно расширяетъ кругозоръ математика и характеризуетъ новѣйшую математику, о немъ мы скажемъ впоследствии нѣсколько подробнѣе; мы не касались многихъ весьма важныхъ рядовъ, непрерывныхъ дробей и проч. Затѣмъ къ анализу относятся еще слѣдующіе отдѣлы.

1) *Общая теорія функций*, уясняющая свойство функций именно при помощи мнимаго переменнаго z равнаго $x + y\sqrt{-1}$ (о ней скажемъ впоследствии).

§ 444. 2) *Эллиптическія функции*. Еслибы мы не имѣли понятія о тригонометрическихъ функцияхъ \sin , \cos , tg , то не могли бы взять

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \text{ или } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

которые по формуламъ (430) и (432) равны $artgx$ и $ar \sin x$. Весьма вѣроятно, что и теперь многіе интегралы недоступны нашему вычисленію только потому, что мы не знаемъ многихъ простыхъ функций. Поэтому прямой и весьма интересный путь для нахождения интеграловъ неподдающихся обыкновенному вычисленію заключается въ нахожденіи свойствъ тѣхъ новыхъ функций, которыя ими выражаются.

Ближайшими функциями къ $artgx$, $ar \sin x$, $ar \cos x$ по виду выражаемыхъ ими интеграловъ будутъ тѣ, которыми выражаются интегралы:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}}$$

содержащіе въ знаменателѣ радикалъ (квадратный) и подъ этимъ радикаломъ алгебраическую функцию 3-го порядка. Если подъ радикаломъ содержится алгебраическая функция 2-го порядка, то интегралъ выражается хотя сложными, но состоящими изъ знакомыхъ вамъ функций выраженіями (см. § 263—265). Но если подъ радикаломъ стоитъ алгебраическая функция 3-го порядка, то интегралъ не поддается обыкновеннымъ вычисленіямъ. Между тѣмъ такіе именно интегралы встрѣчаются очень часто въ различныхъ вопросахъ. Напримѣръ точное рѣшеніе задачи о маятникѣ приводится (§ 399, формула 19) къ такому интегралу. Геніальныя изысканія Абели и Якоби поставили вопросъ объ изученіи такихъ интеграловъ на надлежащую почву изученія новыхъ функций, несоставляемыхъ изъ обыкновенныхъ простыхъ функций, какъ $\sin x$ не можетъ быть составленъ алгебраическими дѣйствіями. Эти интегралы называются эллиптическими.

Однано несравненно удобнее имѣть дѣло съ прямыми тригонометрическими функциями $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, чѣмъ съ обратными $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ такъ какъ первыя лучше преобразуются одна въ другую чѣмъ послѣднія.

Интересно, следовательно, изучить функции обратныя *эллиптическимъ интеграламъ*.

Разсмотримъ сначала переходъ, наприкладъ, отъ $\arcsin x$ къ $\sin x$. Назовемъ чрезъ U интегралъ

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Имѣемъ:

$$U = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

откуда:

$$\sin U = x.$$

Такъ, прямая тригонометрическая функция $\sin U$ равна верхнему предѣлу въ \int_0^x , выражающему обратную тригонометрическую функцию $\arcsin x$.

Сообразно съ этимъ *эллиптической функции* называется верхній предѣлъ эллиптическаго интеграла:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}}$$

Оказалось, что эти функции представляютъ высочайшій математическій интересъ по гибкости, съ которой онѣ подчиняются весьма красивымъ преобразованиямъ и по тому, что онѣ оказались двояко-периодическими.

Въ послѣднии 30 лѣтъ благодаря Вейерштрассу, Эрмиту, Шварцу и другимъ, эллиптическія функции изслѣдованы весьма обстоятельно. Вейерштрассъ показалъ, что всѣ эллиптическія функции выражаются алгебраически чрезъ одну функцию P , определяемую дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 = (P - e_1)(P - e_2)(P - e_3)$$

гдѣ e_1, e_2, e_3 , суть нѣкоторыя постоянныя.

Эта функция P и называется вейерштассовскою функциею.

Эллиптическія функции получили свое названіе отъ того, что дуга эллипса выражается эллиптическимъ интеграломъ.

§ 445. 3) *Сферическія функции* суть такія функции V , которыя удовлетворяютъ уравненію Лапласа.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Съ этимъ уравненіемъ тѣсно связаны гидродинамика, теорія: притяженія, электричества, теплопроводности и проч. Поэтому ихъ теорія получила широкое развитіе, стоящее въ связи со многими другими отдѣлами чистой математики.

§ 446. 4) *Варьационное исчисленіе*. Въ дифференціальномъ исчисленіи давалъ переменному x приращеніе dx , мы переходимъ отъ одной точки кривой къ другой ея точкѣ. Въ варьационномъ исчисленіи переходимъ отъ точки данной на кривой къ ближайшей точкѣ лежащей на другой соединенной кривой. Въ дифференціальномъ исчисленіи мы отыскиваемъ максимумы и минимумы, которыхъ достигаетъ $f(x)$ при измѣненіи x ; ищемъ, при какомъ x съ $f(x)$ получить наибольшее или наименьшее значеніе. Въ варьационномъ исчисленіи мы ищемъ самую форму функции и отыскиваемъ при какой формѣ функции

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right)$$

получить наибольшее или наименьшее значеніе интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) dx$$

Этимъ исчисленіемъ рѣшаются такіе вопросы:

Найти кратчайшую линію между двумя точками на данной поверхности.

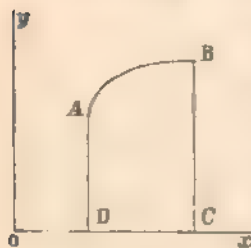
Провести между двумя данными точками A и B такую кривую, чтобы при вращеніи ея плоскости около лежащей въ этой плоскости прямой AC получился бы наименьшій объемъ $ABCD$.

Провести между двумя данными точками A и B такую кривую, чтобы площадь $ABCD$ (фиг. 294) была наименьшею.

Всѣ задачи механики можно свести къ варьационному исчисленію.

§ 447. 5) *Теорія непрерывныхъ группъ преобразованій* созданъ знаменитаго Софуса Ли представляетъ собою необыкновенно глубокое и въ то же

время поразительно ясное снѣтеніе нѣкой аналитическихъ, геометрическихъ и механическихъ, дающее возможность свести въ одно цѣлое самые разнообразные способы интегрированія дифференціальныхъ уравненій. Лучше всего конечно эта теорія изложена въ объемистомъ сочиненіи Ли: *Theorie der Transformationsgruppen*, S. Lie. Читая эту книгу, не знаешь чему болѣе удивляться: глубинѣ ли и обширности познаній Софуса Ли по всѣмъ отдѣламъ математики или стройности знанія, которое онъ построилъ. Нигдѣ геометрія не сплетается съ анализомъ такъ тѣсно какъ у Ли и нигдѣ они не поясняютъ взаимно другъ друга такъ поразительно,



Фиг. 294

какъ въ этой книгѣ это какъ бы сводъ всѣхъ математическихъ ученій воедино. Опредѣлить въ краткихъ словахъ или охарактеризовать ее типическими примѣрами потому и трудно, что Либ. составивъ ее изъ самыхъ отдаленныхъ одна отъ другой математическихъ теорій, сплотивъ ихъ въ такое сплотивное цѣлое, которое представляется вылитымъ изъ одного куска. Онъ замѣтилъ, что главные способы математики это преобразования, отъ нихъ ишло капитальное значеніе группъ Гауза, проникъ въ самую глубину связи дифференціальнаго уравненія съ движеньемъ и съ теоріею касанія, обобщилъ это все до геометрии, широко воспользовался такими обобщеніями какъ геометріи многихъ измѣреній и неевклидова геометріи и создалъ такую теорію, которая еще не можетъ быть достаточно оценена современниками, но несомнѣнно почтется величайшимъ математическимъ произведеніемъ XIX-го вѣка. Теорія Либ. это сведеніе математики въ единство. Геометрія въ ней настолько все проникаетъ, что даже интегрирующий множитель получаетъ геометрическое представленіе. Но умѣнно все преломлять и освѣщать геометріею съ Софусомъ Либ. можетъ поспорить въ изнѣ аналитическая вѣкъ, развѣ только Ф. Касандъ знаменитый профессоръ Геттингенскаго университета.

В. Геометрія.

§ 448. 1) Элементарная Геометрія.

2. Тригонометрія какъ она трактуется въ нашихъ гимназіяхъ, гдѣ ее сводятъ къ ученію о рѣзвѣхъ треугольниковъ въ Она можетъ быть отнесена къ анализу, если ее разсматривать какъ ученіе о функционхъ вырженныхъ верхними предѣлами интеграловъ:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

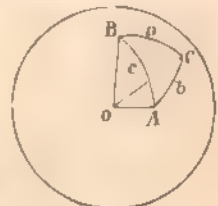
и о соотношеніяхъ между этими функциями

§ 449. 3) *Сферическая тригонометрія* глава о соотношеніяхъ между углами и сторонами сферическихъ треугольниковъ чрезвычайно важна для Астрономіи.

Основная формула сферической тригонометрии такова:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

гдѣ a, b, c суть центральные углы, соответствующіе дугамъ большихъ круговъ, составляющимъ сферическій треугольникъ (сфиг. 295). A, B, C двугранные углы между плоскостями этихъ большихъ круговъ. Дуги a, b, c служатъ сторонами сферическаго треугольника, углы A, B, C углами его



Фиг. 295

* С. Либ. родомъ шведъ, состоитъ въ настоящее время профессоромъ Лейпцигскаго университета.

§ 450 1) *Аналитическая геометрия*. В настоящей книге аналитическая геометрия затронута лишь вкратце, поскольку она необходима для понимания анализа. Пропущено использование общих уравнений 2-го порядка с двумя и с тремя переменными, а также главы Аналитической и Геометрии, геометрия кривых и поверхностей высших порядков.

Кроме координат Декартовых, полярных и сферических указанных в настоящей книге Аналитическая Геометрия пользуется многими другими системами координат: трилинейными, однородными, эллиптическими, криволинейными и проч.

Кроме обыкновенных указанных нами способов, она еще пользуется практическим способом со шпаль, который мы рассмотрим в геометрии положения, способом взаимных поляр, теорию линейных преобразований и проч.

Кроме точек, линий и поверхностей она рассматривает еще более сложные формы, например, Пондеровые комплексы прямых. Примером такого комплекса может служить совокупность всех прямых касательных к поверхности трехгранного эллипсоида. Многие сложные поверхности состоят из таких прямых, которые принадлежат одновременно двум семействам, такая поверхность двух комплексов называется *конгруэнцией*. Примером конгруэнции может служить совокупность прямых, пересекающихся двѣ данные прямые не параллельные и не пересекающиеся между собой. Иначе говоря, совокупность прямых, принадлежащих одновременно двум конгруэнциям, составляет линейчатую поверхность. Например, если изо всех прямых, составляющих конгруэнцию прямых, пересекающихся двѣ данные прямые отберем только те, которые параллельны данной плоскости, то получим гиперболический параболоид.

Аналитическая Геометрия изучает отдельно линии 1-го, линии 2-го, 3-го и 4-го порядка и начинает изучать линии порядковъ выше 4-го. Такъ же и съ поверхностями.

Кривые и поверхности более всего характеризуются особыми точками и теперь исследование особых точек уже поставлено на надлежащую высоту. Теория особых точек оказалась стоящею в тѣсной связи съ общою теоріею функций комплекснаго (мнимаго) переменнаго. Вообще въ математикѣ многія (я отдѣльныя отрасли тѣсно представляют между собою, и именно точки соприкосновения отдѣльных областей математики и представляют наибольший интересъ.

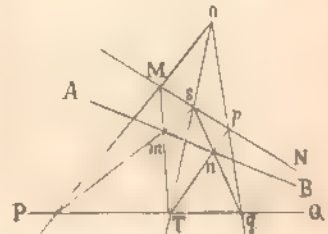
§ 451. 2) *Геометрия положения*—геометрия, очищенная отъ всякаго анализа, единственная математическая наука, не имѣющая никакого дѣла съ величинами, а только съ относительнымъ положениемъ точекъ, линий и поверхностей. О теоремахъ такого характера, не имѣющего дѣла съ величинами, можно дать въѣоторую понятіе слѣдующею задачею и способомъ ея рѣшенія.

Задача. Провести чрез точку m (фиг. 296) прямую, проходящую чрез точку пересечения двух данных прямых MN и PQ , в которыя до этой точки пересечения не продолжены.

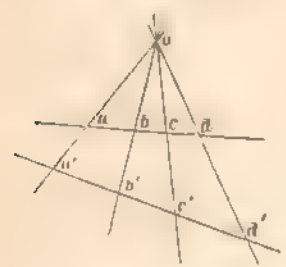
Решение. Проводимъ чрезъ m какиянибудь прямая SP и MT . Соединимъ P съ M , T съ S . Получаемъ на пересечении прямыхъ PM и TS точку O . Чрезъ O проводимъ какънибудь прямую Oq . Получаемъ точку пересечения n диагоналей Sq и pT образованнаго 2-го четырехсторонника $SpqT$. Соединимъ m съ n , получимъ искомую прямую AB , которая пройдетъ чрезъ пересечение MN съ PQ .

Мы здѣсь не приводимъ доказательства справедливости такого рѣшенія, но приведемъ самое рѣшеніе, чтобы показать, что въ немъ мы не отбавляли никакихъ величинъ, ни длины, ни угловъ; все устроилось пахождениемъ различныхъ точекъ пересечения между собою проведенныхъ прямыхъ.

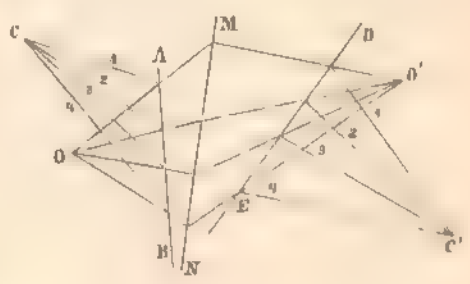
Методъ Геометріи положенія проективный. Совокупность прямыхъ выходящихъ изъ точки O называется *пучкомъ*, O — центръ пучка (фиг. 297). Эти прямыя называются также *проективными лучами*. Пересѣдемъ пучекъ прямыми ad и $a'd'$. Точка $a'b'c'd'$ верной прямой называются проекціями



Фиг. 296.



Фиг. 297.



Фиг. 298.

точекъ a, b, c, d первой прямой. Проективные лучи устанавливаютъ *перспективное* соотвѣтствіе между точками a и a' , b и b' , c и c' , d и d' (вообщемъ между точками первой и точками второй прямой; соотвѣственными называются точки, лежащія на одномъ и томъ же лучѣ). Прямая называется *рядомъ*. Перспектива—это самое простое соотвѣтствіе пучка съ рядомъ; ряды ad и $a'd'$ находятся въ перспективномъ соотвѣтствіи съ пучкомъ O . Рассмотримъ соотвѣтствіе болѣе сложное (фиг. 298). Два пучка O и O' находятся въ перспективномъ соотвѣтствіи если соотвѣтственные лучи проходятъ чрезъ однѣ и тѣ же точки какого либо ряда MN . Пересѣчемъ пучекъ O рядомъ AB , пучекъ O' рядомъ ED . Возьмемъ два новыхъ пучка C и C' такъ, чтобы между пучками O и C было установлено перспектив-

ное соответствие рядам AB , и между пучками O и C' было установлено перспективное соответствие рядов ED . Пучки C и C' будут находиться в *проективном* соответствии, а именно будут соответственными лучи 1 сь 1', 2 сь 2', 3 сь 3', 4 сь 4', и такъ dalje. Въ Геометрии положенія доказывается, что геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія соответственныхъ лучей, находящихся въ проективномъ соответствии, есть кривая 2-го порядка. Лучше сказать, таково определение кривой 2-го порядка, даваемое Геометрией положенія, и изъ него она выводитъ все ея свойства.

Замѣчательна теорема Паскаля, состоящая въ слѣдующемъ: возьмемъ на кривой 2-го порядка какия либо 6 точекъ, соединимъ ихъ въ *какомъ угодно порядкѣ* последовательными прямыми, назовемъ эти прямыя цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. *Точки пересѣченія прямыхъ 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6 лежатъ на одной прямой.*

Существуетъ взаимная Паскалевой теоремѣ теорема Брианшона: *прямыя (1,4), (2,5), (3,6) пересѣкаются въ одной точкѣ* 1.

Эти теоремы позволяютъ, по даннымъ 5 точкамъ кривой 2-го порядка, найти сколько угодно остальныхъ ея точекъ. Кривая 2-го порядка, оказывается, вполне определяется такими 5-ью точками, изъ которыхъ никакия три не лежатъ на одной прямой.

Геометрия положенія захватываетъ теорію кривыхъ и поверхностей высшихъ порядковъ и теорію Пляккеревельныхъ комплексовъ.

6) *Проективная Геометрія*. Наука, въ которой все теоремы геометрии и логически выводятся пользуясь свойствами некоторой формулы, называемой *ангармоническимъ отношеніемъ*.

Основная теорема Проективной Геометрии заключается въ слѣдующемъ.

Если данный пучекъ четырехъ прямыхъ OA, OP, OP', OB (фиг. 299) пересѣченъ прямою въ точкахъ A, P, P', B , то каково бы ни было положеніе этой прямой, величина ангармоническаго отношенія,

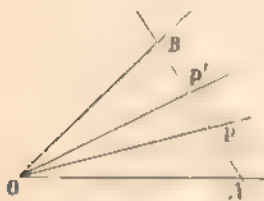
$$\frac{AP \cdot P'B}{AP' \cdot PB}$$

остается постоянной.

7) *Высшая Геометрія*. Если не обращать вниманія на то, какими способами излагаются теоремы Геометрии положенія и Проективной Геометрии, то научное изложение этихъ теоремъ называютъ Высшею Геометріею.

§ 452. 8) *Не-евклидова Геометрія*. Постулатъ Евклида, состоящій въ томъ, что чрезъ одну точку можно провести только одну прямую параллельную данной прямой, не обладаетъ такою убѣдительностью какъ другія аксіомы математики. Было много попытокъ доказать ему, но все оное не увѣчалось

*. Здѣсь цифрами обозначены самыя точки на кривой.



Фиг. 299

успѣхомъ. Наконецъ нашъ знаменитый математикъ Лобачевскій выяснилъ дѣло совершенно особеннымъ приемомъ, доказавъ положеніе Евклида значить показать, что оно вытекаетъ изъ другихъ аксіомъ; это можно сдѣлать только въ томъ случаѣ, если постулатъ Евклида не представляетъ собою самостоятельной аксіомы. Если же онъ представляетъ собою самостоятельную аксіому, независимую отъ прочихъ, то и не можетъ быть ихъ слѣдствіемъ. Напротивъ того въ этомъ случаѣ, отвергнувъ справедливость постулата, можно построить геометрію, которая не войдетъ въ противорѣчіе ни сама съ собою, ни съ другими аксіомами. Лобачевскій и построилъ такую геометрію и доказалъ этимъ, что постулатъ Евклида или представляетъ собою совершенно особую аксіому и потому не можетъ быть доказанъ, или неверенъ. Такую же отвергающую постулатъ Евклида геометрію имѣли Риманъ. Эти три геометріи характеризуются слѣдующимъ, по Евклиду пространство безконечно и неограниченно, по Лобачевскому оно безконечно, но ограничено, по Риману оно конечно, но безграницно. Въ послѣднее время Russel написалъ превосходную и самую полную монографію по этому вопросу. Заслуга Лобачевскаго громадна во первыхъ потому, что онъ совершенно строго показалъ невозможность *окаательства* постулата Евклида и этимъ избавилъ математику отъ заблужденій. Во-вторыхъ, благодаря ему подвергается весьма плодотворной критикѣ аксіомы геометріи и ихъ значеніе. Наконецъ Лобачевскій открылъ своимъ способомъ множество совершенно новыхъ горизонтовъ въ науку. Что же касается постулата Евклида, то можн искать *жизни* его *болы очевидною* аксіомою, но добавлять его, то есть выводить изъ другихъ аксіомъ, это напрасный трудъ, который ни къ чему не можетъ привести.

9) *Геометрія многихъ измѣреній или теорія многообразій*. Обобщилъ формулы Аналитической Геометріи можно сказать напримѣръ, что

$x^2 + y^2 = R^2$ выражаетъ въ плоскости окружность

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ выражаетъ въ пространствѣ 3-хъ измѣреній сферу.

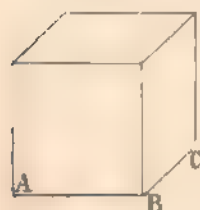
$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2$ выражаетъ сферу въ пространствѣ 4-хъ измѣреній

Но при этомъ никакъ нельзя думать, что существуетъ реально пространство 4-хъ измѣреній. Пространства 4-хъ измѣреній мы и представить себѣ не можемъ. Темъ не менѣе такій способъ выражаться, введя слова сфера или плоскость 4-хъ измѣреній, весьма полезенъ, возбуждая мысль объ аналогіяхъ и особенно красиво приложенъ Софусомъ Ли къ теоріи интегрированія дифференціальнаго уравненій. Формы изучаемыя въ пространствахъ какихъ бы то ни было измѣреній называются *многообразіями*.

§ 453. 10) *Исчисленіе положеній*. Геометрія, въ которой аналитическія дѣйствія производятся не надъ координатами, а надъ самими линиями и поверхностями, обозначаемыми нѣкоторыми величинами. Сюда же относится *теорія эквиваленцій* Белладвица.

11) *Теория кватернионов*. Желая освободиться отъ координатъ, вносившихъ въ задачу много ей чуждаго, английская математикъ Гамильтонъ создалъ особую науку теорію кватернионовъ, въ которой строго различаются величины не имѣющія направленія (потенціалъ, плотность) называемыя *скаларами* (scalar) отъ величинъ имѣющихъ направленіе (сила, скорость) и называемыхъ *векторами*. Надъ векторами производятся особые дѣйствія (сумма) помощью особыхъ символовъ, удлинняющихъ или укорачивающихъ векторы, вращающихъ ихъ на определенный уголъ и проч. Эта теорія играла бы весьма важную роль въ механикѣ и физикѣ, еслибы въ согласіи съ ее примѣнять и привыкли бы къ ея сложнымъ обозначеніямъ, въ которыхъ, безъ достаточнаго навыка, легко спутаться. Недавно возникло между математиками различныхъ странъ особое общество, распространяющее эту теорію.

§ 454. 12) *Начертательная Геометрія*. Когда представлять на плоскомъ чертежѣ пространственные предметы, то приходится укорачивать удаляющіяся линіи. Напримеръ въ изображеніи куба (фиг. 300) ребро *BC* дѣлается болѣе короткимъ чѣмъ *AB*, хотя въ действительности всѣ ребра куба равны между собою, но на чертежѣ необходимо укорачивать идущія въ даль линіи, потому что онѣ представляются укороченными глазу, наблюдающему дѣйствительность. Но какъ велико это укороченіе, остается неизвѣстнымъ, вследствие чего по такимъ чертежамъ нельзя узнать истинныхъ размѣровъ линій. Между тѣмъ для механики въ инженеровъ, архитекторовъ необходимо имѣть чертежи, которые представляли бы предметы такими (или почти такими), какими они представляются нашему глазу, но давали бы при этомъ возможность точно измѣрять всѣ линіи. Знаменитый Монжъ (Monge), приглядѣвшись къ чистому практическимъ приемамъ, употребляемымъ каменщиками и другими мастерами, создалъ особую, удивительно удобную въ приложенияхъ, науку — *Начертательную Геометрію*, которая даетъ возможность получать чертежи, похожие на то, что представляется глазу и позволяющіе опредѣлять точно истинные размѣры удаляющихся линій.



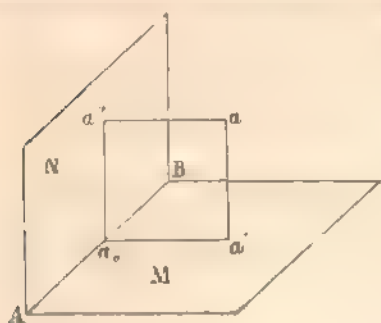
Фиг. 300

представляли бы предметы такими (или почти такими), какими они представляются нашему глазу, но давали бы при этомъ возможность точно измѣрять всѣ линіи. Знаменитый Монжъ (Monge), приглядѣвшись къ чистому практическимъ приемамъ, употребляемымъ каменщиками и другими мастерами, создалъ особую, удивительно удобную въ приложенияхъ, науку — *Начертательную Геометрію*, которая даетъ возможность получать чертежи, похожие на то, что представляется глазу и позволяющіе опредѣлять точно истинные размѣры удаляющихся линій.

Ортогональною проекціею точки на плоскость называется основаніе перпендикуляра, опущеннаго на плоскость изъ данной точки. Въ *Начертательной Геометріи* пространственные предметы изображаются ортогональными проекціями ихъ точекъ на горизонтальную плоскость, называемую *планою* и на вертикальную плоскость, называемую *фасадомъ*.

Пусть (фиг. 301) *M* изображаетъ плоскость плана, *N* — плоскость фасада. Положеніе точки *a* будетъ вполне определено, если даны ея планъ *a'* и ея фасадъ *a''*, такъ какъ возставляя перпендикуляры изъ *a'* и *a''* къ ихъ плоскостямъ, получимъ въ пересѣченіи перпендикуляровъ точку *a*. Но съ такими системами плоскостей, составляющихъ двугранный

углы, взаимно обратные. Поэтому плоскость фасада вращают около ребра AB до совмещения с плоскостью плана (на 90°); тогда получается изображение точки на *совмещенном* чертеже (фиг. 302). Ребро AB называется общим проектом. Не трудно видеть, что точки a' и фасад a''



Фиг. 301.

одной и той же точки a лежат на общем перпендикуляре к AB . Высота точки a над плоскостью плана

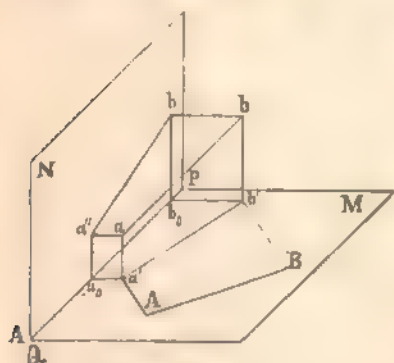


Фиг. 302.

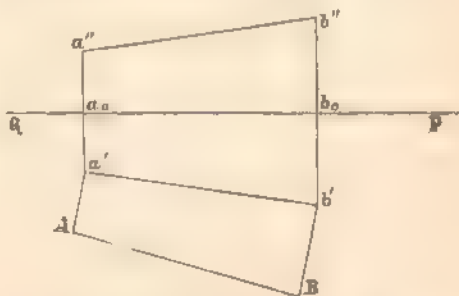
равна a_0a' ; расстояние точки a от плоскости фасада равно a_0a' .

Чертежи начертательной геометрии представляют собою именно совмещение плана и фасада (как на фиг. 302). В начале изображения этой науки принадлежат и ее пояснительным чертежам, исполняемым обыкновенным способом (как фиг. 303).

Покажем—как определить истинная длина прямолинейного отрезка ab (фиг. 303). План его $a'b'$ и фасад $a''b''$ заданы совмещенным чертежом (фиг. 304). Если (фиг. 303) повернуть плоскость $ab'b'a'$ около $a'b'$,



Фиг. 303.



Фиг. 304.

то можно наложить ab на плоскость плана в положение AB . При этом aA и $b'B$ будут перпендикулярны к $a'b'$, и кроме того

$$a'A = a'a = a_0a''$$

$$b'B = b'b = b_0b''$$

Отсюда вытекает такое построение на совмещенном чертеже (фиг. 304): проводим из a' и b' перпендикуляры к $a'b'$, откладываем на них

$$a_1A = a_0a''; \quad b'B = b_0b''.$$

Длина AB равна длинѣ прямой ab , изображенной планомъ $a'b'$ и фасадомъ ab .

Начертательною геометриєю весьма удобно опредѣляются лини пересѣченія поверхностей и проч. Она служитъ не только для практическихъ цѣлей, но и для научныхъ. Она весьма удобно прилагается къ *гномоникѣ* — учению о построении солнечныхъ часовъ.

Перспектива, учащая изображать предметы совершенно такъ какъ они представляются глазу, и *теорія тѣней* могутъ быть разсматриваемы какъ отдѣлы Начертательной Геометрiи.

§ 455. 13) *Дифференциальная Геометрiя*. Приложение дифференціальнаго исчисления къ геометрiи, едва затронутое у насъ въ параграфахъ о кривинѣ поверхностей, развилось въ особую науку *дифференціальную геометрiю*, исследующую лини, проводимыя на поверхностяхъ, наложеніи поверхностей одна на другую и многіе другіе вопросы, представляющие высокій интересъ.

Теорія вѣроятности.

§ 456. Если, изъ числа n одинаковыхъ возможныхъ событій, p совпадаютъ съ ожидаемымъ событіемъ, то дробь $\frac{p}{n}$ называется вѣроятностью ожидаемаго событія.

Напримѣръ, если въ ящикѣ находится n шаровъ одинаковой величины, изъ которыхъ p бѣлые, а остальные черные, то вѣроятность вынуть бѣлый шаръ равна $\frac{p}{n}$. При маломъ числѣ испытаний вѣр ятность не имѣетъ большого значенія; чѣмъ больше число испытаний, тѣмъ большее значеніе получаетъ вѣр ятность. Такъ, напримѣръ, въ колѣ дѣ съ двойками имѣется 52 карты, а фигуръ (король, дама, вазель) 12. Слѣдовательно вѣр ятность вынуть фигуру изъ хорошо перемешанной колоды равна $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$. Если предѣлаемъ небольшое число опытовъ, то отношеніе числа вынутыя фигуры къ числу всѣхъ опытовъ можетъ оказаться довольно значительно разнящимся съ $\frac{3}{13}$, но чѣмъ больше предѣлаемъ опытовъ, тѣмъ ближе это отношеніе будетъ къ $\frac{3}{13}$; предѣлавъ напримѣръ 1000 опытовъ, мы увидимъ, что отношеніе это весьма близко къ $\frac{3}{13}$. Такое увеличеніе согласія между опытомъ и числами теорiи вѣроятности называется *закономъ большаго числа*.

Наиболѣе важное значеніе теорія вѣроятности приобретаетъ при обработкѣ наблюденій. Можно сказать, что во многихъ случаяхъ астрономъ, пользующійся теорією вѣроятности, но располагающій неточными инструментами, можетъ дать столь же точныя цифры какъ астрономъ, обладающій болѣе точными инструментами, но пренебрегающій теорією вѣроятности.

Въ этомъ отношеніи особенно полезенъ отдѣлъ теорiи вѣроятности, называемый *способомъ наименьшихъ квадратовъ*.

II. Прикладная математика.

§ 457. 1) *Аналитическая механика* наука о движении, сведенная Лагранжем на интегрирование дифференциальных уравнений известного типа. Дифференциальные уравнения механики (769) Лагранж привелъ къ другому виду, относящемуся къ *независимымъ координатамъ*. Каждая связь стѣняетъ движение системы. Въ Декартовыхъ координатахъ каждая точка обладаетъ 3-мя координатами, такъ что число всѣхъ координатъ — утроенному числу точекъ системы. Лагранжъ вводитъ новыя переменныя, число которыхъ равно разности утроеннаго числа точекъ системы и числа условий. Принявъ эти переменныя за координаты, уже нечего болѣе заботиться о связяхъ. Эти координаты и называются *независимыми*. Напримеръ, если точка должна двигаться по сферѣ, то незначитъ определять ея движение тремя сферическими координатами r, λ, φ — достаточно пользоваться долготою λ и широтою φ . Широта и долгота и будутъ независимыми координатами точки, принужденной двигаться по сферѣ.

Эти уравнения Лагранжа имѣютъ, въ случаѣ существованія потенциала U видъ:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} \dots \dots \dots (939)$$

гдѣ T живая сила, $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, q независимыя координаты, i значеніе, отмѣчающее различныя координаты.

Гамильтонъ привелъ уравненія (939) въ весьма интересный и такъ называемой канонической формѣ:

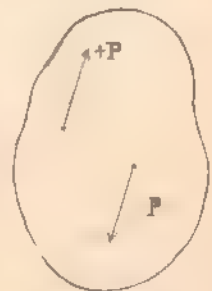
$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right| \dots \dots \dots (940)$$

гдѣ $H = T - U$.

Нельзя подожать основанія теории интегрированія каноническихъ уравненій (940) механики. Развитие ученія о нихъ интегрированіи представляетъ собою существенную часть аналитической механики.

§ 458. 2) *Теоретическая механика* Наука о движеніи. Какъ частный случай движенія она изъясняетъ и равнѣвіе. Она заключаетъ въ себѣ аналитическую механику и всѣ другіе способы исследования равнѣвія и движенія, какъ напримеръ:

а) *Теорія сложения силъ и паръ* Парою силъ называются двѣ равныя и противоположно направенныя параллельныя между собою силы P и P фиг. 305, приложенныя къ твердому тѣлу. Раздѣляя между параллельными по кото-



Фиг. 305

рыми направлены оставшіяся пары силы P и $-P$, называется *плечом пары*. Перпендикуляр, возставленный из какой-нибудь точки плоскости пары къ этой плоскости, называется *осью пары*. Вектор отложенный на оси пары и равный произведению P на плечо называется *моментом пары*. Доказывается, что данная пара равновесна всякой другой парѣ, у которой тотъ же моментъ по величинѣ и направленію.

Последній выводъ этой теории, основанной Пуансо (Poisot), заключается въ слѣдующемъ: *всякая совокупность силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ твердаго тѣла, можетъ быть приведена къ одной силѣ и къ такой парѣ, моментъ которой направленъ по этой силѣ—то есть къ винтовому усилию.*

На теорема теории паръ въ связи съ плагклеровскими комплексами произошла особая *теорія винтовъ*, въ которой слагались между собою не отдѣльныя силы, а именно винтовые усилія. Подобно тому какъ параллелограммы служатъ для сложения силъ, особая линейчатая поверхность *цилиндроида* служитъ для сложения винтовъ. Уравнение цилиндриды таково:

$$z(x^2 + y^2) = 2pxy \dots \dots \dots (941)$$

б) Геометрические методы въ кинематикѣ твердыхъ и жидкихъ тѣлъ.

в) Геометрические методы въ теории движения твердаго тѣла около неподвижной точки.

§ 459. 3) *Практическая механика*. Обширная папка о приложеніи механики къ машинамъ.

а) *Теорія упругости*—ученіе о движеніи и равновѣсн упругихъ тѣлъ.

б) *Графическая статика*—ученіе объ особомъ способѣ графически (помощью известнаго рода чертежей) рѣшать задачи на равновѣсіе.

в) *Теорія сопротивленія материаловъ*—ученіе о прочности материаловъ, употребляемыхъ при сооруженіи машинъ, зданий, плотинъ и проч. и основанное на теории упругости и на графической статикѣ; ученіе о растяженіи, сжатіи, сгибаніи, склываніи и крученіи упругихъ тѣлъ различной формы.

г) *Гидравлика*—ученіе о движеніи воды въ трубахъ, каналахъ и рѣкахъ и о двигателяхъ, дѣйствующихъ силою воды: водяныя колеса, турбины и водостолбовыя машины. Въ гидравликѣ же изучаются машины, двигающія воду (насосы и проч.). Кроме того гидравлика же изучаетъ вѣтряные двигатели и воздуходувки.

д) *Теорія механизмовъ*—ученіе о передачѣ и преобразованіи движенія въ машинахъ.

е) *Общая теорія машинъ*—ученіе о треніи и передачѣ работы въ машинахъ.

ж) *Термодинамика*—ученіе о теплотѣ въ примѣненіи къ тепловымъ машинамъ, которая теперь раздѣляется на паровыя, газовыя и керосиновыя.

з) *Ученіе о животныхъ двигателяхъ*—о работѣ, сообщаемой машинамъ силою человека и животныхъ.

§ 460. 4) Математическая физика.

а) *Термодинамика* — учение о теплотѣ, разности температуръ, общиѣхъ уравненій и законѣхъ сохранения энергии, и учение о теплопроводности и электрической теоріи тепла, въ которой разсматривается какъ свободная, такъ и связанная частица.

б) *Электро-магнетизмъ* — электричество, магнетизмъ, гальванизмъ и проч.).

в) *Оптика* — учение о свѣтѣ.

г) *Акустика* — учение о звукѣ.

д) *Теорія упругости*.

§ 461. 5) Астрономія.

а) Сферическая астрономія — учение объ измереніи астрономическихъ величинъ. Помогаетъ описывать и преобразовывать астрономическія величины, заключающія въ себѣ законъ свѣта, дѣйствія вращающихся движеній, которыя онѣ наблюдаютъ.

б) *Путевки*. Пользуются свѣтъ представляется намъ не такимъ, какъ онъ является въ действительности. Въ Астрономіи изучаются способы, при помощи которыхъ освѣждается то, что мы видимъ, посредствомъ рефракціи (преломленіи лучей въ атмосферѣ), прецессіи, нутаціи, абераціи и параллаксомъ.

в) *Геоуія* — наука объ измереніи земнаго шара.

г) Опредѣленіе географическихъ мѣстъ.

д) Опредѣленіе планетныхъ и кометныхъ орбитъ и ихъ малыхъ осей.

е) История механики — учение о дѣйствіи небесныхъ телъ.

ж) Физическая астрономія.

ГЛАВА II.

Литература по чистой математикѣ.

§ 462. 1) Теорія чиселъ.

Чебышевъ. Теорія среднихъ, 1879 г. Ц. 2 р. 50 к.

Бугаевъ. Ученіе о числахъ, произвольныхъ, 1870. Ц. 3 р. 50 к.

Gauss Disquisitiones arithmeticae.

Legendre Theorie des nombres, 1830 2 Vol. Ц. 120 фр.

Lejeune Dirichlet. Vorlesungen über Zahlentheorie, 1879 2 Vol. Ц. 14 руб. 20 коп. Это сочиненіе содержитъ и теорію формъ.

§ 463. 2) Высшая Алгебра.

Готтенбергъ. Начала теоріи уравненій. Ц. 3 р.

Ващенко-Захарченко. Высшая Алгебра.

Тихомаширицкія. Краткій курсъ высшей алгебры. Ц. 2 р. 50 к.

Serret. Cours d'algebre superieure, 5 edit., 2 Vol. Ц. 20 фр. (классический курс).

Weber Lehrbuch der Algebra, 2 Vol. 1895—1896. Ц. 15 fr. Лучшее руководство.

Вашенко-Захарченко Теория определителей и теория форм.

Salmon. Lessons introduct. to the modern higher algebra, 1866. Ц. 4 фр.

Salmon. Theorie der linearen Transformationen.

§ 464. 3) Теория конечных разностей

Марковъ. Исчисленіе конечныхъ разностей, 1891. Ц. 2 р. 50 в.

Въ курсѣ Анализа Штурма, есть краткое изъясненіе исчисленія конечныхъ разностей.

§ 465. 1) Анализъ (дифференціальное и интегральное исчисленіе).

Тоттенгеръ. Дифференціальное вычисленіе, 1873. Ц. 3 р.

Sturm. Cours d'Analyse de l'école polytechnique Ц. 15 фр. Существуетъ русскій переводъ той весьма распространенной книги.

Рацинъ. Записки по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ, 1888. Ц. 6 р.

Александровъ. Интегральное исчисленіе Ц. 3 р

Поссе. Курсъ интегральнаго исчисленія, 1891. Ц. 2 р. 50 в.

Шиффъ Вѣра Л. Сборникъ уравненій и задачъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ. Ц. 2 р

Александровъ. Дифференціальныя уравненія.

Керкиллъ. О сложныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и нѣко. рыхъ въ рѣшеніи механики 1867.

Керкиллъ и Имшенецкай, два русскіе ученые внесше много новаго въ интегрированіе дифференціальныхъ уравненій. Къ сожалѣнію труды Имшенецкаго очень трудно достать въ продажѣ, печатались они въ ученыхъ запискахъ Казанскаго университета 1861 и 1868 гг.

Legendre. Cours de calcul infinitesimal, 4 тома. Ц. 50 фр.

Laurent. Traite d'Analyse, 7 томовъ. Ц. 70 фр. Каждый томъ продается отдѣльно.

Jordan. Cours d'Analyse de l'école polytechnique, 3 тома, 1891—1896. Ц. 45 фр. Содержитъ теорію мнимаго переменнаго.

Picard. Traite d'Analyse, 3 тома. 1891. Ц. 48 фр. Содержитъ теорію мнимаго переменнаго.

Hermite. Cours d'Analyse, литографированъ. Ц. 30 фр. Содержитъ теорію мнимаго переменнаго.

Bertrand Traite de calcul differentiel et de calcul integral Ц. 145 fr.

Sellowmich. Compendium der hoheren Analysis. Ц. 18 mr.

Serret. Cours de calcul differentiel et integral. Ц. 24 фр.

Méray Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitesimale, 1891—1899, 3 тома. Ц. 20 фр. Отличается большою строгостью выводами и определениями.

Painlevé. Leçons sur le theorie analytique des equations differentielles. Литографиров. Ц. 20 fr.

Painlevé. Leçons sur l'integration des equations differentielles de la mecanique et applications, 1895. Ц. 14 fr. Прекрасное руководство для изучения метода Якоби Гамильтона.

Jacobi. Vorlesungen über Dynamik. Ц. 25 fr. Классическое сочинение по интегрированию уравнений с частными производными.

Goursat. Leçons sur l'integration des equations aux derivees partielles du deuxième ordre, 2 тома, 1896—98. Ц. 18 fr.

Некрасовъ. Личейныя дифференціальныя уравненія.

Анисиимовъ. Личейныя дифференціальныя уравненія

S. Lie. Theorie der Differentialgleichungen, 1892. Ц. 17 fr.

S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen, 1888—1893, 3 тома. Ц. 72 фр.

§ 466. 5) *Общая теорія аналитическихъ функций (теорія мнимого переменнаго)*

Покровскій. Теорія функций комплекснаго переменнаго. Ц. 1 р. (основной курсъ).

Вейершманн. Theorie der analytischen Functionen, 1887. Ц. 12 nr. 80 pf. Составлено по Вейерштрассу.

Durege. Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veranderlichen Grösse 1864. (Основной курсъ).

Burkhardt. Einführung in die Theorie der analytischen Functionen einer complexen veranderlichen, 1897. Краткое и ясное изложение теорій и новѣйшихъ взглядовъ.

Picard, Jordan, Hermite указанные выше курсъ анализъ.

Weierstrass. Mémoire sur les fonctions analytiques uniformes (переводъ съдѣланъ Шварцомъ), 1879. Ц. 15 fr.

Weierstrass. Abhandlungen aus der Functionenlehre, 1886. Ц. 13 fr. 50.

Appel et Goursat. Theorie des fonctions algebriques et de leurs intégrales, 1895. Ц. 16 fr.

F. Klein. Vorlesungen über Riemansche Flächen, Ц. 15 fr. 50

Riemann. Grundlage für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grösse, 1851. Классическiя мемуаръ.

§ 467. 6) *Эллиптическiя функции.*

Покровскiй. Теорія эллиптическихъ функций. Ц. 2 р. 25 к.

Halphen. Traite des fonctions elliptiques et de leurs applications, 1891—1891, 3 тома. Ц. 42 fr. Весьма полное руководство, содержащее новыя формулы Вейерштрасса.

Weierstrass. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Ц. 3 fr.

Weierstrass Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques II 10 fr. Формулы и propositions для emploi функций эллиптических II 10 фр.

Tannery et Molk Theorie des fonctions elliptiques, 1891—1895, 2 тома, Ц. 16 fr. Восьма ясное изложение.

Briot et Volquet. Theorie des fonctions elliptiques, 1875. Ц. 28 fr. Восьма полное, но немало старое изложение.

Классические труды Абеля и Якоби въ:

Abel Oeuvres complètes, 1881. Ц. 24 fr.

Jacobi Mathematiche Werke herausgegeben von Weierstrass, 1884—1891, 7 томовъ. Ц. 130 fr.

F Klein Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, 1891—1893, 2 тома, Ц. 55 fr.

§ 468. 7) *Сферическіи функции.*

Петри. Handbuch der Kugelfunctionen, 1861 Ц. 3 fr

Петри. Handbuch der Kugelfunctionen. 1878 Ц. 16 fr

Thomson and Tait. Handbuch der Theoretischen Physik, 1871. Ц. 12 mr. (переводъ Гельмгольца).

Thomson and Tait Treatise on Natural Philosophy. Ц. 16 mr.

Maxwell. Electricity and Magnetism.

Maxwell. Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus (переводъ Weinstein'a), 1883.

§ 469. 8) *Вариационное исчисленіе.*

Литвиновъ. Вариационное исчисленіе, 1890, Ц. 1 р. 25 в.

Ващенко-Захарченко. Вариационное исчисленіе, 1890, Ц. 1 р 75 коп.

Moigno. Calcul der variations Ц. 6 фр. (классическое руководство)

§ 470. 9) *Теория групп преобразований*

S Lie. Theorie der Transformationsgruppen. 1888—1893, 4 тома Ц. 72 fr.

§ 471. 10) *Сферическая тригонометрия*

Брюнновъ. Сферическая астрономія.

§ 472. 11) *Аналитическая Геометрія.*

Андреевъ. Основной курсъ Аналитическ и Геометри, 1884—1888, Ц. 3 р. 50 в. — Замѣчательное соединеніе ясныхъ, краткихъ и изящныхъ изложеній.

Ващенко-Захарченко. Аналитическая Геометрія, 1887 Ц. 5 р.

Граве. Аналитическая Геометрія.

Самый лучш в классическ. трудъ по Аналитической геометрии, содержащій и теорію кривыхъ и поверхностей (мелкихъ порціи ил. отъ) важное дѣленіе чашью на двѣ главныя явленія соединеніе Салмона состоящее изъ отдѣльныхъ томовъ:

Salmon. Treatise on conic sections, 1875 Ц. 12 шиллинги.

Salmon Treatise on the higher plane curves II, 7 fr.

Salmon Treatise on the analytic geometry of three dimensions. II, 15 fr.

Salmon Analytische Geometrie der Kegelschnitte, bearbeitet von Fiedler. II, 16 мр. 80 нф.

Salmon. Analytische Geometrie des Raumes, bearbeitet von Fiedler. II, 24 мр.

Salmon. Traite de Géométrie analytique (Sections coniques). II, 12 fr.

Salmon. Traite de Géométrie (Courbe planes). II, 12 fr.

Salmon Traité de Géométrie analytique a trois dimensions. II, 17 fr. 50 с.

Сальмонъ. Аналитическая Геометрия двухъ измереній. II, 5 р.

Сальмонъ. Аналитическая Геометрия трехъ измереній. II, 3 р. (не всё части подлинника).

Briot et Bouquet. Leçons de géométrie analytique. II, 8 fr. 75 с (хорошій учебникъ).

Pficker Neue Geometrie des Raumes. Содержитъ теорію комплексовъ.

Königs. La géométrie réglée et ses applications, 1896. II, 5 fr. (содержитъ теорію комплексовъ).

§ 473. 12) *Геометрія положенія.*

Reye Die Geometrie der Lage, 1877—1880, 3 тома. II, 12 fr.

§ 474. 13) *Высшая геометрія.* (Проективная Геометрія)

Steiner. Vorlesungen über synthetische Geometrie. II, 11 Mr

Chasles. Traite de Géométrie supérieure, 1852. II, 15 fr.

Chasles. Traite de Géométrie supérieure, 1880. II, 30 fr.

Chasles. Mémoires de Géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie. II, 6 fr.

Шаль. Исторія Геометрии (изданіе Московск. Мат. Общ.). II, 3 р.

§ 475. 14) *Неэвклидова геометрія.*

Лобачевскій. О началахъ Геометрии («Казанскій Вѣстникъ» 1829—1830).

Лобачевскій. Воображаемая Геометрія. Ученыя записки Казанскаго Университета, 1835.

Лобачевскій. Новая начала геометрии. Учен. зап. Казанск. Унив. 1835, 1836, 1837, 1838 гл.

Гауссъ. Бельтрами. Риманиъ, Гельмгольцъ, Ли. Пуанкаре, собраніе статей объ основаніи геометрии, 1893, изд. Казанск. Физ. Мат. Общ. II, 1 р.

Следо переизданы идеи Лобачевскаго въ предисловіи къ переводу «Памятъ Евклида», сдѣланному Викентью Захарченко.

Lobatschewsky. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. II, 2 fr.

Lobatschewsky. Pangéometrie ou précis de géometrie fondée sur une théorie generale et rigoureuse des parallèles. II. 19 fr.

F. Klein. Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie. II. 19 fr. 50 c. lithogr.

Недавно вышло прекрасное и весьма многое уясняющее сочинение:

Russel. An essay on the Foundations of geometry, 1897. II. 9 fr. 75 c.; выходитъ французскій переводъ этой прекрасной книги.

§ 476. 15) *Многообразіе многихъ измѣреній.*

Млодакевскій. О многообразіяхъ. 1889.

Riemann. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen Riemans Werke II. 16 Mr. Русскій переводъ этой статьи находится въ указанномъ сборникѣ Казанск. Физ. Мал. Общ.

§ 477. 16) *Исчисленія положеній.*

Богуславскій. Алгебра плоскости и пространства, 1891

Ермаковъ. Теорія векторовъ на плоскости, 1887.

Grassmann. Die lineale Ausdehnungslehre. II. 12 fr.

Möbius. Der Barycentrische Calcul. II. 12 fr.

Bellavitis. Sposizione del metodo delle equipollenze, 1854.

§ 478. 17) *Теорія кватернионовъ.*

Hamilton Lectures on Quaternions, II. 75 fr.

Hamilton. Elements of quaternions. II. 100 fr.

Houel. Théorie des quaternions. II. 12 fr.

Laisant. Introduction à la methode des quaternions II. 1 fr. 50 c.

Котельниковъ. Виятовое счисленіе, 1895. II. 2 p.

§ 479. 18) *Начертательная Геометрія.*

Макаровъ. Начертательная Геометрія.

Monge. Géometrie descriptive, 1820. II. 6 fr

La Gournerie. Traité de Géometrie descriptive, въ трехъ частяхъ, каждая по 10 fr.

La Gournerie Traité de perspective linéaire. II. 25 fr.

§ 480. 19) *Дифференціальная Геометрія.*

Вукревичъ. Курсъ приложенія диф. и интегр. чиселъ къ геометр. в. II. 1 p. 50 к., 1900.

Darboix. Leçons sur la théorie générale des surfaces, 4 тома 1887—1896. II. 52 fr. Прекрасное, отличающееся полнымъ содержаніемъ и ясностью, изложеніе, содержитъ много по интегрированію дифференціальныхъ уравненій.

Monge Applications de l'Analyse a la geometrie, 1809. II. 12 fr.

§ 481. 20) *Теорія Вѣроятностей.*

Буникевскій. Основанія математической теории вѣроятностей, 1846. II. 3 p — со многими практическими примѣненіями.

Ермаковъ. Теорія вѣроятностей, 1879. II. 1 p. 50 в.

Ермаговъ Свѣдѣн. наименьшихъ квадратовъ, 1887.

Laplace. Oeuvres complètes, t. VII Ц. 35 fr.

Poisson. Recherches sur la probabilité des jugements en matière civile et criminelle, 1837. Ц. 7 fr.

Quetelet. Lettres sur la théorie des probabilités, 1846. Ц. 12 fr.

Литература по прикладной математикѣ.

§ 482 1 Аналитическая и теоретическая механика.

Курсы на русскомъ языкѣ.

Слудский. Курсъ теоретической механики. 1881. Ц. 2 р. 50 к. Краткое и ясное изложение.

Бобылевъ. Курсъ аналитической механики 3 части по 2 р. 50 к., 1882—1885. Очень обстоятельный курсъ со множествомъ примѣровъ.

Сомовъ. Рациональная механика 1862—1877. Особенно развита кинематика.

Жуковский. Лекции по гидродинамикѣ. 1887.

Классическія творенія.

Newton Philosophiæ naturalis principia mathematica, Ц. 60 fr.

Lagrange. Mécanique Analytique, новое изд. 1889 Ц. 10 fr.

Jacobi. Vorlesungen über Dynamik.

Особенно замѣчательныя книги.

Thomson and Tait. Treatise of Natural Philosophy. Ц. 16 Mr., и французскій ея переводъ, сдѣланный Гельмгольцемъ и Вергеямомъ.

Thomson und Tait. Handbuch der theoretischen Physik — Замѣчательная книга, въ которой обращено особенное вниманіе на философское значеніе формулъ. Написана въ два шрифта крупнымъ можно читать съ меньшей математическою подготовкою. Для желающихъ прилагать механику къ изученію природы это пожалуй въ общемъ поучительная книга.

Kirchhoff Vorlesungen über mathematische Physik., t. I. Mechanik., 1877. Ц. 8 Mr.

Helmholtz Ueber die Erhaltung der Kraft. Ц. 6 Mr.

Poincaré. Théorie nouvelle de la rotation des corps, 1851. Ц. 15 fr. Замѣчательно ясное геометрическое представленіе вращения тѣла около одной точки.

Poincaré. Sur la percussion des corps, 1857 Ц. 4 fr. Классическая теорія удара.

Lamb. Hydrodynamics.

Курсы.

- Appell. Traité de mécanique rationnelle, 1893—1895, 2 тома. Ц. 32 fr.
- Poisson. Traité de mécanique, 1833. Ц. 10 fr.
- Despreyrs. Cours de mécanique, avec notes de Darboux, 1881—1886, 2 тома. Ц. 30 fr.
- Вонг. Cours de mécanique et machines. 3 т. и 2 атласа. Ц. 23 fr. 50 с.
- Schell. Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1870. Ц. 14 Mr.—
Особенно хорошо изложено движение твердого тела и соотношения механики с калкулюс вонгем комплексом.
- Collignon. Traité de mécanique, 1886, 5 томов. Ц. 25 fr. — очень хороший и весьма полный курс.
- Routh. Dynamics of a system of rigid Bodies, 1882—1884. Ц. 25 fr.
- Moigno. Leçons de mécanique analytique, 1898. Ц. 12 fr. — составлено по Cauchy.
- Gravelius. Theoretische Mechanik starrer Systeme. Изложение работы Вальа до приращения теории винтов в механике твердого тела.
- Saint Germain. Recueil d'Exercices sur la Mécanique rationnelle. Ц. 9 fr. 50 с. Задачник.
- § 483. 2) *Теория упругости.*
- Бобылев. Кристаллы и теория упругости, 1886. Ц. 1 р. 70 к.
- Kirchhoff. Mechanik, 1887. Ц. 8 Mr. (1-й т. от Theoret. Physik.).
- Lame. Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, 1852. Ц. 15 fr.
- Thomson и Gatt. Приведение выше сочинение.
- Saint-Venant. Mémoire sur la torsion des prismes avec des considérations sur leur flexion, 1855. Ц. 10 fr.
- § 484. 3) *Графическая статика.*
- M. Levy. La statique graphique et ses applications aux constructions, 1873. Ц. 12 fr. Второе издание весьма пополнено, по цене 63 fr.
- § 485. 4) *Теория сопротивления материалов.*
- Кирпичевъ. Теория сопротивления материалов.
- Павловъ. Строительная механика, 1894. Ц. 5 р.
- Buch. Elasticität und Festigkeit.
- Collignon. Cours de mécanique appliquée aux constructions, Première partie, résistance des matériaux, 1885.
- Bresse. Cours de mécanique appliquée. 1-ре partie. Ц. 13 fr.
- Leman. Cours de résistance des matériaux, 1895. Ц. 25 fr.
- Müller-Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 1893. Ц. 5 fr.

§ 486. 4) *Гидравлика.*

Тиме Гидравлические двигатели 1891. Ц. 6 р. 50 к.; весьма практично изложенный трактатъ съ изслѣдованьемъ важнѣ механическихъ и конструктивныхъ подробностей.

Евневичъ. Курсъ Гидравлики. 1891. Ц. 6 р. Прекрасно составленный курсъ.

Vach. Die Wasserräder, 1886. Ц. 30 Mr. Прекрасно излагаются турбины и водяныя колоса.

Meisner Theorie und Bau der Turbinen und Wasserräder. 1880. Ц. 45 Mr.

§ 487. 6) *Теорія механизмовъ.*

Reuleaux Theoretische Kinematik, 1875. Ц. 17 mr. Классическое сочиненіе, представляющее совершенно перекрѣтку во взглядахъ на машину. Изложено и объяснено просто и всерьезно, читается совершенно легко.

Reuleaux Schematische Darstellung des Theor. Kinematik (на французскій языкъ).

Burmester. Lehrbuch der Kinematik.

§ 488. 7) *Термодинамика.*

Тиме Практическій курсъ паровыхъ машинъ. 1887. Ц. 12 р.

Головъ. Двигатели малой силы.

Ketche Der Dampfmashinen Constructeur, 2 т., каждый томъ по 16 марокъ. 2-й томъ содержитъ расчетъ машинъ применительно къ шахтамъ, насосамъ и проч.

Нарабаки. Hilfsbuch für die Dampfmaschinen-Techniker, 1891. Ц. 16 mr.

Busley. Die Schiffmaschinen, 1886.

Hull. Theorie mécanique de la chaleur, 1876. Ц. 24 fr.

Zeuner. Technische Thermodynamik, 1887—1890.

§ 489. 8) *Общая сочиненія по практической механикѣ.*

Евневичъ. Курсъ прикладной механики (съ атласомъ).

Воп. бахъ. Прикладная механика. 5 томовъ.

Худяковъ. Детали машинъ.

Weisbach, bearbeitet v. Hermann.

Grasshoff Theoretische Maschinenlehre. 3 тома.

Rahlmann. Allgemeine Maschinenlehre.

Литература по математической физикѣ.

§ 490. 1) *Термодинамика. Ученіе о теплотѣ.*

Clausius. Mechanische Wärmetheorie, 1876—1891. Ц. 22 mr. 40 pf. Классическое произведеніе. Общие законы и уравненія термодинамики.

Рольегаге. Термодинамика, 1892. Ц. 16 fr.

Foixier. Théorie analytique de la chaleur. Ц. 16 fr. Классическое сочиненіе по теплопроводности.

Meyer, O. E. Die Kinetische Theorie der Gase, 1877. Ц. 8 mr.

2) *Электричество.*

Боргмэнъ. Основы учения объ электрич. и магнитн. явленияхъ.

Жюберт. Основы учения объ электрич. явл.

Maxwell Treatise on Electricity and Magnetism, 1873. Ц. 31 mr.

Классическое сочинение. Переводъ идея Фарадея на математическ. языкъ.

Максвелль называетъ, что электричество распространяется какъ свѣтъ волнами эфира. Эта книга составила эпоху въ физикѣ. Переводъ этого сочинения

Maxwell Traité d'électricité et de magnétisme, 1885—1889. Ц. 24 fr

Maxwell. Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus, 1883.

Boltzmann Vorlesungen über Maxwells Theorie der Electricität und des Magnetismus. Ц. 5 mr.

Mascart et Joubert. Electricité et Magnétisme.

Poincaré. Electricité et Optique, 1890—1891. Ц. 19 fr.

Kirchhoff Vorlesungen über mathematische Physik, t. III, Electricität. Ц. 8 mr.

3) *Оптика.*

Kirchhoff Vorlesungen über mathematische Physik, t. II Optik., 1891. Ц. 10 mr.

Poincaré. Théorie mathématique de la lumière, 1889. Ц. 16 fr. 50 c.

Mascart. Traité d'optique.

4) *Акустика.*

Rayleigh. Theory of sound, 1877—1878. Ц. 25 mr.

Стедловъ. Введение въ акустику и оптику

5) *Общая содержанія книги:*

Шиллеръ. Теорія потенциальной функции и образъ ея приложеній къ вопросамъ физики. 1885. Ц. 1 р. 50 к.

Riemann. Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung an physikalische Fragen, 1876. Ц. 8 mr.

Neumann Vorlesungen über mathematische Physik

Einführung in der theoret. Physik., 1883. Ц. 8 mr. (механика)

Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers, 1885. Ц. 11 mr. 60 pf.

Theoretische Optik., 1885. Ц. 9 mr. 60 pf

Theorie des Magnetismus, 1881. Ц. 3 mr. 60 pf.

Electrische Ströme, 1884. Ц. 9 mr. 60 fr.

Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen, 1887. Ц. 12 mr.

Mathieu. Cours de Physique mathématique

Introduction-Méthodes d'intégration, 1873. Ц. 15 fr

Theorie de la Capillarité, 1883. Ц. 10 fr.

Theorie du potentiel, 1885—1886. Ц. 21 fr.

Theorie de l'électrodynamique, 1888. Ц. 15 fr

Theorie de l'élasticité, 1890. Ц. 20 fr.

Литература по Астрономіи.

- § 491. 1) *Сферическая Астрономія, и поправки*
Brunnow. Traité d'astronomie spherique et d'astronomie pratique, 1869—1872. Ц. 30 fr.
- 2) *Геодезія.*
Гордавъ. Руководство высшей геодези, 1881. Ц. 8 р.
Кларкъ. Геодезія, 1890. Ц. 2 р.
- 3) *Определение географическихъ мѣстъ.*
Савичъ. Приложенье практической астрономіи къ геометрическому опредѣленію мѣстъ, 1868—1871. Ц. 4 р. 75.
Brunnow (указано выше).
- 4) *Определение планетныхъ и кометныхъ орбитъ.*
Oppolzer. Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. Ц. 28 fr.
- Oppolzer. Zum Bestimmung der Bahnelemente, 1878. Ц. 1 fr. 50 c.
- 5) *Небесная механика.*
Цингеръ. Элементарная теорія эллиптическаго движенія планетъ, отгнскъ IV тома Трудовъ Одѣл. Физ. Наукъ Общества. Любители Естествознанія. Ц. 50 коп.
- Gauss. Theoria motus corporum coelestium, 1809. Ц. 12 fr.
- Laplace. Traité de mécanique celeste, 5 томовъ. Ц. 85 fr.
- Poincaré. Les methodes nouvelles de la mécanique céleste, 1891 1896. Ц. 26 fr.

ЗАДАЧИ.

Аналитическая Геометрия на плоскости.

Прямая линия и окружность. (По тексту стр. 1—18 и чертёж).

- 1) Построить треугольник, вершины которого суть $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-5, -6)$, если за 1 длину принять 1 сантиметр.
- 2) Найти расстояние между точками (a, b) от начала координат.
- 3) Найти расстояние точки $(3, 4)$ от начала координат.
- 4) Написать уравнение окружности, центр которой находится в начале координат, а радиус равен 5.
- 5) Найти точку пересечения прямых $3x + 5y = 13$; $4x - y = 2$.
- 6) Написать уравнение прямой, перескакивающей ось y на расстоянии равном 3 от начала и составляющей с осью x угол в 30° .
- 7) Написать уравнение прямой, перескакивающей ось x на расстоянии равном a от начала и составляющей с осью y угол, тангенс которого равен k .
- 8) Написать уравнение прямой, отсекающей от оси x отрезок равный 5 и от оси y отрезок равный (-3) .
- 9) Начертить дугу окружности $\frac{c}{3} + \frac{y}{2} = 1$, принимая за 1 длину сантиметр.
- 10) Начертить прямую $\frac{c}{3} + 4\frac{y}{2} = 1$, принимая за 1 длину сантиметр.
- 11) Начертить прямую $x - y = 1$, принимая за 1 длину сантиметр.
- 12) Написать уравнение прямой, проходящей через точки $(2, 3)$ и (-8) .
- 13) Написать уравнения прямых, служащих сторонами треугольника задачи 1-ой.
- 14) Написать уравнение прямой, проходящей на расстоянии 7 от начала, если расстояние это составляет с осью x угол в 30° .
- 15) Найти длины сторон треугольника задачи 1-ой.
- 16) Написать уравнение окружности, имеющей радиус, равный 7 и центр в точке $(2, 3)$.
- 17) Найти абсциссу середины прямой, соединяющей точки $(5, 10)$ и $(-1, -1)$.
- 18) Прямую, соединяющую точки $(2, 3)$, $(4, -5)$ делить в 3 части. Найти координаты точки деления, ближайшей к точке $(2, 3)$.

19) Координаты двух точек суть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Найти уравнение прямой, соединяющей начало в среднем разстоянии между данными точками.

20) Найти тангенсы угла, заключенного между прямыми:

$$y = 3x + 5$$

$$y = 2x - 1$$

21) Найти тангенсы угла, заключенного между прямыми:

$$3x + 5y - 2 = 0$$

$$2x + 7y + 1 = 0$$

22) Найти тангенсы угла, заключенного между прямыми:

$$y = kx$$

$$y = k'x$$

23) Найти тангенсы угла, заключенного между прямыми:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

24) Найти координаты вершин треугольника, уравнения сторонъ котораго суть:

$$2x - 5y + 11 = 0$$

$$6x - y - 9 = 0$$

$$x + y + 2 = 0$$

25) Написать уравнения диагоналей параллелограмма, уравнения сторонъ котораго суть:

$$x = a, \quad x = a'; \quad y = b, \quad y = b'$$

26) Найти координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма, уравнения сторонъ котораго суть:

$$x = 5; \quad x = 2; \quad y = 8; \quad y = 3.$$

27) Найти уравнение перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x, y) на прямую $y = kx + b$.

28) Найти уравнения сторонъ треугольника (x, y) , (x', y') , (x'', y'')

29) Найти уравнения высотъ треугольника (x', y') , (x'', y'') , (x''', y''')

30) Найти разстояние начала координатъ отъ прямой

$$3x + 4y + 20 = 0.$$

31) Найти разстояние точки $(2, 3)$ отъ прямой

$$2x + y - 1 = 0$$

32) Найти расстояние начала отъ прямой

$$a(x - a) + b(y - b) = 0.$$

33) Найти уравнение прямой γ дѣлящей пополамъ уголъ между прямыми α и β

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

$$x \cos \beta + y \sin \beta = p'$$

34) Найти уравнение биссектора угла, составляемаго прямыми:

$$Ax + By + C = 0$$

$$A'x + B'y + C' = 0$$

35) Найти площадь треугольника (x', y') , (x'', y'') , (x''', y''') .

36) Найти площадь треугольника, составленнаго точками (x', y') , (x'', y'') и началомъ координатъ.

37) Найти условие, чтобы три точки (x, y') , (x'', y'') , (x''', y''') лежали на одной прямой.

38) Определить площадь треугольника $(2, 1)$, $(3, -2)$, $(-4, 1)$.

39) Написать уравнение прямой, проходящей какъ нибудь чрезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$Ax + By + C = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

40) Найти уравнение прямой, соединяющей начало съ точкою пересѣченія прямыхъ

$$Ax + By + C = 0; A_1x + B_1y + C_1 = 0.$$

41) Найти уравнение прямой, проходящей чрезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, \quad \frac{x}{1} - \frac{y}{2} = 1$$

и чрезъ начало.

42) Даны уравненія трехъ прямыхъ:

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0, \quad A''x + B''y + C'' = 0.$$

Что выразаетъ собою условіе:

$$l(Ax + By + C) + m(A'x + B'y + C') + n(A''x + B''y + C'') = 0,$$

гдѣ l , m , n суть какія нибудь постоянныя.

43) Пользуясь рѣшеніями задачъ 29 и 42 доказать аналитически, что всѣ три высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.

44) Определить геометрическое мѣсто вершинъ C треугольниковъ, описанныхъ на данное основаніе AB и при томъ такихъ, въ которыхъ

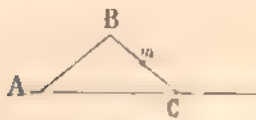
$$AC^2 - CB^2 = m^2.$$

*) Прямая дѣлящая уголъ пополамъ называется *биссекторомъ* этого угла.

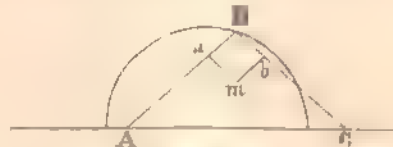
Эллипс. (По тексту параграфы 28 - 41).

15) Прямолинейный отрезок длины p движется так, что один конец его ходит по известной прямой, тогда край другой по другой прямой, перпендикулярной к первой. Определить траекторию (дугу), описываемую точкою m , лежащею на отрезке и находящеюся на расстоянии a от одного из его концов.

16) Две равные линейки AB и BC соединены шарниром в B . Линейка AB вращается около A . Точка C ходит по прямой AM .



Фиг. 306.



Фиг. 307.

Найти дугу описываемую точкою m отвлечши и гл. полюды на BC (фиг. 306).

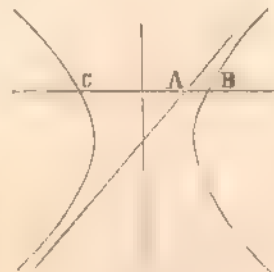
17) По данным фокусам и большой полуоси построить, помощью циркуля, сколько угодно точек эллипса.

18) Две прямые AB и BC одинаковой известной длины p пересекаются в точке B ходят и по сурживости. Концы A и C прямых ходят по диаметру AM и окружности. Сеть B описываемы и прямые BA и BC равные между собою отрезки q и на них достраиваемы ромб $Babm$. Определить геометрическое место точки m (фиг. 307).

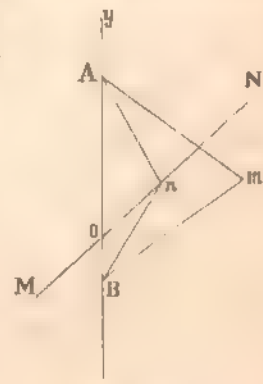
Гипербола (По тексту параграфы 42 - 47)

19) Доказать, что ось вблизи гиперболы и одна из ее асимптот отклоняется на прямых, параллельных действительной оси, на отрезки AB и AC , произведение которых есть величина постоянная, равная квадрату действительной полуоси (фиг. 308).

50) Доказать, что, при равных ординатах, разность квадратов абсцисс гиперболы и асимптоты есть величина постоянная равная квадрату действительной полуоси.



Фиг. 308.



Фиг. 309.

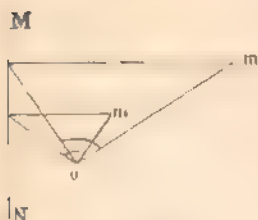
51) Прямые Am и Bm равной длины p пересекаются в точке m (фиг. 309); прямые An и Bn равной длины q пересекаются в точке n . Точки A и B ходят

по прямой ou . Доказать, что если поведем точку n по прямой MN , то точка m опишет ветвь гиперболы.

52) Построить помощью циркуля точки мочно точки гиперболы с данным фокусамъ и большой полуоси a .

Парабола. (По тексту параграфы 48—50).

53) По даннымъ фокусу и директрисе l построить сколько угодно точек параболы и помощью циркуля и линейки



Фиг. 310

54) Дана точка O и прямая MN (фиг. 310). Строимъ прямые углы, вершины которых находятся въ O . Изъ точки пересѣченія одной изъ сторонъ такого прямого угла съ MN составляемъ перпендикуляръ къ MN . Найти геометрически мочно точку m пересѣченія этого перпендикуляра съ другою стороною прямого угла.

Полярныя координаты. (По тексту параграфы 51—55).

55) Выразить въ полярныхъ координатахъ уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

56) Выразить въ полярныхъ координатахъ уравнение окружности проходящей чрезъ полюсъ и имеющей центръ на полярной оси.

57) Выразить въ полярныхъ координатахъ уравнение прямой, перпендикулярной къ полярной оси и проходящей на расстоянии a отъ полюса.

58) Преобразовать въ полярныя координаты уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

принявъ центръ за полюсъ, большую ось за директрисную ось.

59) Преобразовать въ полярныя координаты уравнение $y = 2px$ параболы, принявъ вершину за полюсъ, ось параболы за полярную ось.

Преобразование координатъ (§§ 56—61)

60) Какъ выразится уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипса, если повернуть оси координатъ на уголъ φ .

61) Какъ выразится уравнение параболы $y = 2px$, если повернуть оси координатъ на уголъ φ .

62) Какъ выразится уравнение параболы если, сохранивъ направление осей координатъ, взять начало въ точке пересѣченія съ параболою с. директрисы.

63) Вывести формулы преобразования прям угловыхъ координатъ x, y въ такія космические x', y' , въ которыхъ ось x' совпадаетъ бы съ осью x , начало с. выдвинуто съ началомъ координатъ x, y , уголъ же между осями x' и y' былъ бы θ .

- 64) Повернуть эллипс на 90° ,
 65) Выразить уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

въ координатахъ X, Y задачи 63-ей.

Задачи къ параграфамъ 62—66.

- 66) Какая кривая выражается уравнениемъ

$$3x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 5y - 20 = 0.$$

- 67) Какая кривая выражается уравнениемъ

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 5x + 3y - 10 = 0$$

Аналитическая Геометрія въ пространствѣ.

Задачи къ параграфамъ 67—76.

- 68) Что представляетъ собою въ пространствѣ уравнение $x = 2^y$?
 69) Что представляетъ собою въ пространствѣ уравнение:

$$x^2 + y^2 = 25?$$

- 70) Что представляетъ собою въ пространствѣ совокупность уравнений

$$x = 0$$

$$y = 0$$

- 71) Какою совокупностью уравнений выражается въ пространствѣ ось x ?

- 72) Что представляетъ собою въ пространствѣ совокупность уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

$$z = 3$$

- 73) Что представляетъ собою въ пространствѣ уравнение $y = kx^2$?

- 74) Что представляется въ пространствѣ уравнениемъ $y = 2px^2$?

Задачи къ параграфамъ 77—84.

75) Новая система координатъ X, Y, Z получается изъ прежней x, y, z поворотомъ этой последней около оси y на уголъ φ , при чемъ углы считаются въ направленіи отъ положительнаго конца оси z къ положительному концу оси x . Написать формулы преобразования координатъ x, y, z въ X, Y, Z .

76) Какъ выразится въ координатахъ X, Y, Z плоскость $x = a$, если координаты x, y, z связаны съ координатами X, Y, Z формулами (1.78)?

77) Сопоставивъ съ формулами (124) определить, что выражаетъ собою уравненіе:

$$r \cdot \sin \varphi = c$$

въ сферическихъ координатахъ.

Задачи къ параграфамъ 85—115.

78) Определить углы составленные диагональю куба съ его ребрами, если ребро куба равно a .

79) Определить уголъ, составленный диагональю куба выходящею изъ его вершины O , съ выходящею изъ O диагональю квадрата составившаго одну изъ граней куба.

80) Определить уголъ, составляемый плоскостями:

$$3x + 5y - 2z + 5 = 0$$

$$2x - 3y + 5z - 1 = 0$$

81) Определить уголъ, составляемый плоскостями:

$$3x + 5y - 2z + 5 = 0$$

$$6x + 10y - 4z + 7 = 0$$

82) Определить длину перпендикуляра, опущеннаго изъ начала на плоскость, отсчитывающую на осяхъ x , y , z соответственно отрезки a , b , c .

83) Написать уравненіе прямой, проходящей чрезъ точки $(2, 3, 1)$, $(5, -6, 2)$.

84) Показать, что эллипсоидъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

въ которомъ $a > b > c$ пересѣкается сферою $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ по окружностямъ двухъ круговъ.

85) Показать, что сѣченія эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

плоскостями параллельными плоскостямъ круговъ, являющихся въ заданн. 84, всѣ круговыя.

86) Найти метрическое мѣсто центровъ круговыхъ сѣченій эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Дифференціальное исчисленіе.

Задачи къ §§ 126—150.

87) $d(a + bx)$

89) $d(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1}$

88) $d(Ax^m + Bx^n + Cx^b)$

+ . . . + A_2 x^2 + A_1 x + A_0)

- | | |
|---|---|
| 90) $d(3x^2 + 5x^4 + 6x^7 + 3x^9)$ | 105) $d\left(\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\right)$ |
| 91) $d[(a + bx)(m + nx)]$ | 106) $d(\sqrt{a^2 + x^2})$ |
| 92) $d[(ax^2 + bx + c)(Ax^2 + Bx + C)]$ | 107) $d\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$ |
| 93) $d[(ax^2 + bx + c)x]$ | 108) $d(\sin x \cdot \sqrt{a^2 + x^2})$ |
| 94) $d\left[\frac{ax + b}{Ax + B}\right]$ | 109) $d\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{\sin x}$ |
| 95) $d\left[\frac{ax^2 + bx + c}{Ax^2 + Bx + C}\right]$ | 110) $d(\lg(ax^2 + bx + c))$ |
| 96) $d\left[\frac{3x^2 + 5x^4}{2x^5 - 3x^7}\right]$ | 111) $d(\lg \sin x)$ |
| 97) $d \sin(ax^2 + b)$ | 112) $d(x^x)$ |
| 98) $d[(ax^2 + bx + c) \sin x]$ | 113) $d(e^{e^x})$ |
| 99) $d[\sin(ax^2 + bx + c)]$ | 114) $d(e^{-x^2})$ |
| 100) $d[\sin x \cdot \cos x]$ | 115) $d\left[\frac{(x+1)(x+3)^{\frac{1}{2}}}{(x+2)^4}\right]$ |
| 101) $d\frac{\sin x + \cos x}{ax + b}$ | 116) $d\left[\lg\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}}\right]$ |
| 102) $d(\sqrt{ax + b})$ | 117) $d[\lg(\lg x)]$ |
| 103) $d(\sqrt{ax^2 + bx + c})$ | 118) $d[e^{e^{\sin x}}]$ |
| 104) $d\left(\frac{1}{\sqrt{ax + b}}\right)$ | 119) $d(x^{\sin x})$ |

Задачи къ § 152.

- 120) Найти полный дифференциал dz отъ $z = \frac{y}{x}$
- 121) dz отъ xy
- 122) dz отъ $z = 5x^3 - 3x^2y + 5xy^2 - 10y$
- 123) dz отъ $z = \lg \lg\left(\frac{x}{y}\right)$
- 124) du отъ $u = \sin x \cdot \cos y$,

Задачи къ § 154. Определить $\frac{dy}{dx}$ изъ

- 125) $y = e^x + e^y + x$
- 126) $y = 1 + xe^y$
- 127) $x \sin y - \cos y + \cos(2y) = 0$

128) $y \sin x - \cos(x - y) = 0$

129) $y - ar \sin x + e^x = 0$

Задачи къ § 155.

130) Определить $\frac{d^3y}{dy^3}$, если $y = x^5$.

131) Определить $\frac{d^4y}{dx^4}$, если $y = \sin x$.

132) Определить $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $y = \cos^2 x$.

133) Определить $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $y = \lg x$.

134) Определить $\frac{d^n y}{dx^n}$, если $y = (a - bx)^m$.

135) Определить $\frac{d^n y}{dx^n}$, если $y = \frac{1}{x}$.

136) Проверить равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ на примѣрѣ $u = \frac{x+y}{\sin(x-y)}$.

137) Проверить равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ на примѣрѣ $u = e^x - \sin y + y^2$.

138) Определить $\frac{d^2 u}{dx^2}$, если $u = x^2 - \sin y + y^2$.

139) Найти $d^2 u$, если $u = e^x \cdot \sin y$.

Задачи къ § 156.

140) Во что обращается

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + e^x \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 = 0$$

если принять y за независимое переменное.

141) Дано

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1.$$

доказать, что при $x = a \cdot \cos \omega$ получается:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{b}{a} \operatorname{tg} \omega$$

142) Дано

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0$$

Во что оно обращается, если возьмемъ за независимое переменное t , если при этомъ $x = \cos t$.

Задачи къ §§ 157—158.

143) Во что обращается $x^2 - 3x + 4x - 5$, если x обратится въ $x + 2$?

144) Дано $f'(x) = x^6 - x^3 + 1$. Определить $f'(x + 3)$

145) Показав, что $f'(x) = \sqrt{1+x}$, разложить в ряд $\sqrt{1+x}$

Задачи къ §§ 157—165.

146) Разложить в рядь $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

147) Разложить в рядь $\arcsin x$.

148) Разложить в рядь $(\arcsin x)^2$.

149) Разложить в рядь $\sin(m \arcsin x)$. Загль, положивъ $\arcsin x = u$, доказать, что:

$$\sin(mu) = m \sin u + \frac{m(1-m^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 u + \frac{m(1-m^2)(9-m^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} \sin^5 u + \dots$$

150) Разложить в рядь $\cos[m \arccos x]$. Загль, положивъ $\arccos x = u$, доказать, что:

$$\cos(mu) = 1 - \frac{m^2 \cos^2 u}{1 \cdot 2} + \frac{(1-m^2)(1-m^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 u - \dots$$

Задачи къ § 167—169. Вычислить

151)
$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{x^2 - \sqrt{a^3 x}}{\sqrt{ax} - a} \right]_{x=a}$$

152)
$$\lim_{x \rightarrow 7} \left[\frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} \right]_{x=7}$$

153)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\lg \cos x}{\sin^2 x} \right]_{x=0}$$

154)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a^x - 1}{xu^x} \right]_{x=0}$$

Показать, что:

155)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x - e^{-x}}{\lg(1+x)} \right]_{x=0} = 2$$

156)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x + \sin x}{x} \right]_{x=\infty} = 1$$

157)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^x + \sin x}{x + \sin x} \right]_{x=\infty} = \infty$$

Задачи къ §§ 170—172 Определить наибольшее и наименьшее значения слѣдующихъ функций:

158)
$$x^3 - 12x^2 + 45x + 30 = y$$

159)
$$x^3 - 75x^2 + 1620x - 1000 = y$$

$$160) \quad \frac{1-x}{(1+x)^2} = y$$

$$161) \quad \frac{x}{\lg x} = y$$

162) Доказать, что изъ всѣхъ треугольниковъ, у которыхъ сумма основаній и высоты одинакова, наибольшую площадь имѣетъ тотъ, у котораго основаніе равно высотѣ.

163) У какого изъ прямоугольныхъ треугольниковъ, опирающихся на одну и ту же гипотенузу, сумма катетовъ наибольшая.

164) Окно состоитъ изъ прямоугольника, завершеннаго полукругомъ. При данномъ периметрѣ (длинѣ линии ограничивающей окно) требуется найти такую высоту и ширину окна, чтобы оно давало наибольшее количество свѣта.

$$165) \text{ Найти наибольшее } z \text{ для } z = x^2 - xy + y^2 \quad 3y.$$

Задачи къ §§ 173—178.

166) Найти уравнение касательной къ кривой $x^2 + y^2 = a^2$ и определить длину ея отрезка, отсекаемаго осями координатъ.

$$167) \text{ Найти уравнение касательной къ кривой } y = x^2.$$

$$168) \text{ Определить длину подкасательной кривой } x = e^y.$$

$$169) \text{ Найти уравнение касательной къ кривой } r = a^2 \cos(2\varphi).$$

Задачи къ §§ 179—182.

170) Въ какихъ промежуткахъ кривая $y = \cos x$ обращена выпуклостью къ оси x ?

171) При какихъ значеніяхъ аргса кривая $y = \cos x$ имѣетъ точки перегиба?

172) Определить координаты той точки параболы, въ которой элементъ ея наклоненъ къ оси x подъ угломъ 45° .

Задачи къ §§ 183—184.

173) Найти осгибающую эллипсовъ, направленные главныхъ осей которыхъ одно и то же и сумма полуосей есть величина постоянная.

174) Найти осгибающую эллипсовъ $(x-a)^2 + y^2 = b^2$, удовлетворяющихъ условію $b^2 = 4ma$.

Задачи къ §§ 185—189.

$$175) \text{ Определить радиусъ кривизны кривой } y' = px + qx$$

176) Определить радиусъ кривизны и развѣртку полукубической параболы $3ay^2 = 2x^3$.

$$177) \text{ Определить координаты центра кривизны эллипса}$$

$$y^2 = \frac{x^2}{2a - 1}$$

Задача къ §§ 190—192.

178) Определить радиус кривизны дуги скалы $r = a \cos(2\varphi)$, и угол, составляемый радиусом-вектором съ касательною.

Задачи на §§ 193—232 Исследование вида кривыхъ.

179) Исследовать видъ дуги скалы $r = a' \cos(2\varphi)$

180) Дана точка O и прямая MN . Через O проведена прямая и на ней, отъ точки пересѣченія ихъ съ MN отсѣдываются въ обѣ стороны одинаковые отрезки b . Расстояние O отъ MN равно a . Найти уравнение геометрическаго мѣста концовъ этихъ отрезковъ и объяснить видъ этой кривой.

181) Дана окружность и диаметр ея AB , длина котораго равна a . Изъ конца A этого диаметра проводится прямая и на ней, отъ точки пересѣченія ихъ съ окружностью, отсѣдываются въ обѣ стороны одинаковые отрезки. Найти уравнение геометрическаго мѣста концовъ этихъ отрезковъ и объяснить видъ его.

182) Найти абсциссу точки перегиба кривой $xy = 2a + 2ax - x^2$.

183) Найти абсциссы точекъ перегиба кривой $ax^3 + by^3 = c^3$.

184) Объяснить видъ кривой $x^4 - ax^2y + by^3 = 0$.

185) Найти уравнение и объяснить видъ кривой, имѣющей два фокуса и средней осью гѣмъ свойствомъ, что произведение радиусовъ-векторовъ есть величина постоянная равная a^2 :

186) Геометрическое мѣсто оснований перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ данной точки на касательныя къ данной кривой и называемая *подвижною* кривою даннаго кривой по отношенію къ данной точкѣ. Найти уравнение и определить видъ подвижной эллипса по отношенію къ центру.

187) Доказать, что касательная, проведенная къ параболѣ въ точкѣ ея (x, y) , пересѣкаетъ ось x въ разстояніи x отъ вершины параболы.

188) Доказать, что отрезокъ, отсѣаемый асимптотами на касательной къ гиперболѣ, дѣлится пополамъ въ точкѣ прикосновенія.

Задачи къ §§ 233—246.

189) Написать уравнение касательной къ кривой происходящей отъ пересѣченія цилиндровъ $x^2 + y^2 = R_1^2$, $y^2 + z^2 = R_2^2$.

190) Написать уравнение плоскости нормальной къ кривой задачи 189-ой.

191) Написать уравнение плоскости касательной къ эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

192.) Определить косинусы угловъ наклона къ осямъ координатъ нормали эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

193.) Написать уравнение нормали къ эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Интегральное исчисленіе.

Задачи къ § 255—256. Интегрирование по частямъ.

194) $\int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ 196) $\int \operatorname{arctg} x \cdot dx$

195) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} x dx$ 197) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctg} x \cdot dx$

Задачи къ § 257. Интегрирование подстановкою.

198) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ 200) $\int \frac{x^2 dx}{a + bx}$

199) $\int \frac{x dx}{a^4 + x^4}$ 201) $\int \frac{\cos x \cdot dx}{\sin^2 x}$

Задачи къ §§ 259—262. Интегрирование рациональныхъ дробей.

202) $\int \frac{(x^3 - x + 2) dx}{x^4 - 5x^2 + 4}$

203) $\int \frac{x^2 dx}{(a+bx)(c+dx)(e+fx)}$

Задачи къ §§ 263—266. Интегрирование радикальныхъ функций

204) $\int \frac{1 + \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$

205) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x + x^2}}$

206) $\int \frac{dx}{\sqrt{mx^2 + nx + p}}$

Задачи къ §§ 267—269. Интегрирование трансцендентныхъ функций.

207) $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$

209) $\int \cot y \, dx$

208) $\int \operatorname{tg} x \, dx$

210) $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}$

Задачи къ §§ 271—278. Вычисленіе площадей.

211) Площадь кривыя $y = x$, ограниченная осью абсциссъ, кривою и ординатою при $x = a$.

212) Площадь лемнискаты: $r = a \sqrt{\cos 2\varphi}$.

Задачи къ §§ 279—284. Выпрямленіе дугъ.

213) $x^3 + y^3 = a^3$.

Задачи къ § 287. Среднія значенія функций.

214) Определить среднее значеніе функции x^3 въ пределахъ отъ 2 до 5

215) Определить среднее значеніе $\sin \varphi$ въ пределахъ отъ 0 до π

216) Определить среднюю величину ординаты параболы $y = 2px$ въ пределахъ отъ $x = 0$ до $x = a$.

Задача къ § 288. Правило Симпсона.

217) Квадратъ завершилъ полуугломъ. Раздѣливъ нижнюю сторону квадрата на 8 частей определить площадь всей фигуры по правилу Симпсона и найти ошибку сравнительно съ точною величиною этой площади

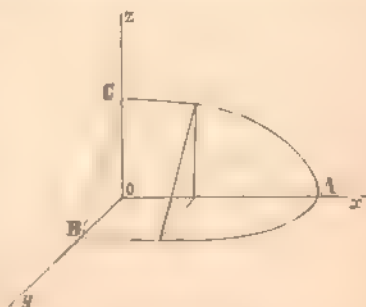
Вычисленіе объемовъ.

Задачи на §§ 289.

218) Определить объемъ тѣла при вращеніи отъ вращения параболы около оси и ограниченный плоскостью, проведенною перпендикулярно оси на разстояніи x отъ вершины.

Задачи на §§ 290—291.

219) Эллиптическій цилиндръ пересѣкается (фиг. 311) плоскостью (x, y) по эллипсу, полуоси котораго суть $OA = a$; $OB = b$; плоскость (x, z) пересѣкается цилиндромъ по эллипсу, полуоси котораго суть $OA = a$; $OC = c$. Образующія цилиндра параллельны BC . Определить объемъ тѣла $OABC$, ограниченнаго цилиндромъ и плоскостями координатъ.



Фиг. 311

220) Определить объем, заключенный между цилиндрами

$$x^2 + z^2 = a^2; \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Задача къ § 293.

221) Вычислить

$$\int_0^a \int_{y=0}^{y=az} \int_{z=0}^{z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx \, dy \, dz.$$

Задача къ §§ 294—296.

222) Вычислить поверхность параболоида, образующую вращением параболы $y = 2px$ около оси x и ограниченную плоскостью $x = a$

Интегрирование дифференціальныхъ уравненій.

Задачи къ § 298.

223) $x^2 \, dy = (y + a) \, dx.$

224) $xy \, dx = (a - x)(y - b) \, dy.$

Задача къ § 299.

225) $x \, dx + y \, dy = 2ny \, dx.$

Задачи къ § 306.

226) $x \, dx + y \, dy = dy \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$

227) Найти кривую, касательная которой находилась бы на одинаковомъ разстояніи отъ начала.

Задачи къ § 314 Уравненія съ частными производными.

228) $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}$

229) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{x+y}$

230) $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = z.$

М е х а н и к а.

Задачи къ § 346.

1) По уравненіямъ движенія $x = at$, $y = 0$; $z = \sin(at)$ определить траекторию.

2) По уравненіямъ движенія

$$x = a \sin(mt) + b \cos(mt), \quad y = a \cos(mt) - b \sin(mt), \quad z = 0$$

опредѣлить траекторію.

3) По уравненіямъ движенія $x = a \sin t$, $y = b \cos t$; $z = 0$ опредѣлить траекторію.

4) По уравненіямъ движенія $x = R \cos t$; $y = R \sin t$; $z = ct$ опредѣлить траекторію.

Задачи къ §§ 348—349.

5) Опредѣлить скорость и ускореніе въ прямолинейномъ движеніи.

$$x = \sin(at); \quad y = 0; \quad z = 0.$$

6) Опредѣлить скорость и ускореніе въ прямолинейномъ движеніи

$$x = a; \quad y = 0; \quad z = e^t.$$

Задача къ § 351.

7) Опредѣлить силу лодъ вліяніемъ которой можетъ происходить движеніе точки m , данное въ задачѣ 5-ой.

Задачи къ § 358.

8) Опредѣлить движеніе точки брошенной вверхъ въ воздухѣ, принимая, что сопротивленіе воздуха пропорционально квадрату скорости.

9) Съ какою скоростью можно бросить точку съ поверхности земли по направленію въ луну для того, чтобы точка достигла до луны. Радиусъ земли можно принять равнымъ 640000 метривъ, расстояние между центрами земли и луны равнъ 60 земнымъ радиусамъ; масса земли въ 81 разъ болѣе массы луны.

Задачи къ §§ 363—364.

10) Опредѣлить скорость, ускореніе и направленія ихъ въ движеніи, данному въ задачѣ 1-ой.

11) Опредѣлить скорость, ускореніе и направленія ихъ въ движеніи, данному въ задачѣ 3-ей.

12) Опредѣлить скорость, ускореніе и направленія ихъ въ движеніи, данному въ задачѣ 4-ой.

РЪШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

2) $\sqrt{a^2 + b^2}$.

4) $x^2 + y^2 = 25$.

3) 5.

5) (1, 2).

6) $y = x \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + 3$ Известно, что $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Следовательно

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Итак искомое уравнение таково $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 3$.

7) $x = ky + a$.

8) $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$.

9) Откладываем на оси x отъ начала длину OA равную 3 сантиметрамъ, на оси y откладываемъ длину OB равную 2 сантиметрамъ. Прямая, соединяющая полученные на осяхъ точки A и B есть искомая.

10) Напишемъ данное уравнение въ видѣ

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

Откладываем на отрицательныхъ частяхъ осей отъ начала длины на оси x 3 сантиметра, на оси y 2 сантиметра, соединяемъ полученные точки прямою.

11) Данное уравнение можно представить такъ.

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1.$$

Поэтому, отложивъ на положительной оси x и на отрицательной части оси y отъ начала длины равныя одному сантиметру, соединяемъ полученные точки прямою.

12) По формулѣ (17) пишемъ:

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{5}$$

или по формулѣ (18) пишемъ

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}$$

или

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}.$$

13) По формулѣ (18) находимъ:

для стороны, соединяющей (2, 3) съ (4, — 5) уравнение:

$$y = -4x + 11.$$

для стороны, соединяющей (4, — 5) съ (— 3, — 6) уравнение:

$$y = \frac{1}{7}x - \frac{39}{7},$$

для стороны, соединяющей (— 3, — 6) съ (2, 3) уравнение:

$$y = \frac{9}{5}x - \frac{3}{5}.$$

14) $x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ = 7$. По $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Следовательно искомое уравнение будетъ: $\sqrt{3}x + y = 14$.15) Сторона, соединяющая точки (2, 3) съ (4, — 5) равна $\sqrt{68}$.Сторона, соединяющая точки (4, — 5) съ (— 3, — 6) равна $\sqrt{50}$.Сторона, соединяющая точки (— 3, — 6) съ (2, 3) равна $\sqrt{106}$.

16) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 49.$

17) $x = 4; y = 3.$

18) $x = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2}{3} = \frac{5}{3}; y = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 3}{3} = \frac{11}{3}$

19) Координаты середины суть:

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2}; b = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Уравнение искомой прямой таково:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} x$$

20) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 - 2}{1 + 3 \cdot 2} = \frac{1}{7}.$

21) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \cdot 5 - 3 \cdot 7}{2 \cdot 3 + 5 \cdot 7} = \frac{-11}{11}.$

22) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k - k'}{1 + kk'}.$

23) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{b^2 - a^2}$

24) $(2, 3), (1, -3), (-3, 1)$.

25) Уравнение диагонали, проходящей чрезъ вершины $(a, b), (a', b')$ таково:

$$y = \frac{b - b'}{a - a'} x + \frac{ab' - a'b}{a - a'}$$

Уравнение диагонали, проходящей чрезъ вершины $(a, b'), (a', b)$ таково:

$$y = \frac{b' - b}{a - a'} x + \frac{ab - a'b'}{a - a'}$$

26) Уравнение одной изъ диагоналей таково:

$$y = \frac{4}{3} x + \frac{1}{3}$$

уравнение другой диагонали таково:

$$y = -\frac{4}{3} x + \frac{29}{3}$$

Координаты точки пересѣченія диагоналей будутъ $(\frac{7}{2}, 5)$

27) Изъ условію перпендикулярности (36) заключаемъ, что уравнение искомаго перпендикуляра имѣетъ видъ

$$y = -\frac{1}{k} x + b'$$

Точка (x', y') по условію задачи ему удовлетворяетъ; поему

$$y' = -\frac{1}{k} x' + b'$$

Вычитая одно изъ другого, получимъ:

$$y - y' = \frac{1}{k} (x - x')$$

28) По формулѣ (18):

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''} x + \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''}$$

$$y = \frac{y'' - y'''}{x'' - x'''} x + \frac{x'y''' - x'''y''}{x'' - x'''}$$

$$y = \frac{y''' - y'''}{x''' - x'''} x + \frac{x''y''' - x''y''}{x''' - x''}$$

29) По задачамъ 27 и 28 получимъ:

$$y - y''' = \frac{x'' - x'''}{y' - y''} (x - x''')$$

$$y - y' = \frac{x''' - x''}{y'' - y'''} (x - x'')$$

$$y - y'' = \frac{x' - x''}{y''' - y''} (x - x')$$

$$30) \quad \delta = \frac{20}{\sqrt{9+16}} = 4.$$

$$31) \quad \delta = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 4}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

$$32) \quad \delta = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

33) Каждая точка биссектора находится в одинаковомъ разстояніи отъ сторонъ угла, раздѣляемаго имъ пополамъ. Поэтому по формулѣ (41) получимъ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = x \cos \beta + y \sin \beta - p'.$$

34) По формулѣ (45) получимъ:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

35) Длина стороны (x', y') , (x'', y'') равна $\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$.
Уравненіе ея:

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''} x + \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''};$$

или

$$(y' - y'')x - (x' - x'')y + x'y'' - x''y'.$$

Если принять эту сторону за основаніе, то высота треугольника будетъ равна разстоянію этой стороны отъ (x''', y''') . По формулѣ (45) это будетъ

$$\frac{(y' - y'')x''' - (x' - x'')y''' + x'y'' - x''y'}{\sqrt{(y' - y'')^2 + (x' - x'')^2}}.$$

Слѣдовательно площадь треугольника равна:

$$\frac{(y' - y'')x''' - (x' - x'')y''' + x'y'' - x''y'}{2}.$$

Эту величину можно представить въ такомъ легко запоминаемомъ видѣ

$$\frac{y'(x''' - x'') + y''(x' - x''') + y'''(x'' - x')}{2}$$

36) Согласно предыдущей задачѣ искомая площадь равна

$$\frac{-y'x'' + x'y''}{2} \quad \text{или} \quad \frac{x'y'' - x''y'}{2}.$$

37) Если три точки лежатъ на одной прямой, то онѣ не образуютъ треугольника. Требуемое условіе выразится по этому тѣмъ, что площадь треугольника задачи 35-ой будетъ равна нулю. Итакъ условіе это таково.

$$y'(x''' - x'') + y''(x' - x''') + y'''(x'' - x') = 0.$$

38) Согласно задаче 35-ой получим:

$$1 \cdot (-1 - 3) + (-2) \cdot (2 + 4) + (-1) \cdot (1 - 1) = \frac{1}{2}.$$

Но площадь всегда положительна. Ответ $\frac{1}{2}$.

39) $Ax + By + C + m(A_1x + B_1y + C_1) = 0$, потому что величины x, y , удовлетворяющие и тому и другому уравнениям, прямых удовлетворяют и этому уравнению. Величина m произвольная, потому что уравнение выражает *какую-нибудь* прямую, проходящую через пересечение данных прямых.

40) $Ax + By + C + m(A_1x + B_1y + C_1) = 0$ должна пройти через начало. Следовательно должно удовлетвориться равенство

$$C + mC_1 = 0, \text{ откуда } m = -\frac{C}{C_1}.$$

Ответ:

$$Ax + By + C - \frac{C}{C_1}(A_1x + B_1y + C_1) = 0.$$

$$41) \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 - \left(x - \frac{y}{2} - 1\right) = 0.$$

или,
$$\frac{5y}{6} - \frac{x}{2} = 0; \text{ или } y = \frac{3}{5}x$$

42) Условие это выражает, что прямая

$$Ax + By + C = 0, A'x + B'y + C' = 0 \quad Ax + By + C'' = 0$$

проходит через одну точку (см. задачу 39).

43) Приведем к одному знаменателю уравнения высоты, данные в решении задачи 29-ой и сложим их, получим в результате тоже самое (при величине x и y) ноль. Таким образом уравнения высоты выполняются условие задачи (42), и следовательно высоты пересекаются в одной точке.

44) Принимаем AB за ось x ; перпендикуляр, составленный к AB из ее середины — за ось y . Обозначим через e половину основания AB , через (x, y) координаты вершины C . Имеем:

$$AC^2 = (e + x)^2 + y^2; \quad CB^2 = (e - x)^2 + y^2.$$

Следовательно $AC^2 - CB^2 = 4ex$. Уравнение искомого геометрического места будет $4ex = m^2$; или $x = \frac{m^2}{4e}$. Искомое геометрическое место — ось перпендикулярная к AB проведенная на расстоянии $\frac{m^2}{4e}$ от начала.

45) Примем за ось x прямую, по которой хлещат концы отрезка за оси координат. Пусть (x, y) суть координаты точки m . Обозначим через φ острый угол, составляемый отрезком с осью x , через $a + b$ длину от-

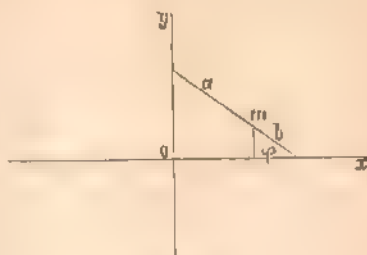
рыба. Составив соответственный задаче чертеж (фиг. 312), найдем:

$$x = a \cos \varphi; \quad y = b \sin \varphi; \quad \text{откуда}$$

$$\frac{x}{a} = \cos \varphi; \quad \frac{y}{b} = \sin \varphi.$$

Возвышая в квадрат и складывая, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Фиг. 312

уравнение эллипса. Искомое геометрическое место есть эллипс. Срединя отрезка (для которой $a = b$) описывается окружность, имевшую центр в началѣ, $x^2 + y^2 = a^2$. На этомъ сюжетѣ основанъ токарный станокъ Леонардо да Винчи для вытачивания эллипсовъ.

46) Эллипс.

17) Изъ фокуса F , какъ изъ центра, описываемъ дугу какою либо радиусомъ r ; изъ фокуса F' описываемъ дугу радиусомъ $2a - r$, гдѣ $2a$ есть большая ось. Пересѣченіе этихъ дугъ лежитъ на эллипсѣ, потому что

$$r + r' = 2a.$$

18) Примемъ диаметръ окружности за ось x , центръ ея — за начало. Не трудно доказать, что ординаты точекъ B и m находятся въ постоянномъ отношеніи, а потому если B описываетъ окружность, то (по § 32) m описываетъ эллипс.

19) Назовемъ абсциссу точки A чрезъ x , абсциссу точки B чрезъ x' . Абсцисса точки C , по симметріи гиперболы будетъ $-x'$. Поэтому,

$$AB = x' - x; \quad AC = x + x'.$$

Слѣдовательно $AB \cdot AC = (x' - x)(x + x') = x'^2 - x^2$. Но

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad y = \frac{b}{a} x.$$

Слѣдовательно:

$$x_1^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 + y^2); \quad x' = \frac{a y^2}{b^2},$$

$$x'^2 - x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 + y^2) - \frac{a^2 y^2}{b^2} = \frac{a^2 b^2}{b^2} = a^2$$

Итакъ: $AB \cdot AC = a^2$.

51) Примемъ oy за ось y , o за начало координатъ. Обозначимъ координаты точки n чрезъ (x, y') , координаты точки m чрезъ (x, y) . Положимъ: $Am = Bm = p$; $An = Bn = q$. Изъ чертежа фиг. 309 видно, что

$$y = y'; \quad x_1^2 = q^2 - (p^2 - x^2) = x^2 - (p^2 - q^2).$$

Уравнение MN пусть будет $y = kx'$ или $y^2 = k^2 x'^2$. Вспомогательные точки x', y' координаты x, y по иллучившимъ формуламъ, найдемъ:

$$y^2 = k^2 x^2 + k^2 (p^2 - q^2);$$

или:

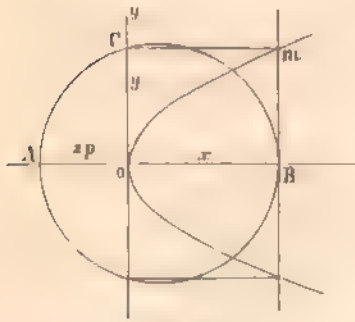
$$\frac{x^2}{p^2 - q^2} - \frac{y^2}{k^2 (p^2 - q^2)} = 1$$

Уравнение гиперболы, въ которой $a = \sqrt{p^2 - q^2}$; $b = k \sqrt{p^2 - q^2}$. Тангенсъ угла наклоненія асимптотъ будетъ:

$$tg \varphi = \frac{b}{a} = \frac{k \sqrt{p^2 - q^2}}{\sqrt{p^2 - q^2}} = k.$$

Слѣдовательно MN есть асимптота гиперболы, черпимой точкой m .

52) Въ гиперболѣ $r' = r - 2a$. Описываемъ изъ F' радиусомъ r дугу; изъ F'' описываемъ дугу радиусомъ $2a + r$. Въ пересѣченіи дугъ получится точка гиперболы.



Фиг. 313

53) Изъ уравненія параболы видимъ, что y есть среднепропорціональная между $2p$ и x . Откладываемъ по отрицательной части оси x отъ начала $OA = 2p$ (фиг. 313). Проводимъ окружность, проходящую чрезъ A и имѣющую центръ на оси x . Изъ пересѣченія ея C съ осью y проводимъ параллель къ оси x ; изъ конца диаметра B возставляемъ ординату. Пересѣченіе ея m съ правъ дивной параллелью будетъ точка параболы, потому что $y = Bm = oC = \sqrt{2px}$.

54) Уравненія стороны прямиго угла будутъ

$$y = kx, \quad y = -\frac{1}{k}x$$

(по формулѣ 36), если примемъ за ось x перпендикуляръ, опущенный изъ o на MN , точку o — за начало координатъ. Назовемъ чрезъ a разстояніе o до MN . Уравненіе MN будетъ $x = -a$. Ордината точки пересѣченія стороны $y = -\frac{1}{k}x$ съ MN будетъ $-\frac{a}{k}$ или $\frac{a}{k}$, такъ что $y = \frac{a}{k}$, откуда $k = \frac{a}{y}$. Въ эту величину въ уравненіе $y = kx$, получимъ $y = \frac{a}{y}x$ или $y^2 = ax$. Если $a = 2p$, то получится уравненіе параболы $y^2 = 2px$. Искомое геометрическое мѣсто есть параболы.

55) $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Слѣдовательно $Ar \cos \varphi + Br \sin \varphi + C = 0$.

56) Общее уравненіе окружности имѣющей центръ въ (a, b) таково

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Если двирядовить на оси x , т. е. $b = 0$. Если при этом окружность проходит чрезъ начало, то $R = a$. Следовательно уравнение указанной окружности въ Декартовыхъ координатахъ будетъ $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ или $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$. Въ полярныхъ координатахъ оно выражается такъ: $r^2 = 2Rr \cos \varphi$, или $r = 2R \cos \varphi$. Это уравнение можно было бы вывести прямо изъ чертежа, усмотревъ, что диаметръ $2R$ есть гипотенуза треугольника, въ которомъ r катетъ φ прилежащій ему углу.

$$57) \quad r \cos \varphi = a.$$

$$58) \quad \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1.$$

$$59) \quad r^2 \sin^2 \varphi = 2p r \cos \varphi; \text{ или } r \sin^2 \varphi = 2p \cos \varphi.$$

$$60) \quad \left(x \cos \varphi - y \sin \varphi \right) \frac{1}{a^2} + \left(x \sin \varphi + y \cos \varphi \right) \frac{1}{b^2} = 1$$

или

$$x \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) - 2xy \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin \varphi \cdot \cos \varphi + y^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2} \right) = 1.$$

$$61) \quad (x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 = 2p (x \cos \varphi - y \sin \varphi).$$

$$62) \quad y = 2p \left(x - \frac{p}{j} \right); \text{ или } y^2 = 2px - p^2.$$

63) Если x, y прямоугольныя, x', y' прямоугольныя координаты, то изъ чертежа (фиг. 314) слѣдуетъ:

$$x_1 = x - y \cdot \cotg \theta; \quad x = x' + y' \cos \theta.$$

$$y_1 = \frac{y}{\sin \theta}; \quad y = y' \sin \theta.$$

$$65) \quad \frac{(x' + y' \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{y' \sin \theta}{b^2} = 1$$

66) Здѣсь: $B^2 - 4AC = 16 - 16 = 4 > 0$. Типъ гиперболы.

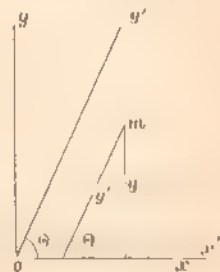
67) Здѣсь: $B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$. Типъ параболы.

68) Плоскость параллельную плоскости $(y = 0)$ проведенную на разстояніи 2 отъ начала.

69) Прямой кругліи эллипсы; радиусъ сечения его плоскостью перпендикулярной къ образующей равенъ a ; ось его направлена по оси x .

70) Ось s .

71) $y = 0; s = 0$.



Фиг. 314

72) Пересечение сферы, описанной из начала радиусом a с плоскостью, проведенной параллельно плоскости (x, y) на расстоянии 3 от нея. Это параллельный круг, проведенный на сфере под 30° широты, если принять (x, y) за плоскость экватора.

73) Плоскость, проходящую через ось z и наклоненную к плоскости (x, z) под углом тангенса которого равен k .

74) Параболический цилиндр, образующая которого проходит через лежащую в плоскости (x, y) параболу $y^2 = 2px$ и параллельна оси z .

$$75) \quad \begin{aligned} x &= X \cos \varphi - Y \sin \varphi, \\ y &= X \sin \varphi + Y \cos \varphi, \\ z &= Z. \end{aligned}$$

76) $X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma = 0$. Плоскость эта проходит через новое начало.

77) $z = c$ — плоскость параллельную (x, y) и находящуюся на расстоянии c от нея.

$$78) \quad \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(по формуламъ 125).

79) Косинусы угловъ наклоения диагонали куба будутъ

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Косинусы угловъ наклоения диагонали квадрата лежащаго в плоскости (x, z) будутъ:

$$\cos \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos \beta' = 0; \quad \cos \gamma' = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Косинус угла φ составляемаго диагональю квадрата и диагональю куба будетъ:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \beta \cdot \cos \beta' + \cos \gamma \cdot \cos \gamma' \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$80) \quad \cos \theta = \frac{3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 3^2 + 7^2}} = \frac{19}{38} = \frac{1}{2}.$$

$$\theta = 120^\circ.$$

$$81) \quad \cos \theta = \frac{3 \cdot 6 + 5 \cdot 10 + 8}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 2^2} \sqrt{6^2 + 10^2 + 4^2}} = \frac{76}{\sqrt{38} \sqrt{152}} = \frac{76}{\sqrt{38} \sqrt{38 \cdot 4}} = 1.$$

$\theta = 0$ Параллельность плоскостей видна и прямо из пропорциональности коэффициентов:

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = -\frac{2}{4}.$$

82) Уравнение плоскости таково:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Длина перпендикуляра равна:

$$\frac{+1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

Длину считаемъ положительною.

83) $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-3}{6-3} = \frac{z-1}{2-1}$ или: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{1}$.

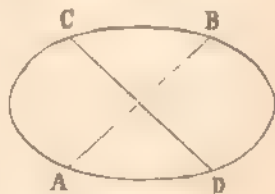
84) Исключая y изъ уравнений эллипсоида и сферы, получимъ:

$$x^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) = z^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right);$$

или:

$$x \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} = \pm z \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}.$$

уравнение 2-хъ плоскостей. Следовательно пересѣченіе эллипсоида со сферою тождественно съ пересѣченіемъ этихъ двухъ плоскостей со сферою. Но пересѣченіе плоскости со сферою даетъ кругъ. Следовательно пересѣченіе эллипсоида со сферою $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ состоитъ изъ двухъ круговъ AB и CD (фиг. 315) лежащихъ въ плоскостяхъ, проходящихъ чрезъ ось y описанныхъ изъ начала радиусами равными b . Плоскость одного изъ этихъ круговъ наклонена къ плоскости (x, y) подъ угломъ, тангенсъ котораго равенъ.



Фиг. 315

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}} = \frac{c \sqrt{a^2 - b^2}}{a \sqrt{b^2 - c^2}}.$$

85) Пользуясь рѣшеніемъ задачи 84-ой, вычисляемъ по формуламъ:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}};$$

угол φ по формуле найденной в задаче 84 кругового сечения кривизности (x, y) имеем следующие $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2(b - c)}}} = \frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{ab^2 - ac^2 - a^2b + b^2c}}$$

$$\sin \varphi = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 - c^2}}$$

Повернем ось z на угол φ к до оси y .

$$x = x' \cos \varphi - z \sin \varphi = \frac{x' a \sqrt{b^2 - c^2}}{b \sqrt{a^2 - c^2}} - \frac{z c \sqrt{a^2 - b^2}}{b \sqrt{a^2 - c^2}}$$

$$z = x \sin \varphi + z \cos \varphi = \frac{c c \sqrt{a^2 - b^2}}{b \sqrt{a^2 - c^2}} + \frac{z a \sqrt{b^2 - c^2}}{b \sqrt{a^2 - c^2}}$$

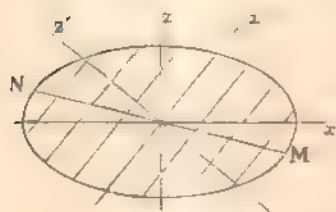
Уравнение эллипса для относительно новых осей x, z есть

$$\left(\frac{x' a \sqrt{b^2 - c^2}}{a b \sqrt{a^2 - c^2}} - \frac{z c \sqrt{a^2 - b^2}}{b \sqrt{a^2 - c^2}} \right)^2 + \left(\frac{c c \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2 c^2 (a^2 - c^2)} + \frac{z a \sqrt{b^2 - c^2}}{b^2 c^2 (a^2 - c^2)} \right)^2 = 1,$$

или:

$$z^2 \left(\frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2 b^2 (a^2 - c^2)} + \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2 c^2 (a^2 - c^2)} \right) + \frac{y^2}{b^2} + x'^2 \left(\frac{a^2(b^2 - c^2)}{a^2 b^2 (a^2 - c^2)} + \frac{c^2(a^2 - b^2)}{b^2 c^2 (a^2 - c^2)} \right) = 1$$

$$\frac{b^2(a^2 + c^2)}{a^2 b^2 c} z^2 + \frac{a^2 c^2}{b^2} z^2 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x'^2}{b^2} + \frac{-x z \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{b^2 - c^2}}{a c b^2} = 1.$$



Фиг. 316.

Пологая здесь $x_1 = m$ где m постоянное получим уравнение в котором коэффициенты при y^2 и при x_1^2 одинаковы. Это уравнение окружности. Следовательно сечения эллипса или плоскостями параллельными плоскости (x', y) получаются в виде кругов и потому они проектируются в плоскость (x, y) как круги (фиг. 316)

Чтобы убедиться в этом перенесем начало координат в (x', y)

по формулѣ $x_1 = x_n + \alpha$. Получимъ:

$$\frac{b^2(a^2 + c^2) - a^2c^2}{a^2b^2c^2} m^2 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{b^2} + \frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{2\alpha x''}{b^2} + \frac{2x_n m \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{b^2 - c^2}}{acb^2} + \frac{2\alpha m \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{b^2 - c^2}}{acb^2} = 1.$$

Выберемъ также α , чтобы члены, содержащіе x'' въ первой степени уничтожились. Для опредѣленія α будемъ служить уравненіе:

$$\frac{2\alpha}{b^2} + \frac{2m \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{b^2 - c^2}}{acb^2} = 0;$$

уравненіе же сѣченія приметъ видъ:

$$x_n^2 + y_n^2 = \left[1 - \frac{b^2(a^2 + c^2) - a^2c^2}{a^2b^2c^2} m^2 - \frac{\alpha^2}{b^2} - \frac{2\alpha m \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{b^2 - c^2}}{acb^2} \right] b^2$$

Прямая часть состоитъ изъ постоянныхъ величинъ. Называя ея R^2 , получимъ $x_n^2 + y_n^2 = R^2$ знакомое намъ уравненіе окружности. Такой же рядъ круговыхъ сѣченій получится отъ пересѣченія эллипсоида плоскостями параллельными другому круговому сѣченію задачи 84-ой.

86) Мы видѣли въ задачѣ 85-ой, что центръ круговаго сѣченія лежитъ на разстояніи α отъ оси oz' , при чемъ α опредѣляется изъ уравненія

$$\alpha + \frac{m \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{b^2 - c^2}}{ac} = 0,$$

или,

$$\alpha = - \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{b^2 - c^2}}{ac} z_1$$

Все центры лежатъ (фиг. 316) въ плоскости (x', z') . Следовательно они лежатъ на прямой MN , имѣющей уравненіе

$$x' = - \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{b^2 - c^2}}{ac} z_1.$$

Изъ формулъ, дающихъ переходъ отъ x, y къ x_1, z , легко получить и обратнаго перехода: $x_1 = x \cos \varphi + z \sin \varphi$; $z = -x \sin \varphi + z_1 \cos \varphi$. Вставляя эти величины въ найденное уравненіе прямой, получимъ

$$(xu \sqrt{b^2 - c^2} + zc \sqrt{a^2 - b^2}) ac = (xc \sqrt{a^2 - b^2} - za \sqrt{b^2 - c^2}) \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{b^2 - c^2}$$

или:

$$z = - \frac{c \sqrt{b^2 - c^2}}{a \sqrt{a^2 - b^2}} x_1$$

Центры одного ряда круговыхъ сѣченій лежатъ на этой прямой, состоя-

вляющей съ осью x тупой уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{a\sqrt{a^2 - b^2}}$.
 Центры другого ряда лежатъ симметрично эллипсоиду на другой прямой наклоненной къ оси x подъ угломъ дополнительнымъ этому до 180° , тангенсъ его $= \frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{a\sqrt{a^2 - b^2}}$. Уравненіе 2 ой прямой таково:

$$z = x \frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{a\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Прямая, проходящая чрезъ центры круговыхъ сеченій эллипсоида имбуютъ весьма важное значеніе въ оптикѣ и въ кристаллографіи

87)

$$b \, dx.$$

88)

$$(mAx^{m-1} + nBx^{n-1} + 5Cx^4) \, dx.$$

89)

$$(mA_m x^{m-1} + (m-1)A_{m-1}x^{m-1} + \dots + 2A_1x + A_0) \, dx.$$

90)

$$(6x + 20x^2 + 42x^3 + 33x^{10}) \, dx.$$

91)

$$[(a + bx)n + (m + nx)b] \, dx.$$

92)

$$[(ax^2 + bx + c)(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C)(2ax + b)] \, dx$$

93)

$$[ax^3 + bx + c + x(2ax + b)] \, dx.$$

94)

$$\frac{(Ax + B)a - (ax + b)A}{(Ax + B)^2} \, dx.$$

95)

$$\frac{(Ax^2 + Bx + C)(2ax + b) - (ax^2 + bx + c)(2Ax + B)}{[Ax^2 + Bx + C]^2} \, dx.$$

96)

$$\frac{[(2x^5 - 3x^2)(6x + 55x^{10}) - (3x^2 + 5x^9)(10x^4 - 21x^6)] \, dx}{(2x^5 - 3x^2)^2}$$

97)

$$\cos(ax^2 + b) \, 2ax \, dx.$$

98)

$$[(ax^2 + bx + c)\cos x + (2ax + b)\sin x] \, dx.$$

99)

$$(2ax + b)\cos(ax^2 + bx + c) \, dx.$$

100)

$$(-\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \cos(2x) \, dx.$$

101)

$$\frac{[(ax + b)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)a] \, dx}{(ax + b)^2}$$

102)

$$\frac{a \, dx}{2\sqrt{ax + b}}$$

103)

$$\frac{(2ax + b) \, dx}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$104) \quad - \frac{a \, dx}{2(ax + b)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$105) \quad \frac{(2ax + b) \, dx}{2(ax^2 + bx + c)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$106) \quad \frac{2x \, dx}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$107) \quad - \frac{x \, dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$108) \quad \left[\frac{x \sin x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \sqrt{a^2 + x^2} \cos x \right] dx.$$

$$109) \quad \left[\frac{c \sin x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \sqrt{a^2 + x^2} \cos x \right] dx$$

$$= \left[\frac{x}{\sin x \sqrt{a^2 + x^2}} - \sqrt{a^2 + x^2} \frac{\cotg x}{\sin x} \right] dx$$

$$110) \quad \frac{(2ax + b) \, dx}{ax^2 + bx + c}.$$

$$111) \quad \frac{\cos x \cdot dx}{\sin x} = \cotg x \cdot dx.$$

$$112) \quad y = x^2, \lg y = 2 \lg x, \quad \frac{dy}{y} = x \frac{dx}{x} + 2 \lg x \, dx,$$

$$dy = y(1 + 2 \lg x) \, dx = x^2(1 + 2 \lg x) \, dx, \quad d(x^2) = x^2(1 + 2 \lg x) \, dx$$

$$113) \quad y = e^{2x}, \lg y = 2x, \quad \frac{dy}{y} = 2x \, dx; \quad dy = 2yx \, dx = 2e^{2x} x \, dx,$$

$$d(e^{2x}) = 2x e^{2x} \, dx.$$

$$114) \quad y = e^{-x^2}, \lg y = -x^2; \quad \frac{dy}{y} = -2x \, dx;$$

$$dy = 2yx \, dx = -2x e^{-x^2} \, dx, \quad d(e^{-x^2}) = -2x e^{-x^2} \, dx.$$

$$115) \quad \frac{x^2}{(x+2)^2} \left[\frac{(x+2)^2}{x+1} \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

$$116) \quad - \frac{dx}{x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$117) \quad \frac{dx}{x \lg x}.$$

$$118) \quad \frac{dx}{x} = e^{\cos x}$$

$$119) \quad x^{\sin x} \left[\cos x \cdot \lg x + \frac{\sin x}{x} \right] dx.$$

$$120) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}; \quad dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy = \frac{y}{x^2} dx + \frac{dy}{x};$$

$$dz = \frac{1}{x} \left(dy + \frac{y}{x} dx \right).$$

$$121) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x; \quad dz = y dx + x dy.$$

$$122) \quad \frac{dz}{dx} = 15x^2 - 6xy + 5y^2; \quad \frac{dz}{dy} = 3x^2 + 15xy - 10;$$

$$dz = (15x^2 - 6xy + 5y^2) dx + (15xy^2 - 3x^2 - 10) dy.$$

123) Если $u = \lg \operatorname{tg} x$, то

$$du = \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{dx'}{\sin x \cdot \cos x};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y \sin x \cdot \cos x}; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{x}{y^2 \sin x \cdot \cos x};$$

$$dz = \frac{dx}{y \sin x \cdot \cos x} + \frac{x dy}{y^2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{y \sin(2x)} \left(dx + \frac{x}{y} dy \right).$$

$$124) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cdot \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin x \cdot \sin y;$$

$$dz = \cos x \cdot \cos y \cdot dx - \sin x \cdot \sin y \cdot dy.$$

$$125) \quad f(x, y) = y - e^x - e^y - x; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -e^x - 1; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - e^y;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{e^x - 1}{1 - e^y}.$$

$$126) \quad f(x, y) = y - 1 - x e^y; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -e^y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 - x e^y;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{x e^y - 1}.$$

$$127) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y + \sin y = 2 \sin (2y).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{x \cos y + \sin y}.$$

$$128) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y \cos x + \sin (x - y); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x - \sin (x - y);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x + \sin (x - y)}{\sin x - \sin (x - y)}.$$

$$129) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + e^x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - e^x.$$

$$130) \quad \frac{dy}{dx} = 5x^4; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2.$$

$$131) \quad \frac{dy}{dx} = \cos x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \sin x$$

$$132) \quad \frac{dy}{dx} = -2 \cos x \cdot \sin x;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = -2 \cos (2x), \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 4 \sin (2x).$$

$$133) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = +\frac{2}{x^3}.$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{6}{x^4} = -\frac{6}{x^4}$$

$$134) \quad \frac{dy}{dx} = m(a - bx)^{m-1} b, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)b^2(a - bx)^{m-2}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -m(m-1)(m-2)b^3(a - bx)^{m-3} \dots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1) b^n (a-bx)^{m-n}.$$

Здесь множитель $(-1)^n$ поставлен только для того, чтобы показать, что при n четных стоять $+$, при нечетных $-$.

$$135) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{6}{x^4}; \quad \frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{x^n} = (-1)^{n-1} n! x^{-(n+1)}.$$

$$138) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3ay, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3ax + 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3a$$

$$\begin{aligned} d^2U &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right)^{(2)} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (dy)^2 \\ &= 6x (dx)^2 - 6a dx dy + 6y (dy)^2. \end{aligned}$$

$$139) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \sin y; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = e^x \sin y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \sin y; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -e^x \cos y; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = e^x \sin y$$

$$\begin{aligned} d^3U &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right)^{(3)} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} (dx)^2 dy \\ &\quad + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} (dx) (dy)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} (dy)^3 \end{aligned}$$

$$d^3u = e^x \sin y dx^3 + 3e^x \cos y dx^2 dy - 3e^x \sin y dx dy^2 - e^x \cos y dy^3$$

140) Первая производная остается без переменных; вторая производная обращается в

$$\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}$$

Данное уравнение обращается в

$$\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3} - x \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + e^x \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 = 0.$$

Замечая, что теперь $d^2y = 0$ и умножив все на $(dx)^3$, получим

$$dy d^2x + x (dy)^3 - e^x (dy)^3 = 0.$$

Для все на $(dy)^3$, получим:

$$\frac{d^2x}{dy^2} + x - e^x = 0$$

$$141) \quad x = a \cos^3 \omega; \quad dx = -3a \cos^2 \omega \cdot \sin \omega \cdot d\omega;$$

$$\left(\frac{a \cos^3 \omega}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{d\omega}{b} \right)^{\frac{2}{3}} = 1; \quad \cos^2 \omega + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

$$y = b (1 - \cos^2 \omega)^{\frac{3}{2}} = b \sin^3 \omega; \quad dy = 3b \sin^2 \omega \cdot \cos \omega \cdot d\omega;$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{3b \sin^2 \omega \cdot \cos \omega d\omega}{3a \cos^2 \omega \cdot \sin \omega d\omega} = - \frac{b}{a} \operatorname{tg} \omega$$

142) Данное уравнение обращается въ:

$$\frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{dx^3} - \frac{x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0;$$

$$dx = - \sin t dt; d^2 x = - \cos t \cdot dt^2$$

$$\frac{\sin t dt \cdot d^2 y + dy \cdot \cos t dt^2}{\sin^3 t dt^2} + \frac{\cos t dy}{\sin^2 t \cdot \sin t dt} - \frac{y}{\sin^2 t} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$$

143) По теоремѣ Тейлора:

$$\begin{aligned} & 3x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 2(3x^2 - 6x + 1) + \frac{1}{1 \cdot 2} (10x - 6) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} 6 \\ & = x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 8x + 12x - 12 + 8 \\ & = x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 1. \end{aligned}$$

$$144) f(x+3) = x^6 - x^3 + 1 + 3(6x^5 - 3x^2)$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2} (30x^4 - 6x) + \frac{27}{1 \cdot 2 \cdot 3} (120x^3 - 6) + \frac{81}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 300x$$

$$+ \frac{243}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 720x + \frac{729}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} 720.$$

$$145) f(x) = \sqrt{x}; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}};$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}.$$

$$\sqrt{x+1} = f(1+x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^3}{8} - \dots$$

$$146) \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots$$

$$147) \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$148) (\arcsin x)^2 = 2 \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{x^6}{6} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{x^8}{8} + \dots \right]$$

$$149) \sin \left[\frac{1}{\sqrt{ax}} - \frac{1}{\sqrt{ax}} \arcsin \frac{x}{a} \right]_{x=a} = 3a \quad 150) \quad - \frac{1}{2}$$

$$151) \quad \frac{1}{3a} \quad 152) \quad \operatorname{tg} a$$

158) Наибольш. при $x = 2$, наименьш. при $x = 5$, Наименьш. = 30, Наибольш. = 84.

159) Наименьш. при $x = 6$, $t = 4$ Наибольш. при $x = 6$, $x = 3$

160) Наибольш. при $t = -1$, наименьш. при $x = 3$, Наибольш. = ∞ , наименьш. = $-\frac{1}{8}$.

161) Наименьш. при $x = e$. Оно равно e .

162) Возьмем основание через x , сумму высот и основания через m ; тогда высота будет $m - x$. Найти наибольшее значение функции $x(m - x)$.

$$\frac{d[x(m-x)]}{dx} = m - 2x = 0, \quad x = \frac{m}{2}, \quad \text{высота} = m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}$$

Высота и основание наибольшего треугольника равны между собою.

163) Обозначим гипотенузу через p , длину катета стрелы убойи через φ . Катеты будут $p \cos \varphi$ и $p \sin \varphi$. Найти наибольшее значение функции $p(\cos \varphi + \sin \varphi)$

$$\frac{d(\cos \varphi + \sin \varphi)}{d\varphi} = -\sin \varphi + \cos \varphi = 0.$$

Питак, $\sin \varphi = \cos \varphi$, $\varphi = 45^\circ$. Катеты должны быть равны.

164) Радиус полукруга делится равными высотами прямоугольн.

$$165) \quad \frac{dz}{dx} = 2x - y = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 2y - x = 0, \quad x = 1, \quad y = 2, \quad z = 1$$

$$166) \quad \frac{X}{x^3} + \frac{Y}{y^3} = a^3.$$

Длина отрезка постоянная = a .

$$167) \quad Y - y = 3x^2 (X - x)$$

$$168) \quad \eta(yx - x + y = 0, \quad \eta = \frac{x}{1 + \lg x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\lg x}{1 + \lg x}.$$

подкасательная $\frac{x^2}{1 + \lg x}$

$$169) \quad r^4 = a^2 r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi), \quad (x^2 + y^2) = a^2 x^2 + a y^2 = 0,$$

$$\frac{df}{dx} = 2(x^2 + y^2) 2x = 2a^2 x; \quad \frac{df}{dy} = 2(x^2 + y^2) 2y + 2a y,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[a^2 - 2(x^2 + y^2)] x}{2(x^2 + y^2) + a y}; \quad Y - y = \frac{[a^2 - 2(x^2 + y^2)] x}{a - 2(x^2 + y^2) + a^2} (X - x).$$

$$170) \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \cos x.$$

Знаки при $\cos x$ и при $-\cos x$ противоположны. При $\cos x$ вправо, при $-\cos x$ влево. Следовательно кривые постоянно обращены выпуклостью кт. о. и х.

$$171) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\cos x = 0.$$

Отсюда $x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$, где $2n + 1$ есть обозначение любого угодно нечетного числа. При x равном нечетному числу раз $\frac{\pi}{2}$ кривая имеет точки перегиба.

$$172) \quad y^2 = 2px; \quad y = \sqrt{2px} = \sqrt{2p} \sqrt{x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{2p}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1; \quad \frac{p}{y} = 1; \quad p = y; \quad x = \frac{p}{2}$$

Точка лежит в концы ординаты восстановленной из фокуса.

$$173) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a + b = m$$

$$F(x, y, a) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(m-a)^2} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{(m-a)^3} = 0,$$

$$a = \frac{m \sqrt{\frac{m y^2}{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}, \quad m - a = \frac{m y^2}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 = m^2.$$

Длины этой задачи суть те, которые вычерчиваются различными точками отрезка длины m опирающегося концами на оси координат (серия с задач. 45 и 166).

$$174) \quad (x - a)^2 + y^2 - 4ma = F(x, y, a) = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - a) - 4m = 0, \quad x = a + 2m = 0, \quad a = x + 2m$$

$$(m^2 + y^2 - 4mx - 8m^2) = 0, \quad y^2 = 4mx + 4m^2,$$

парабола.

175) Дифференцируя уравнение $y^2 = 2px + qx^2$, получим:

$$2y \frac{dy}{dx} = 2p + 2qx;$$

откуда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p + qx}{y}.$$

Дифференцируя,

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} = p + qx.$$

получим:

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = q.$$

Следовательно:

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{p^2 + 2pqx + q^2 x^2}{y} = q.$$

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{p^2 + q(2px + qx^2)}{y} = q; \quad y \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{p^2}{y} + q = q;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p'}{y^3}; \quad p = y^2 \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

По

$$n^2 = y^2 + y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

если n обозначает нормаль (отъ точки кривой до оси). Поэтому:

$$\rho = \frac{n^3}{p^2}.$$

Такова величина радиуса кривизны для всех конических сечений (см. § 63).

$$176) \quad \rho = \frac{(2a + 3x)^2 \sqrt{x}}{a \sqrt{3}}; \quad t = \left(-x - \frac{3x^2}{a}\right), \quad u = 2 \sqrt{\frac{2x}{3a}} (2x + a).$$

$$81au^2 = 4(2a \pm \sqrt{a^2 - 12at^2} \pm \sqrt{a^2 - 12at - a})$$

уравнение параметри в координатах (t, u) .

$$177) \quad t = \frac{ax(5x - 12a)}{3(2a - x)^2}; \quad u = \frac{8ax^{\frac{1}{2}}}{(2a - x)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$178) \quad \rho = \frac{a^2}{3r}.$$

179) Десятичная имеет вид восьмерки (цифры 8) лежащей по полярной оси.

180) Эта кривая называется *кардиодом*. Уравнение ее:

$$r = \frac{a}{\cos \varphi} \pm b$$

или:

$$x = a \pm \frac{br}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

или:

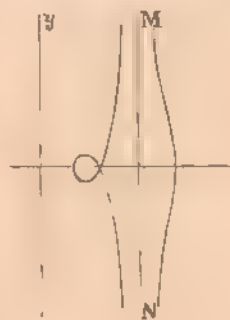
$$(x - a)^2 (x^2 + y^2) = b^2 x^2.$$

(фиг. 317).

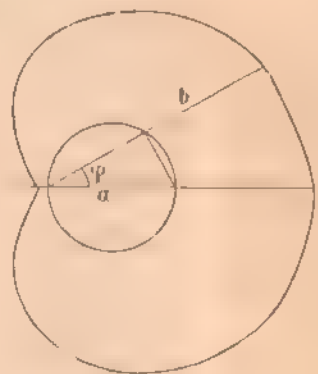
181) Эта кривая называется *улиткою Паскаля*. Уравнение ее:

$$r = a \cos \omega \pm b$$

$$\text{или: } \sqrt{x^2 + y^2} = a \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \pm b; \quad (x^2 + y^2 - ax) = b^2 (x^2 + y^2)$$



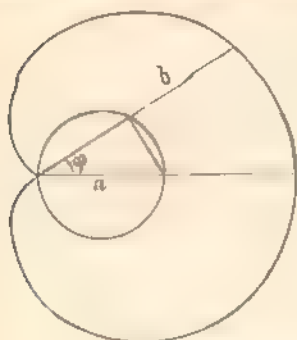
Фиг. 317.



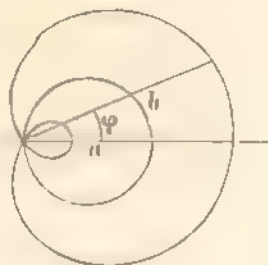
Фиг. 318.

Если $b > a$, то видъ ея таковъ какъ (фиг. 318).

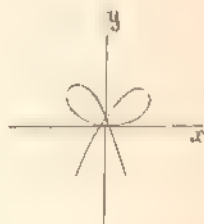
Если $b = a$, то она имѣетъ видъ фиг. 319 ой и называется *кардиоида*.



Фиг. 318.



Фиг. 320.



Фиг. 321.

Если $b < a$, то видъ ея таковъ какъ (фиг. 320). На шесть трехъ фигуръ начертены и круги, въ которыхъ образуется эллипс.

$$182) \quad x = \frac{3a}{2}.$$

$$183) \quad x = 0.$$

184) Видъ кривой изображенъ на фиг. 321.

185) $(x^2 + y^2 + m)^2 - 4m^2x^2 = a^4$, гдѣ $2m$ есть расстояние между фокусами.

$$186) \quad a^2 X^2 + b^2 Y^2 = (X^2 + Y^2)^2.$$

$$189) \quad \frac{df}{dx} = 2x, \quad \frac{df}{dy} = 2y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z; \quad \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$(X - x)x + (Y - y)y = 0, \text{ или } Xx + Yy = R_1^2$$

$$(Y - y)y + (Z - z)z = 0; \text{ или } Yy + Zz = R_2^2$$

190) Уравнение нормальной плоскости въ дифференциальной формѣ (362) для шести кривыхъ одинаково. Чтобы получить его въ конечной формѣ, поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Имѣемъ

$$f(x, y, z) = 0$$

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0$$

Отсюда

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & - \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & dz \\ dy & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & - \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & dx \\ dx & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & - \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & dx \\ & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & - \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & dy \\ & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & - \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & dy \end{array}$$

Для (392) на dx , получимъ:

$$X - x + (Y - y) \frac{dy}{dx} + (Z - z) \frac{dz}{dx} = 0.$$

Вставляя найденныя значения $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, получимъ:

$$(X - x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} \right] + (Y - y) \left[\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial z} \right] + (Z - z) \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} \right] = 0.$$

Для кривой задачи 190-й получимъ:

$$(X - x)yz + (Y - y)zx + (Z - z)xy = 0.$$

$$191) \quad \frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

$$192) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}.$$

$$\cos(N, x) = \frac{x}{a^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

$$\cos(N, y) = \frac{y}{b^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

$$\cos(N, z) = \frac{z}{c^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

$$193) \quad \frac{(x - X)a^2}{x} = \frac{(y - Y)b^2}{y} = \frac{(z - Z)c^2}{z}$$

$$194) \quad \frac{x \cdot \operatorname{ar} \sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \lg \sqrt{1-x^2}.$$

$$195) \quad x - \sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{ar} \sin x.$$

$$196) \quad x \cdot \operatorname{artg} x - \lg \sqrt{1+x^2}$$

$$197) \quad \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{artg} x \right) \operatorname{artg} x - \lg |1+x^2|$$

$$198) \quad \frac{1}{2} \operatorname{ar} \sin \left(\frac{x^2}{a^2} \right).$$

$$199) \quad \frac{1}{2a^2} \operatorname{ar} \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{a^2} \right).$$

200) Полагая $a + bx = y$ получимъ:

$$\frac{1}{b^3} \left(\frac{y^3}{2} - 2ay + a^2 \lg y \right).$$

201)
$$-\frac{1}{\sin x}.$$

202)
$$\frac{1}{3} \lg \left[\frac{(x+1)^2 (x-2)}{(x-1)(x+2)^2} \right].$$

203)
$$\frac{a^2 \lg(x-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2 \lg(x-b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2 \lg(x-c)}{(c-a)(c-b)}.$$

204) Подстановка $x = t^6$ приводитъ \int къ виду

$$\int \frac{(1+t^2-t^3) 6t^5 dt}{1+t^2}$$

не содержащему радикаловъ.

205)
$$\lg(1+x+\sqrt{3+2x+x^2})$$

206)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{mx^2+nx+p}} = \frac{1}{m} \int \frac{d\left(\frac{n}{m}x + \frac{p}{m}\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m}}}$$

$$= \frac{1}{m} \lg \left(\frac{n}{2m} + x + \sqrt{x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m}} \right)$$

207)
$$\int \sin x \cdot d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2}$$

208)
$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \lg \cos x$$

209)
$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \lg \sin x$$

210)
$$\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{d \lg x}{\lg x} = \lg \lg x$$

211)
$$\int_0^a y dx = \int_0^a x^3 dx = \frac{a^4}{4}$$

212)
$$\frac{a^2}{4} \sin 2\varphi + C.$$

$$213) \quad f(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} : \frac{df}{dx} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}},$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx$$

$$= a^{\frac{1}{3}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{x_1}^{x_2}$$

Длина всей кривой заключенной между положительными частями осей выразится

$$= a^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right)_0^a = \frac{3}{2} a.$$

$$214) \quad \int_2^5 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_{x=2}^5 = 50 \frac{1}{4}.$$

$$215) \quad \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \left[-\cos \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \left[\cos \varphi \right]_{\varphi=\pi}^{\varphi=0} = 1 - (-1) = \frac{2}{\pi}$$

$$216) \quad \frac{2}{3} \sqrt{2pa}$$

$$218) \quad \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} 2px dx = \frac{2\pi px^2}{2} = \frac{\pi y^2 x}{2} \text{ — половина}$$

цилиндра высоты x и основания πy^2 .

$$219) \quad \frac{abc}{3}$$

$$220) \quad V = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dx dy = \frac{2}{3} a^3.$$

$$221) \quad \int_0^a \int_{y=0}^{y=kx} \int_{z=0}^{\sqrt{k^2x^2-y^2}} dz dy dx = \int_0^a \int_{y=0}^{y=kx} \sqrt{k^2x^2-y^2} dx dy$$

Этот интеграл по формулѣ [4] параграфа 276 го равенъ

$$\int_0^a \left[y \sqrt{k^2 x^2 - y^2} + \frac{k^2 x^2}{2} \arccos \left(-\frac{y}{kx} \right) \right]_{y=0}^{y=kx} dx$$

$$= \int_0^a \left[\frac{k^2 x^2 \pi}{2} - \frac{k^2 x^2 \pi}{2} \right] dx = \int_0^a \frac{\pi k^2 x^2}{2} dx = \frac{\pi k^2}{2} \int_0^a x^2 dx = \frac{\pi k^2 a^3}{6}$$

$$220) \quad 2\pi \int_0^a y \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}} dy = 2\pi \int_0^a \sqrt{p^2 + y^2} dy$$

$$= 2\pi \int_0^a \sqrt{p^2 + 2px} dx = 2\pi \left[\frac{2}{3 \cdot 2p} (p^2 + 2pa)^{3/2} - \frac{2p^3}{3 \cdot 2p} \right]$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[\frac{\sqrt{(p^2 + 2pa)^3}}{p} - p^2 \right] = \frac{2\pi}{3} \left[\sqrt{p(p+2a)^3} - p^3 \right].$$

$$223) \quad \frac{dy}{y+a} = \frac{dx}{x^2}; \lg(y+a) = -\frac{1}{x}.$$

$$224) \quad (y-b) dy = \frac{xdx}{a-x}, \quad dy = \frac{bdy}{y} = \frac{xdx}{a-x}$$

$$y - b \lg y = a - x - a \lg(a-x)$$

$$225) \quad dx + \frac{y}{x} dy = 2n \left(\frac{y}{x} \right) dx - \frac{y}{x} dz; \quad dy = z dx + x dz$$

$$(1 - 2nz) dx + z(z dx + x dz) = 0, \quad \lg x + \int \frac{z dx}{1 - 2nz + z^2} = C$$

$$\lg x + \frac{1}{2} \lg(1 - 2nz + z^2) + \int \frac{ndz}{1 - 2nz + z^2} = C.$$

Если $n = 1$, то:

$$(x-y) e^{x-y} = C.$$

$$226) \quad \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} = dy,$$

или:

$$d\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = dy$$

$$y + c = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

$$F(x, y, c) = 2cy + c^2 + a^2 - x^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 2y + 2c = 0, \quad c = -y,$$

подставляя въ $F(x, y, c)$ вмѣсто c величину $(-y)$, получимъ:

$$2y^2 + y^2 + a^2 - x^2 = 0:$$

или:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Общій интеграль $x^2 = 2cy + c^2 + a^2$ представляетъ (при различныхъ c) рядъ параболъ. Особый интеграль $x^2 + y^2 = a^2$ представляетъ окружность.

$$227) \quad Y - y = p(X - x), \text{ гдѣ } p = \frac{dy}{dx}$$

Расстояніе a касательной отъ начала равно.

$$a = \frac{y - px}{\sqrt{1 + p^2}}; \quad y = px + a\sqrt{1 + p^2}.$$

Дифференцируя по x , получимъ:

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{ap \frac{dp}{dx}}{\sqrt{1 + p^2}};$$

или:

$$\frac{dp}{dx} \left(x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} \right) = 0$$

Последнее уравненіе разлагается на два:

$$\frac{dp}{dx} = 0; \quad \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} + x = 0.$$

Изъ $\frac{dp}{dx} = 0$ получимъ:

$$p = \frac{dy}{dx} = C; \quad y = Cx + C_1;$$

рядъ прямыхъ. Изъ

$$\frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} + x = 0,$$

въ соединеніи съ полученнымъ выше $y = px + a\sqrt{1 + p^2}$ получимъ

$$y = \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Возвышая въ квадратъ и складывая уравненія

$$\frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} = -x; \quad \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}} = y,$$

получимъ $x^2 + y^2 = a^2$ окружность. Требованію задачи удовлетворяють прямыя, проведенныя на расстоянии a отъ начала, выражаемыя общимъ интеграломъ и окружность, глбокая ихъ и выражаемая *особымъ* интеграломъ.

$$228) \quad xp - yq = \frac{x^2}{y}; \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \frac{y dz}{x^2}$$

$$y = \frac{C}{x}; \quad z = \frac{x^3}{3C} + C', \quad z = \frac{x^3}{3y} + C'$$

$$z = \frac{x^2}{3y} + f(x, y).$$

229) $p - q = \frac{z}{x+y}; \quad dy = dx = \frac{x+y}{z} dz$

$$y + x = C; \quad z = e^{x+y} f(x+y).$$

230) $yp + xq = z; \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$

$$y^2 - x^2 = \alpha; \quad \frac{z}{x+y} = \beta$$

$$z = (x+y) f(y^2 - x^2).$$

Механика.

1) $y = 0; \quad z = \sin x.$

Синусоида (волнообразная) лежащая в плоскости (x, z) .

2) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2; \quad z = 0.$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad z = 0.$ эллипс в плоскости (x, y)

4) $x = R \cos\left(\frac{z}{c}\right); \quad y = R \sin\left(\frac{z}{c}\right)$ винтовая линия

5) $\frac{dx}{dt} = a \cos(at); \quad v; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a \sin(at) = -j.$

6) $\frac{dz}{dt} = e^{-t}; \quad v; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -e^{-t} = -j$

7) Сила $ma^2 \sin(at) = ma^2x$, притягивающая точку m к началу координат, прямо пропорциональна радиусу x от начала.

8) На точку действуют тяжесть mg и с противление, которое можно выразить чрез mgk^2v^2 (всегда можно под брать такое k , чтобы сопротивление было пропорционально к квадрату скорости v выражалось таким образом)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g(1 + k^2v^2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 + kv)$$

$$g dt = \frac{dr}{1 + k^2 r^2}$$

$$- kgt = \operatorname{arctg}(kr) + C.$$

При $t = 0$ допустим $r = v_0$. Следовательно $C = \operatorname{arctg}(kv_0)$

$$kgt = \operatorname{arctg}(kv_0) - \operatorname{arctg}(kr).$$

По формуле $\operatorname{tg}(\varphi - \theta) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta}$ получим:

$$kgt = \operatorname{arctg} \left(\frac{k(v_0 - r)}{1 + k^2 v_0 r} \right)$$

$$r = \frac{kr - \operatorname{tg} kgt}{k + k^2 v_0 \operatorname{tg} kgt} = \frac{1}{k} \left[\frac{kr_0 \cos kgt - \sin kgt}{\cos kgt + kv_0 \sin kgt} \right] = \frac{dr}{k^2 gx + C_1} = \operatorname{tg} [\cos kgt + kv_0 \sin kgt].$$

При $t = 0$, время $t = 0$ Следовательно $C_1 = 0$

$$k^2 gx = \operatorname{tg} [\cos kgt + kv_0 \sin kgt].$$

9) Решим сначала такую задачу: Точка m , находящаяся на прямой OA , притягивается неподвижными точками O и A по закону Ньютона. Массу точки m можно принять за единицу. В начальном положении D точка m получила скорость v , по направлению в DB . Каков величина должна быть v_0 , чтобы m , дойдя до положения равновесия E , потеряла бы всю скорость?

Примем O за начало координат, OA за ось x . Обозначим массы точек O и A через m_1 и m_2 , коэффициент притяжения — через k . Пусть будут a — расстояние OA , x_1 и x_2 координаты точек D и E .

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dx} v = - \frac{km_1}{x^2} + \frac{km_2}{(a-x)^2}$$

$$v = \frac{2km_1}{x} + \frac{2km_2}{a-x} + C.$$

Из начальных условий движения находим, следовательно C , такое уравнение:

$$v_0 = C + \frac{2km_1}{x_1} + \frac{2km_2}{a-x_1}.$$

Поэтому:

$$v_0^2 = v^2 = \frac{2km_1}{x_1} + \frac{2km_2}{a-x_1} + \frac{2km_1}{x} + \frac{2km_2}{a-x}$$

При $x = x_2$ скорость v обращается в нуль. Следовательно,

$$v_0 = 2km_1 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) + 2km_2 \left(\frac{1}{a-x_1} - \frac{1}{a-x_2} \right).$$

Положение точки E определяется условием

$$\frac{km_1}{x_1^2} = \frac{km_2}{(a-x_2)^2}.$$

Для случая земли и Луны, обходящей через R радиус земли получим:

$$a = 60R, \quad x_1 = R, \quad \frac{81}{x_1^2} = \frac{1}{(60R-x_2)^2}$$

или:
$$\frac{9}{x_2} = \frac{1}{60R-x_2};$$

откуда: $x_2 = 54R, \quad \frac{km_1}{R^2} = 9,8.$

Поэтому: $v_0^2 = 19,6 \cdot 6400000 \left[1 + \frac{1}{5,81} - \frac{10}{6,81} \right].$

Скорость приблизительно: $v_0 = 11000$ метров в секунду. Это громадная начальная скорость — теперь артиллерия не достигла еще начальной скорости в 500 метров. Если точку бронею по направлению к Луне с большей скоростью чем 11000 метров, то она упадет на Луну, если с меньшей, то она вернется на землю.

$$10) \quad \frac{dx}{dt} = a; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = a \cos(at);$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -a^2 \sin(at)$$

$$i) \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \sqrt{a^2 + a^2 \cos^2(at)} = a \sqrt{1 + \cos^2(at)}$$

$$j) \quad \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2} \right)^2} = \sqrt{a^4 \sin^2(at) + a^4 \cos^2(at)} = a^2$$

$$11) \quad \frac{dx}{dt} = a \cos t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -a \sin t; \quad \frac{dy}{dt} = -b \sin t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -b \cos t; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$r) \quad \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}; \quad j) \quad \sqrt{a^4 \sin^4 t + b^2 \cos^2 t} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos(V, x) = \frac{\frac{dx}{dt}}{V} = \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \cos^2 t}}$$

$$\cos(V, y) = \frac{dy}{V} = \frac{-b \sin t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}$$

$$\cos(V, z) = 0$$

$$\cos(j, x) = \frac{d^2x}{j} = \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos(j, y) = \frac{d^2y}{j} = \frac{-b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos(j, z) = 0.$$

Последние 3 формулы показывают, что ускорение направлено к центру эллиптической траектории полученной к задаче 3.

$$12) \quad \frac{dx}{dt} = -R \sin t; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -R \cos t; \quad \frac{dy}{dt} = R \cos t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R \sin t; \quad \frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

$$v = \sqrt{R^2 + C^2}; \quad j = R$$

$$\cos(V, x) = \frac{-R \sin t}{\sqrt{R^2 + C^2}}; \quad \cos(V, y) = \frac{R \cos t}{\sqrt{R^2 + C^2}}.$$

$$\cos(V, z) = \frac{C}{\sqrt{R^2 + C^2}}$$

$$\cos(j, x) = -\cos t;$$

$$\cos(j, y) = -\sin t;$$

$$\cos(j, z) = 0.$$

Добавленіе I-е.

О мнимомъ переменномъ.

Математика послѣдней половины XIX-го столѣтія характеризуется особенно сильнымъ развитіемъ теоріи мнимаго переменнаго, на почвѣ котораго построена вся современная теорія функций. Поэтому и нахожу необходимымъ сказать нѣсколько словъ о мнимыхъ величинахъ и о функцияхъ мнимаго переменнаго.

Мнимую величину называется всякая величина содержащая $\sqrt{-1}$. Квадратнымъ корнемъ называется такая величина, которая, по возведеніи въ квадратъ, даетъ подчеркнутое количество. Въ ряду цѣлыхъ, дробныхъ и иррациональныхъ величинъ, которыми занимается элементарная алгебра, не существуетъ такой, квадратъ которой былъ бы равенъ -1 . Поэтому $\sqrt{-1}$ и названъ величиною *мнимой*.

Но невозможность такой величины совершенно условна. Постараемся это пояснить.

Когда занимается только цѣлыми числами, то признаютъ невозможнымъ дѣленіе меньшаго числа на большее, и дѣйствительно во многихъ задачахъ, напримѣръ въ такихъ, гдѣ требуется определить число живыхъ людей, результатъ $\frac{1}{2}$ человѣка нельзя. Но это не помѣшало установленію понятія о дробѣ и существуетъ множество задачъ, въ которыхъ дробный результатъ не содержитъ никакой нелюпи. Съ теченіемъ времени понятіе дробѣ вошло въ обыкновенную жизнь и знакомо каждому; выраженіе $\frac{1}{4}$ фунта понятно каждому. Со введеніемъ дробныхъ величинъ оказалось возможнымъ дѣленіе меньшаго числа на большее. Результатъ такого дѣленія нельзя найти въ ряду цѣлыхъ чиселъ, но его можно найти въ ряду дробныхъ чиселъ.

Во многихъ ариометникахъ категорически заявляется, что изъ меньшаго числа нельзя вычитать большаго. Во многихъ задачахъ результатъ такого дѣяствія дѣйствительно нельзя, напримѣръ если окажется, что явилось къ обѣду (-5) человѣкъ. Но существуетъ множество задачъ, въ которыхъ исполнѣ понятны результаты вычитанія большаго числа изъ меньшаго—отрицательныя числа. Съ теченіемъ времени и отрицательныя числа вошли въ обыкновенную жизнь. Ученикъ, повѣрившій въ ариометикѣ,

что нельзя вычитать большого числа из меньшего, преспокойно занимается таким вычитанием в алгебре. Точно надо было бы выразиться так, результат вычитания большого числа из меньшего не находится в ряду положительных целых или дробных чисел. Но его можно найти в ряду отрицательных чисел.

Точно так же результат извлечения квадратного корня из отрицательного количества нельзя найти в ряду действительных, целых или дробных, положительных или отрицательных чисел. Но отсюда еще не вытекает невозможность извлечения квадратного корня из отрицательных количеств. Только результат такого действия надо искать в ряду особая числа, неудачно названных мнимыми.

Отрицательные и дробные числа были введены очень давно, и с введением их математика обогащалась новым материалом. Мало по малу эти числа проникли и в жизнь. Точно так же введение мнимых величин необыкновенно обогащает математику и эти величины несомненно проникнут в современную бытовую жизнь.

При введении таких новых величин чрезвычайно важно соединить их с каким-нибудь реальным представлением, например геометрическим. Это и сделано для отрицательных величин: если направление в одну сторону считается положительным, то направление в противоположную сторону считать отрицательным. Нужно только, чтобы такое представление согласовалось со свойствами изучаемых величин. Величины $+a$ и $-a$ при сложении взаимно уничтожаются, движение точки на расстояние a вперед и затем на расстояние a назад приводит точку в первоначальное положение. В этих и других подобных фактах и находят себе оправдание представление отрицательных величин противоположным направлением.

Теперь я хочу показать, что и мнимой величине $\sqrt{-1}$ можно придать реальное значение. Можно например считать умножение вектора a на $\sqrt{-1}$ за поворот на 90° . Действительно, если $OA = a$, и я принимаю, что $OB = a\sqrt{-1}$, то, умножая OB на $\sqrt{-1}$ и повертывая OB еще на 90° и должен получить $OA' = -a$. Но это совершенно согласуется со свойствами $\sqrt{-1}$, потому, что

$$OA' = -a = a\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$$

ибо известно, что $\sqrt{-1} \sqrt{-1} = -1$.

Сначала математики встряблили мнимые величины при решении квадратных уравнений и долгое время принимали их за невозможные величины. Мало по малу убладалась в их важность и более глубоким значением. Наконец в начале XIX-го столетия знаменитый Коши (Cauchy) широко применил мнимые величины к теории уравнений и к интегралам. С тех пор теория мнимых величин стала быстро развиваться и пролила яркий свет на многие вопросы анализа и на общую теорию функций.

Оказалось более целесообразным исследовать не $\sqrt{-1}$, но двучленъ

$$x + iy \sqrt{-1}$$

иногда называемый *комплексною величиною*. Эту величину стали изображать геометрически слѣдующимъ образомъ: величины x стали откладывать по оси x прямой угловой системы координатъ, величины y — по оси y . Вся же величину $x + iy \sqrt{-1}$ изображать точкою (x, y) . Таковую точку называютъ *фигуративною*. Самую величину $\sqrt{-1}$ стали изображать сокращенно буквою i , такъ что комплексную величину изображаютъ такъ

$$x + iy.$$

Фигуративную точку можно отнести въ полярныя координаты. По мощью известныхъ формулъ:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi$$

получимъ:

$$x + iy = r \cos \varphi + i r \sin \varphi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Затѣмъ стали изучать функціи отъ комплекснаго переменнаго $x + iy$. Такія функціи:

$$z = f(x + iy).$$

Изучено именно такихъ-то функцій и оказалось наиболѣе плодотворнымъ. Однимъ изъ современныхъ математиковъ выражается такъ: область действительныхъ величинъ представляетъ собою какъ бы маленький островокъ на безбрежномъ океанѣ комплексныхъ величинъ. Съ этой точки зрѣнія действительная величина есть частный случай комплексной, именно — такая в мплексная $x + iy$, въ которой $y = 0$. При упомянутомъ геометрическомъ представленіи фигуративными точками только точки расположенныя на оси x представляютъ собою действительныя величины, всѣ же прочія точки служатъ представителями мнимыхъ величинъ.

Не углубляясь далѣе въ теорію функцій комплекснаго переменнаго, познакомясь съ некоторыми замѣчательными соотношеніями, получаемыми при помощи мнимыхъ величинъ.

Вставимъ въ формулу 290:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad (290)$$

вмѣсто x , величину $x \sqrt{-1}$. Получимъ:

$$e^{x \sqrt{-1}} = 1 + x \sqrt{-1} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3 \sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^5 \sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

или

$$e^{x \sqrt{-1}} \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \right) + \sqrt{-1} \left(x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right).$$

Сравнивая эту формулу съ формулами (291) и (292):

$$\sin x + x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \dots \dots (291)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots \dots \dots (292)$$

получимъ:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x.$$

Слѣдовательно:

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x.$$

Изъ послѣднихъ двухъ формулъ получимъ:

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

→ замѣчательныя соотношенія между тригонометрическими и показательными функциями.

Изъ выведенныхъ въ этомъ добавленіи формулъ:

$$x + iy = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

и

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$$

видно, что

$$x + iy = r e^{i\varphi}.$$

Замѣчательно, что теорія мнимаго переменнаго удивительно удобно прилагается къ изученію движенія жидкости. Такимъ методомъ воспользовался впервые Кирхгоффъ. Профессоръ П. К. Жуковский развилъ эту теорію въ своей книгѣ «Видеизмѣненіе метода Кирхгоффа для опредѣленія движенія жидкости» до такой степени, что получилъ возможность теоретически опредѣлять некоторыя величины необходимыя въ теоріи водныхъ колесъ и турбинъ, которыя до Жуковского опредѣлялись только опытнымъ путемъ.

Добавленіе II-е.

О вихревомъ движеніи.

Изученіе уравненій гидродинамики привели Гельмгольца къ замѣчательной теоріи вихревыхъ движеній.

Движенія жидкости бываютъ двоякаго рода: 1) можетъ существовать такая функція, называемая *потенціаломъ скоростей*, производныя отъ которой по x , y , z равны проложеніямъ скоростей; 2) можетъ происходить такое движеніе, для котораго не имѣется потенциала скоростей.

Въ послѣднемъ случаѣ, то есть въ отсутствіи существованія потенциала скоростей, частицы жидкости вращаются и при томъ такъ, что оси вращения соседнихъ частицъ располагаются по некоторымъ недвижнымъ кривымъ, такъ что каждая частица, расположенная на такой кривой, называемой *вихревою нитью*, вращается около элемента вихревой нити. Черезъ каждую точку жидкости проходитъ какая нибудь вихревая нить. Возьмемъ внутри жидкости безконечно малую площадь, ограниченную какимъ нибудь контуромъ (линею), и отберемъ всѣ вихревыя нити, проходящія черезъ точки этого контура. Получимъ совокупность вихревыхъ линий, называемую *вихревою трубкою*. Относительно этихъ вихревыхъ нитей и трубокъ Гельмгольдъ установилъ слѣдующія теоремы.

I. Вихревая нить состоитъ во все время движенія изъ однихъ и тѣхъ же точекъ жидкости.

II. Произведеніе площади поперечнаго сѣченія вихревой трубки на скорость вращения не мѣняется съ теченіемъ времени.

III. Это произведеніе имѣетъ одну и ту же величину по всей трубкѣ.

Вихревая трубка не можетъ прерваться внутри жидкости, гдѣ она можетъ только погибнуть въ вихревыя кольца. Вихревая трубка оказывается неразрушимою.

Добавленіе III-е.

Система принятыхъ теперь въ Наукъ единицъ.

Теперь принята слѣдующая система единицъ. Основными единицами признаются 1 сантиметръ, 1 граммъ, 1 секунда.

Принимаются:

за единицу скорости — скорость точки, проходящей 1 сантиметръ въ секунду;

за единицу массы — массу, содержащуюся въ одномъ граммѣ вещества,

за единицу ускоренія — ускореніе въ такомъ движеніи, въ которомъ въ одну секунду скорость увеличивается на 1 сантиметръ въ секунду;

за единицу силы — силу, подъ влияніемъ которой масса 1 граммъ приобретаетъ единицу ускоренія, то есть его скорость увеличивается на 1 сантиметръ въ секунду.

Въ этой системѣ сила, равная вѣсу 1-го грамма равна 981 дину.

Уравненіе (676)

$$\text{масса} = \frac{v^2 \rho u}{g}$$

понимается такъ:

$$\text{масса 1-го грамма} = 1 \text{ gr} = \frac{981 \text{ (дину)}}{981 \text{ (сантиметръ)}} = \frac{981}{981} = 1$$

$$\text{масса 5-граммовъ} = 5 \text{ gr} = \frac{981.5 \text{ (динъ)}}{981 \text{ (сантиметръ)}} = \frac{981.5}{981} = 5$$



АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

(Л.№ означают параграфы).

А.

Абель, 441, 444, 467.
 Абсцисса 2.
 Алексеевъ 465.
 Амплитуда 399.
 Анализъ 115 340, 443—447, 465.
 Ангармоническое отношение 461.
 Аналитическая геометрія 1—111, 150, 172.
 Андреевъ 472.
 Анисимовъ 465.
 Антикластическая точка 338.
 Аполлоній 203, 206.
 Аппель 466, 482.
 Аристотель 343.
 Архимедова спираль 217, 284.
 $\arcsin x$ 137, 444.
 $\arccos x$ 137, 144, 255.
 $\operatorname{arctg} x$ 139, 255.
 Асимптоты 45, 47, 60, 213.

Б.

Бахъ 485, 486.
 Безконечно малыя 115, 123, 124.
 Беллавитисъ 477.
 Бельтрами 398, 475.
 Бернулли 220, 488.
 Бертранъ 465.
 Бирманъ 466.
 Бобылевъ 482.
 Брессъ 485.
 Брю 467, 472.
 Брюнновъ 471, 491.
 Бугаевъ 440, 462.
 Буве 467, 472.
 Букрфевъ 480.
 Буяковский 481.
 Бурхардтъ 439, 466.

Бурместеръ 487.
 Буръ 482.

В.

Варьационное исчисленіе 446, 469.
 Ващенко-Захарченко 463, 469, 472.
 Веберъ 463.
 Векторъ 73.
 Вейерштрассъ 466, 467.
 Векторныя функции 437.
 Вершина эллипса 33, 63.
 — гиперболы 46, 63.
 — параболы 63.
 Винтовая косая поверхность 246.
 Винтовая линия 244.
 Винтовая развертывающаяся поверхность 245, 323.
 Винтовъ теорія 456.
 Волнутость 179.
 Возможныя перемѣщенія 383, 397.
 Всемирное притяженіе 372, 411.
 Выпуклость 179.
 Вѣроятностей (теорія) 456, 481.

Г.

Галилей 345.
 Гала 111.
 Гаммельъ 467.
 Гамма-функция 153, 157, 178.
 Гауссъ 336, 426, 462, 475.
 Гельмгольцъ 475, 482.
 Геометрія аналитическая 1—114, 450, 472.
 — высшая 451, 471.
 Лобачевского 452, 475.
 — начертательная 454, 479.
 неевклидова 452, 475.
 положенія 451, 473.

Комплексное переменное — Добавление I
 Комплекс Плюкверовский 450.
 Конигс 472.
 Конические поверхности 111, 319, 320.
 — сечения 62, 114.
 Координатные поверхности 321.
 Координаты 2, 3, 4, 51—53, 56—59, 61, 67, 83, 84, 450.
 Коркиз 465.
 Косоугольные координаты 61.
 Косые поверхности 102, 324.
 Котельниковъ 478.
 Кривизна 185, 331, 335.
 — поверхностей 336—339.
 Кривые 2-го порядка 28—50, 54, 55, 60, 62, 63, 114, 201—216, 271—273, 281, 282.
 — циклоида 222—229, 274, 280.
 — огибающих 184.
 — рулетты 222—232.
 — спирали 217—221, 284.
 Кругъ кривизны 185.
 Круговыя функции 137, 138, 139, 404.

Л.

Лагранжъ 313, 382, 383, 384, 385, 398, 402.
 Лагуриери 479
 Ламе 483.
 Лапласъ 417, 481, 491.
 Леви 484.
 Леонардъ 462
 Леонард Дариалье 462
 Леонард 478.
 Лемниската—задача 179.
 Лейбницъ 115.
 Ли Софусъ 447, 465, 470, 475.
 Линейныя преобразования 441, 463.
 — уравненія 307—310.
 Липовича поверхность 102, 324, 450.
 Липинъ геодезическія 340.
 — кривизны 383.
 Лобачевскій 452, 475.
 Логариомъ 148, 164.
 Логарифмирование 150.
 Логарифмическая спираль 218—220.
 Лоранъ 465.
 Лучъ проецирующій 451.
 Лѣтниковъ 469.

М.

Маиери 494
 Макаровъ 472
 Максимумы 170—172.
 Мальборекъ 157, 165.
 Марковъ 404.
 Машинны 459
 Максвелль 498, 499
 Матваръ 469.
 Матве 490.

Матрицы 399, 405, 407
 Матре 465
 Маиери 439, 490.
 Мениери 489.
 Механизмы 459, 487.
 Млодзевскій 476
 Минимы величины 443, 466, добав. II
 — пеллуви 46
 Могобране 452
 Модуль 477
 Модель 102
 Молье 467.
 Моменты инерции 401—405.
 Монжъ 451, 452, 480
 Мюллеръ 467.
 Мюллеръ-Бреслау 485.

Н.

Наблюдение 348.
 Наибольшія 170—172
 Наименьшія 170—172
 Направление касательной 117.
 — нормали 240
 — элемента кривой 181.
 Направляющія 316.
 Начало возможныхъ перемѣненій 397.
 — Д'Аламбера 378.
 — координаты 3, 57, 67.
 — сохраненія движенія центра инерціи 389.
 — живой силы 360, 390.
 — площадей 368, 371, 395, 396.
 — энергій 361, 394
 Начертательная геометрія 454, 479.
 Небесныя механика 342, 491.
 Независимое переменное 85.
 Незвѣстная плоскость 396
 Некрасовъ 465.
 Нейманъ 490.
 Неопредѣленныя выраженія 167—169
 Непрерывность 115.
 Незавныя функции 65, 154.
 Нормаль 171, 177, 225, 249, 240, 241
 Нормальная плоскость 236.
 Нормальныя сечения 331, 332.
 Ньютоуъ 115, 344, 345, 411, 482.

О.

Образованіе поверхностей 315—323.
 Образующія 316.
 Объемъ тѣлъ 289—292.
 — эллипсоида вращения 289.
 — эллипсоида трехослаго 290.
 Обгибающія кривыя 184.
 — поверхности 126
 Однодвѣя уравненія 299
 — функции 196
 Обрученны 7, 32, 230

Оппольцеръ 491.
 Определенные интегралы 251.
 Оптика 400, 490.
 Опытъ 343.
 Ордината 3.
 Ортогональная проекція 454.
 Осн гиперболы 46.
 — гиперболоида 103.
 — координатъ 3, 18, 67.
 Осн эллипса 29, 30.
 — эллипсоида 107.
 Особые точки 193—199, 338.
 Особый интегралъ 306.
 Остаточный членъ ряда 142.
 Остроградскій 428.

П.

Парабола 48—50, 55, 62, 63, 114, 215, 216, 271, 281.
 Параболоиды 108—110
 Параллельность 24, 91.
 Параметры 183.
 Паровак лошадь 393.
 Пары силъ 458.
 Паукъ 15.
 Паукъ 485.
 Пеннеле 465.
 Перегибъ 180.
 Перемѣнное δ , 65.
 Пересѣченіе линий 6.
 — поверхностей 71, 107, 109, 114.
 Перпендикулярность 25, 90.
 Перспектива 451, 454.
 Пикваръ 405, 466.
 Плоскость 87—94.
 — касательная 238.
 — координатъ 67.
 — нормальная 237.
 — соприкосновения 242.
 Плюккеръ 472, 450.
 Поверхность 68, 70, 100—113, 294—296, 315—328.
 — вращения 100—104, 106, 108, 289, 294, 322.
 — гиперболоида 100—105.
 — коническая 319, 320.
 — коноидальная 321.
 — линейчатая 324.
 — параболоида 108—110.
 — развѣтывающаяся 245, 323, 325, 328, 329.
 — сферы 69.
 — трубчатая 327.
 — уровня 422, 433.
 — цилиндрическая 317.
 — шара 69.
 Подкасательная 175.
 Поднормаль 176.
 Показательная функция 149.
 Полный дифференціалъ 152.
 Полярная ось 51, 83.
 Полярный уголъ 51.
 Полярныя уравненія кривыхъ 2-го порядка 55.
 Покровский 466, 487.
 Порядокъ безконечно большой величины 122.
 — — малой величины 123.
 — касанія 189.
 — кривой 66.
 — уравненія 15, 66.
 Порядокъ уравненія дифференціального 237.
 Последняя сторона многоугольника 76.
 Посевъ 465.
 Построеніе длины полуокружности 230.
 — кривой по уравненію 10, 30.
 — циклоиды 222, 228.
 — эллипса 41.
 Потенциальная энергія 361.
 Потенціалъ 359, 386, 387, 416, 419.
 Потокъ силовой 424.
 Преобразования (группы) 447, 470.
 — линейныя 441, 463.
 Признаки сходимости рядовъ 143.
 Превращеніе координатъ 52—53, 56—59, 77—80, 84.
 Притяженіе 372, 411—429.
 Производная 119—121, 128—130, 131—137.
 Простая функция 126—139.
 Прозвѣтный лучъ 451.
 Проекція 78—76, 295.
 Псевдосферы 338.
 Пуанкаре 475, 490, 491.
 Пуансо 458.
 Пуассонъ 418, 481, 482.
 Пучекъ 451.

P.

Работа 354, 391—393, 397.
 Радиусы векторы 29, 51, 83.
 Радиусы кривизны 185, 186, 192, 209, 210, 217, 218, 225, 233, 331, 339.
 Равносторонняя гипербола 60.
 Развертки 187, 188, 211, 214, 220, 227.
 Развѣтывающія 187, 188.
 Развѣтывающіяся поверхности 245, 323, 325, 328, 339.
 Расстояніе между 2-мя точками 20, 81, 82.
 — точки отъ плоскости 98, 94.
 — точки отъ прямой 26, 27.
 — точки эллипса и гиперболы отъ фокуса 54.
 Растянутая циклоида 229.
 — гипс- и энциклоида 232.
 Рациональная механика 342.
 Раутъ 482.
 Рейе 473.

Риманъ 466, 475—476, 490.
Рѣло 487
Рѣссель 452, 475.
Рошинъ 465.
Рулетты 231.
Рычагъ 397.
Рэлей 490
Ряды 142, 157—165.

С.

Савичъ 491.
Салмонъ 463, 472.
Связи 381.
Сенъ-Венанъ 483
Сенъ-Жерменъ 482
Секторъ 275—278.
Серре 463, 465.
Сжатая эли- в гипоциклоида 229, 232.
Сила 351, 370, 420.
Силовые линіи 421.
Силовой потокъ 425.
Силовые трубки 424, 247.
Симсонъ 288
Синклястическія точки 338.
Система точекъ 362.
Скорость 347, 350, 363, 369.
Слудскій 462.
Смежности (уголь) 185.
Сомовъ 482
Соприкосновенія (плоскость) 242.
Сопротивленіе матеріаловъ 469, 485.
Сопряженные диаметры 87, 202—206.
Софусъ-Ли 447, 465, 470, 475.
Спирали 217—221, 284.
Спирали 217—221, 284.
Статика 410.
Сфера 69
Сферическія координаты 88, 84.
— астрономія 481, 491.
Сферическая тригонометрія 449.
Сферическія функціи 415, 468.
Сходимость 143

Т.

Тайлоръ 157, 158, 165.
Таннери 467.
Теоретическая механика 342.
Теорія вѣроятностей 456, 481.
— конечныхъ разностей 442, 464.
— механизмовъ 459, 487, 489.
— мнѣлаго перемѣннаго — Добав. II.
— число 440, 462.
Теорема Аполлонія 203, 206.
— Бернулли 438
— Брианшона 451.
— о безконечно малыхъ 124.
— Грина 429.
— о количествѣ движенія 374.
— Остроградскаго 428.
Термодинамика 460, 490.
Таме 486, 488.

Тихомандрицкій 463.
Томсонъ (Дордъ Кэльвинъ) 468, 492, 483.
Точка антиклястическая 338.
— возрата 193, 194, 199.
— ирратная 193, 197, 199.
— основниа 193, 195, 199.
— отдѣльная 193, 198, 199.
— перегиба 180.
— пересѣченія линій 6.
— синклястическая 338
— угловая 193, 196, 189.
Торъ 327.
Тоттѣнтеръ 463, 465.
Трансцендентныя функціи 126.
Трохоиды 232.
Трубки силовые 424, 427.
Трубчатая поверхность 327.
Тэтъ 468, 482, 483

У.

Углы наклоненія нормали 240.
— прямой 85.
—, составляемые плоскостями 89.
—, — прямыми 23, 86, 99.
Уголъ радиуса вектора съ касатель-
ною 191.
— смежности 185
Уравненіе алгебраическое n -ой сте-
пени введено
— опредѣляетъ линію 6.
— опредѣляетъ поверхность 68
— 1-го порядка опредѣляетъ прямую
16.
— 1-го порядка опредѣляетъ плос-
кость 83.
— дифференціальныя 297—314.
— съ частными производными 311—
314.
Условіе интегрируемости 302.
— несжимаемости 436
— параллельности 24, 91.
— перпендикулярности 25, 86, 90.
Ускореніе 348, 349, 350, 364.
Установившееся движеніе 437.

Ф

Фокальное разстояніе 34.
Фокусы 28, 42, 48.
Функціи 65, 115, 126.
Фуръе 490.

Ц.

Центральное движеніе 367—372
Центр массы 388, 389
— качанія 406
— тяжести 389.
Циклоида 222—230, 274, 280.
Циклоидальный маятникъ 407.
Цилиндрическая поверхность 70, 72
317, 318.

Цилиндроида 458.
Циннерь 488.
Цангерь 491.

Ч.

Частная производная 151
Чубышевъ 482
Чисель (теорія) 440, 482.

Ш.

Шаль 474
Шель 482
Шиллеръ 490.
Широта 83
Шиндлеръ 465
Штумпфель 474
Штурмъ 465.

Э.

Эксцентриситетъ 35
Элементарная работа 391, 397
Элементарный импульсъ 373
Элементъ кривой 181, 182, 235
Эллипсоиды 100, 107, 281, 290
Эллипсоидъ 28, 41, 54, 55, 62, 63, 114,
201, 211, 272, 282
Эллиптические функции 411, 467
Эверши 461, 464
Энциклопиды 232
Эфратъ 463

Я.

Явные функции 65
Якоби 457, 465, 467, 482.

